


NAZIONALE
255
2 — C
16
VITT. EMANUELE
R MA

DIVERS
OUVRAGES
DE
MATHEMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE.

Par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences.

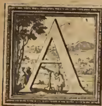


A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DC. XCIII.



PREFACE.



PRE'S la mort de Mrs Frenicle & de Roberval, leurs ouvrages manuſcrits furent remis entre les mains de M. Picard, qui les conſerva tous enſemble dans ſon appartement de l'Obſervatoire avec une copie au net & corrigée de toutes les obſervations de Tycho Brahé ; mais ſur la fin de l'année 1682. environ ſept ans aprés la mort de M. de Roberval, M. Picard eſtant mort, on donna le ſoin de tous ces papiers à M. de la Hire, qui y joignit auſſi quelque temps aprés les ouvrages manuſcrits de M. Picard, qu'on avoit détournez. Il conçut dés-lors le deſſein de tirer de tous ces manuſcrits ceux qui pourroient eſtre utiles au public, & il commença par le traité du Nivellement de M. Picard, qu'il fit imprimer in douze. Enfin aprés la mort de M. Mariotte, qui arriva en 1684. il fit imprimer ſon traité du mouvement des eaux, comme il l'en avoit prié pendant la maladie dont il mourut, & par ſon teſtament : mais, comme M. Mariotte donnoit ſouvent au public de petits ouvrages, il trouva peu de choſe entre ſes manuſcrits, qui n'eût déja eſté imprimé.

M. de la Hire ayant examiné tous les manuſcrits qu'il avoit ramaſſez, il ſollicita Monſieur de Louvois, à qui le Roy avoit donné le ſoin de ce qui regardoit les gens de lettre, de luy permettre de faire imprimer ceux qu'il jugeroit à propos, & qu'il trouveroit les plus achevez ; & ayant obtenu cette permiſſion, il commença à y faire travailler à l'Imprimerie du Louvre. Il demanda auſſi que Mrs Sedileau & Pothenot luy aidaſſent dans cette impreſſion, ce qu'ils ont fait avec un tres-grand ſoin.

M. de la Hire choiſit d'abord le traité des Excluſions de M. Frenicle, à cauſe que c'étoit une methode particuliere dont il ſe ſervoit

ã

pour la solution des Problemes, par le moyen de laquelle il resolvoit facilement des questions de nombres tres-difficiles sur & lesquelles l'Algebre avoit souvent peu de prise, ce qui donnoit de l'admiration aux Sçavans avec qui il avoit commerce, comme on peut le remarquer, en plusieurs endroits de leurs ouvrages. Il y joignit un traité des Combinaisons, & il jugea pour lors, qu'il falloit remettre à une autre fois plusieurs autres ouvrages de M. Frenicle, qui auroient fait tous seuls un fort gros volume, comme celuy des nombres Premiers, un autre des nombres Poligones, un des Tables ou Quarrez magiques, & d'autres : mais pour rendre ce volume plus parfait, il y a ajoûté celuy des Quarrez magiques ; & il a cru que le public seroit bien aise de voir que ce qui avoit esté publié jusqu'alors par les plus habiles Algebristes, estoit fort éloigné de ce qu'avoit trouvé M. Frenicle sur cette matiere. Car entre les 20.922.789. 888. 000 dispositions differentes des seize premiers nombres de suite dans un quarré, qui a quatre pour costé, ils n'en trouvoient que seize qui fussent magiques, lesquels pouvoient encore se reduire à quatre principaux, comme ils le remarquent, au lieu que M. Frenicle en donne 880. dans lesquels il trouve des proprietez tres-singulieres ; & comme il s'étoit donné la peine de les disposer tous, M. de la Hire les a fait imprimer, afin qu'on n'eût aucun lieu d'en douter.

On sera peut-estre surpris de voir dans ce volume quelques propositions qui ont déja esté publiées par d'autres Geometres ; mais on doit remarquer, que la plûpart des ouvrages qui sont icy, avoient esté composez il y avoit fort long-temps, & que ceux qui en estoient Auteurs avoient negligé de les faire imprimer, ne pouvant pas faire un volume parfait, ou n'y ayant pas mis encore la derniere main ; & sur tout M. de Roberval qui avoit des raisons, à ce qu'il disoit, pour ne pas publier toutes ses belles découvertes en Geometrie. Entre les ouvrages de M. Roberval on a imprimé dans ce volume celui des Mouvemens composez, un autre de la Resolution des équations, un des Indivisibles & celui de la Trochoïde ou Roulette, qu'il avoit faits il y avoit fort long-temps, & dont quelques parties lui avoient aquis beaucoup de reputation dans sa jeunesse. Les deux lettres qu'on a jointes à ses ouvrages, dont il adressé la premiere au P. Mersenne & la seconde à Torricelli, serviront d'éclaircissement pour l'histoire de quelques decouvertes de Géometrie.

M. de la Hire ayant donné avis à M. Hugens de Zulichem qu'il faisoit imprimer un recueil de quelques ouvrages de Messieurs de l'Académie, il lui envoya ceux qu'on a inserez ici, à sçavoir celuy de la cause de la pesanteur, de l'équilibre de la balance, des puissances qui tirent des cordes, une nouvelle force mouvante par le moyen de la poudre à canon, la construction du lieu à l'hyperbole par les

Aſymptotes, la demonſtration de la regle *de Maximis & Minimis*, auſquels on a ajouté la reſolution d'un fameux probleme de Catoptrique. Mais pendant le cours de cette impreſſion qui a duré long-temps par des raiſons particulieres, M. Hugens a fait imprimer en Hollande dans ſon traité de la lumiere, celui de la cauſe de la peſantur qui eſt icy, avec quelques remarques & additions, & il a mandé à M. de la Hire qu'il ne s'étoit pas ſouvenu qu'il le lui euſt envoyé avec ſes autres petits traitez.

Pour les ouvrages de M. Picard qui ſont icy, ils n'eſtoient pas encore en ordre lorſqu'il mourut; c'eſt ce qui a obligé M. de la Hire de faire quelques remarques ſur celui des Cadrans. Le recueil des meſures & des poids a été tiré de ſes regiſtres, où il avoit écrit avec un tres-grand ſoin tout ce qu'il avoit pu recouvrer ſur cette matiere, tant par ſes propres obſervations, que par les relations qu'il avoit euës en differens endroits, & principalement ſur les memoires de M. Auzout. Les Fragmens de Dioptrique eſtoient dans une grande confuſion, & M. Pothenot a pris le ſoin de les ranger dans l'ordre où ils ſont. On trouvera à la fin des ouvrages de M. Picard l'écrit de M. Auzout ſur le Micrométre auquel M. Picard avoit quelque part. Cet écrit avoit déja eſté imprimé en 1667. mais on ne le trouve que rarement & par hazard.

Les Regles des jets-d'eaux de M. Mariotte ſont en parties tirées de ſon traité du mouvement des eaux. Mais comme c'eſtoit un extrait pour l'uſage, avec quelques remarques particulieres qu'il avoit faites dans le deſſein de les preſenter à Monſieur de Louvois, on a cru qu'on ſeroit bien-aiſe de les trouver icy.

Enfin M. de la Hire ayant entre les mains quelques experiences de M. Romer ſur la hauteur & ſur les amplitudes des corps jettez, & M. Sedileau ayant auſſi de lui quelques propoſitions ſur l'épaiſſeur & ſur la force des tuyaux qui ſervent à conduire les eaux, on les a inſerez à la fin de ce recueil.

TABLE DES MATIERES
CONTENUES
DANS CE VOLUME.



METHODE

METHODE
POUR TROUVER
LA SOLUTION
DES PROBLEMES
PAR LES EXCLUSIONS.

ABREGÉ
DES COMBINAISONS.

Par M. DE FRENICLE.

METHODE
POUR
TROUVER LA SOLUTION DES PROBLEMES
par les Exclusions.

QUOI-QUE les questions doivent estre examinées diversement suivant la diversité de leur sujet, on peut néanmoins y observer quelques regles qui conviennent à toutes en général, & qui peuvent en faciliter la recherche.

On doit toûjours connoistre quelque proprieté de ce qui est requis dans la question; car sans cela il seroit impossible de rien trouver, si ce n'est que le probleme ou la question proposée se donne à connoistre par elle-mesme. Comme si l'on demandoit quelque chose touchant les nombres qui sont la somme de deux quarrez ou des costez d'un triangle: pourvu qu'on sçache le moyen de faire des quarrez & des triangles, il sera facile de sçavoir leur somme sans qu'il soit besoin d'avoir aucune autre proprieté desdites sommes. De sorte qu'il suffit de connoistre ce qui est proposé ou par soy-mesme comme les sommes susdites, ou par quelque proprieté. Comme si l'on demandoit quelque particularité touchant les hypotenuses des triangles rectangles dont les costez sont des nombres entiers: car pour y parvenir il sera nécessaire d'avoir quelque proprieté desdites hypotenuses par le moyen desquelles on les puisse avoir toutes.

Que si l'on connoist plusieurs proprietez de la chose proposée, on se servira de celle qui conduit plus facilement à la question, & par de moindres nombres. Car il faut remarquer que le principal but & subtilité de cette methode, consiste principalement à racourcir le chemin, & à choisir de certains détours qui en ostent la longueur & les plus grandes difficultez.

Mais parce qu'ordinairement chaque question se traite diversement suivant les differentes proprietez dont il se faut servir, il seroit impossible de donner des regles pour tous les divers cas qu'on pourroit rencontrer. C'est pourquoy l'on a jugé plus à propos de donner des exemples qui seront plus utiles pour faire entendre cette methode, aprés avoir expliqué quelques regles générales qu'on peut observer pour parvenir à la solution du probleme.

1°. Si l'on connoist en général ce qui est proposé, mais non pas le particulier qu'on propose, il faut par le moyen de plusieurs particuliers connus trouver quelque regle qui convienne à tous; & par son moyen on trouvera ce qui est requis.

Par exemple, si l'on demande quels sont les quarrez dont la somme est l'hypotenuse du triangle 57, 176, 185.

Puisqu'on sçait en général le moyen de faire des triangles, il en faut construire plusieurs dont on sçaura les quarrez, comme le triangle 3, 4, 5, qui a 4 & 1 pour ses quarrez; 5, 12, 13. qui a 9 & 4; 8, 15, 17, qui a 16 & 1: ou bien mesme on se contentera au commencement de quelqu'un de ces triangles, & puis l'on cherchera quelque voye par laquelle avec 3, 4, 5, par exemple on puisse trouver 4 & 1, & l'ayant trouvée l'on regardera si elle convient aux autres triangles, & par ce moyen l'on trouvera ce qui est requis.

Ainsi ayant trouvé que prenant la somme & la difference des deux costez impairs 5 & 3, qui sont 8 & 2, leur moitié 4 & 1 donne les quarrez requis, & trouvant que la mesme chose convient aux autres triangles 5, 12, 13; 8, 15, 17, &c. j'observeray la mesme régle pour le triangle proposé 57, 176, 185, en prenant la

ſomme & la difference des deux coſtez impairs 57 & 185, qui ſont 242 & 128: leur moitié 121 & 64, donnera les quarrez requis.

2°. Mais ſi l'on ne connoiſt point ce qui eſt propoſé ni en général ni en particulier, il en faut chercher les propriétez par ce que l'on a de connu. Et pour cét effet il faut conſtruire & faire des nombres ſemblables à celuy qui eſt requis en toutes les façons poſſibles, & ſans en obmettre aucun, en commençant par le plus petit, & continuant tant qu'on en ait quelque nombre conſiderable, comme dix ou douze, ou plus ſelon la nature de la queſtion; car quelquefois trois ou quatre ſuffiront, & dans d'autres rencontres il en faudra pluſieurs avant qu'on ait découvert ce que l'on cherche.

Par exemple ſi l'on demandoit combien de fois quelque nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, je ſuppoſe que je n'aye rien de donné, ſinon le moyen de faire des quarrez, & de les aſſembler deux à deux pour avoir leur ſomme: il faudra voir dabord ſi les nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez, ont quelque propriété particuliere, afin de pouvoir connoiſtre ſi le nombre donné eſt la ſomme de deux quarrez, & ſi quelque nombre peut eſtre pluſieurs fois la ſomme de deux quarrez. Et aprés qu'on aura découvert des nombres qui ſont la ſomme de pluſieurs couples de quarrez, & le moyen d'en trouver autant qu'on voudra, on ſe ſervira de la premiere regle pour en faire leur générale, par laquelle on puiſſe trouver ce qui eſt requis.

Mais pour remarquer quelque propriété deſdits nombres qui ſont la ſomme de deux quarrez, j'aſſemble les quarrez deux à deux, comme 4 & 1; 9 & 1; 9 & 4; 16 & 1; 16 & 4; 16 & 9, &c. tant que j'en aye quelque multitude notable; & conſidérant leurs ſommes 5, 10, 13, 17, 20, 25, &c. je regarde ſi j'y pourray découvrir quelque propriété qui ne convienne point aux autres nombres, comme l'on montrera plus au long dans l'exemple que l'on donnera dans la ſuite.

3°. Pour n'obmettre aucun nombre de ceux qu'on veut avoir, il faut établir quelque ordre pour ne ſe point égarer dans cette perquiſition; & cét ordre doit eſtre le plus ſimple & le moins embrouillé qu'il ſera poſſible, & tel que par ſon moyen l'on puiſſe pourſuivre à faire les nombres auſſi avant qu'on voudra ſans aucune confuſion.

Il faut auſſi que cette recherche ſoit la plus courte & la plus facile qu'il ſe poura faire, & pour y parvenir on ſe ſervira de deux moyens principaux.

La recherche ſera courte ſi l'on conſidere le moins de nombres que la nature de la queſtion pourra porter.

Elle ſera facile ſi l'on ſe ſert des moindres nombres poſſibles.

4°. Pour le premier moyen, qui eſt de faire la perquiſition courte, on ſe ſervira de *l'Excluſion*. Par l'Excluſion on obmet les nombres que l'on aura reconnus inutiles, & qui ne ſervent de rien à la queſtion, & dont on ſe peut tres-bien paſſer; comme ſont preſque toûjours les multiples, leſquels neanmoins doivent parfois eſtre conſiderez, & principalement en deux cas.

Le premier eſt, lorſque ne ſçachant encore aucune propriété du nombre requis, on recherche tout ce qui luy appartient tant comme primitif que comme multiple.

L'autre eſt quand il arrive qu'il n'y a point de répugnance que ce qui eſt requis ſoit fait en partie par des primitifs, & en partie par des multiples tout enſemble; comme lorſqu'on demande trois triangles dont les aires ſoient les coſtez d'un triangle rectangle. Dans cet exemple, à cauſe que le triangle a trois coſtez, il n'y a point d'inconvenient que ce dernier triangle ait pour un de ſes coſtez l'aire d'un triangle multiple, & pour les autres celles de deux autres triangles primitifs; & partant il ne faudra obmettre l'aire d'aucun triangle tant primitif que multiple.

Il faut remarquer que quand on parle de faire la perquiſition courte, ce n'eſt pas que pour cela on ne recherche pluſieurs nombres; mais elle eſt courte, parce qu'en

qu'en excluant beaucoup de choses inutiles, on passe incontinent bien avant & à de grands nombres par la consideration de tres-peu.

5°. Cette exclusion se fait encore en considerant les lettres finales des nombres: car il arrive souvent que par les finales on voit que plusieurs nombres ne peuvent avoir la qualité qui est requise. Mais pour l'ordinaire on ne se sert de cette pratique que quand on connoist plusieurs propriétez de ce qui est requis, & qu'on en cherche d'autres plus éloignées & plus cachées.

Par exemple, si l'on veut que quelque nombre soit quarré, on considerera les finales que les quarrez peuvent avoir, & ces finales sont 1, 4, 9, avec la lettre précedente paire, & 6 avec la précedente impaire, 25 avec 0, 2, ou 6 auparavant, & enfin 00 précédé d'une finale quarrée: d'où l'on conclura que les nombres qui finiront par 2, 3, 7, ou 8, ne pourront estre quarrez, ou par 5 precédé d'une autre lettre que de 2, ou dont les finales 1, 4, 9, seront précédées d'un impair, &c. & partant on les pourra exclure comme inutiles à la question.

Il faudra de mesme considerer les finales des autres nombres dont on aura besoin, & voir s'il y en a quelqu'une qui leur soit particulierement affectée: car bien souvent ces finales montrent clairement & démonstrativement l'impossibilité des questions dont on ne peut donner de solution.

6°. On peut aussi considérer quelques propriétez particulieres de la chose requise pour faire ladite exclusion: par exemple, si le nombre requis doit estre pairement pair plus ou moins un, ou bien different de l'unité d'un multiple de 6 ou de 8, ou autres telles propriétez, comme sont les suivantes.

Les quarrez qui ne sont point mesurez par 3, surpassent de l'unité un multiple de 3.

Les quarrez impairs surpassent de l'unité un multiple de 8; & ainsi les quarrez impairs qui ne se mesurent point par 3, surpassent de l'unité un multiple de 24.

Tout quarré qui n'est point mesuré par 5, est different de l'unité d'un multiple de 5.

Toute hypotenuse primitive surpasse de l'unité un multiple de 4.

La somme des deux moindres costez de tout triangle primitif, est toûjours differente de l'unité d'un multiple de 8.

Tout nombre premier excepté 2 & 3, est different de l'unité d'un multiple de 6.

Ces propriétez & autres estant considerées à propos, donnent souvent tant d'exclusions, principalement aux questions impossibles, qu'elles semblent en montrer clairement l'impossibilité.

7°. Le second moyen par lequel la perquisition se rendra facile, est en se servant des moindres nombres qu'on pourra, il se peut nommer *diminution*. Il y a plusieurs voyes pour parvenir à cette diminution, aussi-bien qu'à l'exclusion, comme sont les suivantes.

En cherchant ou en choisissant quelque propriété, qui fasse que ce qui est requis se puisse trouver par de moindres nombres que ceux que l'on trouve par quelqu'autre proprieté.

Par exemple, si l'on cherche les hypotenuses des triangles rectangles, on les trouveroit suivant la proprieté qu'elles ont, qui est que leur quarré est la somme de deux quarrez: mais on les trouvera beaucoup plus facilement & avec des nombres bien moindres, si l'on se sert de la proprieté suivante, qui est que la somme de deux quarrez inégaux est une hypotenuse.

Car par la premiere propriété on trouve par exemple l'hypotenuse 5, parce que les nombres 9 & 16 joints ensemble font 25, quarré de 5. Mais par la seconde je trouveray le mesme nombre 5 en joignant ensemble 4 & 1 ce qui est beaucoup plus facile & plus court.

8°. Quelquefois aussi aprés avoir trouvé une voye pour rencontrer le nombre

requis, & ayant déterminé qu'il faut chercher quelque autre nombre pour avoir le requis, ce second se trouvera encore par un troisiéme, & ce troisiéme par un quatriéme; ce qui sert quelquefois dans les problemes impossibles pour en démontrer l'impossibilité. Comme si l'on trouve que pour avoir le 3e ou le 4e il se faille servir du premier, on verra évidemment l'impossibilité de la question. Que si elle ne paroist pas fort clairement, cela fait au moins que pour des nombres de deux ou trois lettres qu'on examine, estant par-aprés appliquez à la question, les nombres qui en proviendront auront au moins dix ou douze lettres, & par ce mesme moyen on rejette aussi une grande multitude de nombres superflus.

9°. Que si la question demande plus d'un nombre, comme si l'on requiert un triangle dont l'hypotenuse soit un quarré, & l'enceinte aussi un quarré, on voit qu'il y a deux nombres ausquels on attribuë la proprieté d'estre quarrez. En ce cas on recherchera les moyens de faire chacun d'iceux separément; & pour cela on se servira des moyens cy-dessus déduits; puis on conferera les proprietez de chacun des nombres trouvez l'une avec l'autre, & l'on remarquera si celles de l'un peuvent compatir avec celles de l'autre, car si une des proprietez d'un des nombres détruisoit celles de l'autre, ou quelqu'une d'icelles, la question seroit impossible.

10°. Si en la recherche on a trouvé plusieurs nombres tels qu'il est requis, on remarquera leurs proprietez particulieres, qui les font distinguer d'avec les autres nombres, & qui soient communes à tous les nombres d'une mesme espece, en considerant si tout ce qui a ladite proprieté, a aussi l'autre proprieté qui estoit requise. Par éxemple, aprés avoir remarqué que les nombres premiers qui surpassent de l'unité un multiple de 4, sont la somme de deux quarrez, je regarderay si tous les nombres premiers qui sont la somme de deux quarrez, surpassent de l'unité un multiple de 4; & voyant que plusieurs desdits nombres de suite à commencer par le moindre & sans en obmettre aucun, ont cette condition, comme sont 5, 13, 17, 29, &c. je conclus que ladite proprieté convient à tous les autres premiers, qui surpassent de l'unité un multiple de 4.

Quelquefois aussi on trouve certaines exceptions ausquelles il faut avoir égard, & considerer tout ce qui doit estre compris dans lesdites exceptions, en remarquant leur origine & d'où elles proviennent.

Il faut remarquer que cette recherche ne sert principalement qu'aux questions possibles, qu'elle trouve ordinairement sans beaucoup de travail, ne se servant pour la pluspart d'autre démonstration que de la construction: au moins c'est-là son principal but. C'est pourquoy, le plus souvent aux questions impossibles elle donnera bien des voyes pour aller bien avant, & rechercher avec peu de travail jusqu'à des nombres fort grands, encore qu'on ne puisse pas arriver au but desiré, à cause de l'impossibilité de ce qui est proposé.

Il arrive aussi par fois, qu'en recherchant des voyes plus courtes & plus faciles, & voulant essayer tous les moyens de parvenir au but désiré, on trouve des contradictions & absurditez qui font voir l'impossibilité.

PREMIER EXEMPLE.

DEux quarrez estant donnez, trouver le triangle qui est formé desdits quarrez; par éxemple, 64 & 25 estant donnez, on demande le triangle.

Cette question suppose qu'on sçache que les triangles sont formez par le moyen de deux quarrez, dont la somme est l'hypotenuse, & partant par le premier précepte, je chercheray quelques-uns des premiers triangles dont je sçauray les quarrez, comme 3, 4, 5, qui est formé par les quarrez 4 & 1: j'essayeray donc à trouver lesdits 3, 4, 5, par le moyen de 4 & 1. Et premierement je voy que la somme de 4 & 1, est l'hypotenuse 5, & la difference des mesmes 4 & 1, est le costé im-

pair 3, reste donc à trouver le costé pair 4. Je voy bien que le produit de 4 par 1 donne 4, mais cela ne pourroit pas arriver aux autres quarrez, par ce que d'ordinaire le produit de deux nombres est plus grand que leur somme; & partant, si le costé pair estoit le produit des deux quarrez, il seroit presque toûjours plus grand que la somme, qui est l'hypotenuse: ce qui ne se peut.

Il faut donc former 4 par une autre voye: & puisque les quarrez ne le donnent pas facilement, j'auray recours à leurs racines 2 & 1, dont le produit est 2, le double duquel est 4.

Je considere maintenant si la mesme chose se fait & se trouve aux autres triangles.

Ainsi ayant 9 & 4, qui font le triangle 5, 12, 13, je voy que la somme desdits 9 & 4 est l'hypotenuse 13, & leur difference est le costé impair 5. Pour le costé pair je prens les racines desdits quarrez, qui sont 3 & 2, leur produit est 6, dont le double qui est 12, est le costé pair dudit triangle.

J'examineray encore la mesme chose aux triangles suivans 8, 15, 17, qui provient de 16, & 1, & à 20, 21, 29, qui est fait par 25 & 4; ce qui me donne à connoistre que cette regle convient à tous les triangles, puisqu'elle est propre à ceux que nous venons d'examiner, qui sont assez differens les uns des autres, sinon les deux premiers 3, 4, 5, & 5, 12, 13, qui se ressemblent en ce que le grand costé n'est different de l'hypotenuse que de l'unité.

Je viendray donc aux quarrez proposez 64 & 25; & leur appliquant ladite regle, je trouveray le triangle 39, 80, 89.

SECOND EXEMPLE.

Un quarré estant donné, trouver un autre quarré, qui estant joint avec le donné, fasse un troisiéme quarré.

On donne par exemple 64.

Je cherche deux quarrez, qui estant joints ensemble, fassent un quarré, comme sont 16 & 9, dont la somme est 25.

Puis je cherche quelque voye par le moyen de laquelle je trouve 9 avec 16; car icy il faut choisir le quarré pair 16, puisque le donné, sçavoir 64, est pair: ou si je ne puis trouver 9 facilement, je chercheray sa racine 3.

Si j'oste 1 de la racine de 16, sçavoir de 4, il restera 3, racine de 9: je regarde donc aux autres quarrez pairs si la mesme chose arrivera.

Je prens par exemple 36, dont la racine 6 estant diminuée d'1, reste 5; le quarré duquel, sçavoir 25, estant joint à 36, donne 61 qui n'est point quarré: ce qui me donne à connoistre que cette regle n'est pas la vraye, puisqu'elle n'est pas generale, quoy-qu'il pourroit arriver en d'autres questions, que certains quarrez n'auroient pas la proprieté requise. Mais je trouve icy que 36 estant joint au quarré 64, donne 100, qui est un quarré; & partant ledit 36 n'est pas exclus d'avoir ladite proprieté.

Je cherche donc quelque autre convenance de 9 à 16; & parce que 4 y estoit propre dans la premiere regle, je regarde si je ne pourray point tirer 4 de 16 autrement qu'en le considerant comme racine de 16.

Je voy que 4 est le quart de 16. Je le considereray donc en cette qualité, & par mesme moyen j'éprouveray la mesme chose au susdit 36 dont le quart est 9, duquel ostant 1, reste 8, dont le quarré 64 estant joint à 36, donne 100, qui est un quarré: ce qui me fait présumer que la regle est bonne, & on en pourra estre entierement asseûré en l'essayant sur d'autres quarrez.

Je prens donc le quart du quarré donné 64, qui est 16, dont osté 1, reste 15, le quarré duquel 225 estant joint à 64, donne 289 quarré de 17, qui surpasse ledit quart 16 de la mesme unité.

Mais je voy aussi que le mesme 64 estant joint à 36, fait un quarré; & partant afin que la regle soit plus parfaite, il sera bon de donner un moyen pour trouver tous les quarrez ausquels un quarré estant joint, donne un autre quarré. Je l'éprouve à 64, & ayant pris son quart 16, je cherche le moyen de trouver par iceluy la racine de 36 qui est 6. Ce 6 est la moitié moins 2 de 16: or pour avoir la moitié il faut diviser par 2; de sorte que ce 2 pourroit passer pour partie de 16, & dans cette considération on a pû aussi prendre l'unité quand on l'a osté de 16.

De mesme donc que j'ay pris la somme & la différence de 16 & 1, qui sont comme parties rélatives de 16 pour avoir 17 & 15, qui sont les racines des quarrez requis: de mesme aussi je prendray 2 & 8 pour parties rélatives du mesme 16, la somme & la différence desquelles est 10 & 6, dont les quarrez 100 & 36 sont tels qu'il est requis; car joignant 36 à 64, on a 100.

Je prendray garde par aprés si la mesme chose arrive aux autres quarrez qui ont plus de parties.

Je prens donc 144, & cherche les quarrez ausquels estant joint on peut avoir un quarré.

Son quart est 36. Les parties rélatives de 36 sont 1, 36.] 2, 18.] 3, 12.] & 4, 9: il n'y en a point d'autres, car 6 & 6 sont semblables; ce qui fait qu'ils n'ont point de différence dont on se puisse servir.

Je prens la somme & la différence de chaque couple desdites parties, & trouve 37, 35.] 20, 16] 15, 9.] & 13, 5. & partant 144 estant joint au quarré de 35, qui est 1225, fait 1369, quarré de 37.

Le mesme 144 estant joint à 256, quarré de 16, donne 400, quarré de 20.

144 avec 81, quarré de 9, donne 225, quarré de 15.

Et enfin 144 avec 25, quarré de 5, donne 169, quarré de 13.

Pour voir si 144 ne se peut joindre qu'à 4 quarrez pour faire un quarré, & 64 à 2 seulement; je considére que lors qu'un quarré estant joint à un autre quarré, fait un quarré, les racines de ces trois quarrez sont les costez d'un triangle. Je verray donc à combien de triangles la racine du quarré donné sert de costé; & je trouve que 8, racine de 64, ne sert de costé qu'à deux triangles; & 12, racine de 144, ne sert qu'à quatre. Puis donc que j'ay trouvé la mesme chose ausdits quarrez par l'éxamen des parties de leur quart, j'inféreray que la regle est bonne. Que si ces deux éxemples n'en donnent pas une entiere asseurance, on le pourra encore éprouver sur d'autres quarrez.

Mais si on ne sçavoit pas à combien de triangles un nombre donné sert de costé, il faudroit éxaminer lesdits quarrez d'une autre sorte, sçavoir en joignant le donné avec plusieurs quarrez, pour voir si la somme feroit un quarré; & pour y parvenir on se pourra servir des exclusions dont on a cy-devant parlé; & voicy comme on y procedera, prenant 144 pour éxemple.

Je considére premierement si cét éxamen a des bornes, ou si on peut éxaminer utilement lesdits quarrez à l'infini; & pour ce qu'il faut ajouster à 144 un quarré pour avoir un autre quarré, il s'ensuit que 144 doit estre la différence de deux quarrez.

Je considére donc quelle doit estre la différence de deux quarrez, & je trouve que les quarrez allant toûjours en augmentant, leurs différences augmentent aussi à mesure: de sorte que deux quarrez, dont les racines ont pareille différence que celles de deux autres quarrez, n'auront pas entre eux pareille différence; mais les quarrez les plus grands auront plus grande différence: ainsi 25 & 64, dont les racines 5 & 8 ont 3 pour différence, différent plus entre eux que 4 & 25, dont les racines 2 & 5 ont pareille différence qui est 3.

Puis donc que les différences augmentent toûjours, il s'ensuit que 144 a des bornes, & qu'il ne faut pas poursuivre l'éxamen que jusqu'à certains quarrez.

Or le quarré proposé estant pair, il ne peut pas estre différent de deux quarrez dont

dont les racines ne différent que de l'unité, parce que de ces deux quarrez, l'un estant pair & l'autre impair, la différence seroit impaire.

Mais dans les 4 couples de quarrez qu'on a trouvez ausquels 144 sert de différence, on a ceux de 35 & 37, qui sont les plus grands ausquels ledit 144 puisse servir de différence; car puisque lesdites racines doivent avoir au moins 2 de différence, si on prenoit deux autres nombres plus grands que 35 & 37, & qui eussent une pareille différence, il est certain que la différence de leurs quarrez seroit plus grande que celle des quarrez de 35 & 37, qui est 144.

Il faut donc à 144 ajouster tous les quarrez jusqu'à celuy de 35, & voir si quelques-unes des regles des exclusions auront icy lieu.

Et premierement celle qui exclut les multiples ne peut pas estre icy employée, puisque 144 peut aussi-bien estre la différence de deux quarrez composez entr'eux, que premiers entr'eux.

Mais on aura égard à la cinquiéme regle qui considere les finales, lesquelles dans les quarrez sont 1, 4, 5, 6, 9 & 0.

Si à 144 on ajouste un quarré finissant par 1, la somme finira par 5; mais 5 est toûjours précédé de 2 dans les quarrez, & partant il faudra que ledit 1 soit précédé de 8, afin que ce 8 estant joint à la pénultiéme lettre 4, on ait 2 pour pénultiéme; & partant si le quarré qu'on ajouste finit par 1, il doit au moins finir par 81.

4 estant joint a 4 donne 8, qui n'est point une finale quarrée, & partant on n'ajoustera point à 144 les quarrez qui finissent par 4.

Pareillement les quarrez qui finissent par 9, ne pourront estre ajoustez à 144, parce que la somme auroit 3 pour finale, qui partant ne seroit point quarrée.

Mais on poutra joindre à 144 les quarrez qui finiront par 5 & 0.

On y pourra joindre aussi les quarrez finissans par 6, pourveu qu'ils finissent par 56, afin que la somme ait 00 pour finale.

Cela posé, il ne faudra point ajouster à 144 les quarrez 1, 4, 9 & 16, pour les causes déduites, ni le quarré qui suit 144, sçavoir 169 dont la différence à 144 est 25.

Aprés 25 il faudra venir à 36, 49 & 64, qu'il faut laisser pour les mesmes causes cy-dessus déduites.

81 estant joint à 144 donne 225, quarré de 15.

100 estant joint à 144 donne 244, qui n'est point quarré.

121, 169, 196, doivent estre laissez à cause des finales.

225 joint à 144, donne 369, qui n'est point quarré.

256 joint à 144 donne 400, quarré de 20.

289, 324, 361, seront laissez à cause des finales.

400 & 144 donnent 544, qui n'est point quarré,

441, 484, 529, 576, 676, 729, 784, 841, 961, 1024 & 1089, seront aussi laissez à cause des finales.

625 joint à 144 donne 769, qui n'est point quarré.

900 joint à 144 donne 1044, qui n'est point quarré.

1156 joint à 144 donne 1300, qui n'est point quarré.

Enfin 1225, quarré de 35, joint à 144, donne 1369, quarré de 37. Nous n'avons donc que les 4 couples de quarrez cy-devant trouvez, ausquels 144 serve de différence.

Jusqu'icy on a examiné la question en supposant un quarré pair donné: mais qui voudra voir tout ce qui dépend de la question, doit considerer la methode de trouver la mesme chose, le quarré donné estant impair; par exemple, 81 estant donné, trouver un quarré qui estant joint avec iceluy fasse un autre quarré.

Je prens pour cét effet quelque quarré connu, comme 9, auquel je sçay qu'adjoustant 16 on a 25.

Je cherche donc un moyen pour trouver 16, ou sa racine 4 avec le quarré donné 9.

Je voy d'abord qu'ostant 1 de 9, & prenant la moitié du reste, on aura 4. Je considereray donc la mesme chose aux autres quarrez impairs.

Ainsi je trouve qu'ostant 1 de 25 reste 24, dont la moitié est 12, le quarré duquel 144 estant joint à 25, donne 169, quarré de 13.

La mesme chose arrivera aussi à 49 & à 81, car celuy-cy estant joint à 1600, quarré de 40, donne 1681 quarré de 41.

On pourra aussi considérer que les quarrez impairs dont la racine n'est pas un nombre premier, peuvent estre joints avec plusieurs quarrez pour faire un quarré.

Ainsi examinant 81 comme on a fait cy-devant 144, on trouvera qu'estant joint audit 144, il fera 225 quarré de 15.

Il faudra donc trouver une voye pour rencontrer 144, ou sa racine 12, par le moyen de 81.

Or puisque nous sçavons que les quarrez dont la racine est un nombre premier, ne peuvent estre joints qu'avec un seul quarré pour faire un quarré, comme on peut voir à 9, 25, 49, &c. & que ceux dont la racine est composée peuvent estre joints avec plusieurs, cela fait présumer que les parties desdits quarrez sont cause de cela; car 9, par exemple, ne peut estre fait par multiplication de nombres differens, que par 1 & 9; de mesme en est-il de 25 qui n'a que 1 & 25, & ainsi des autres. Mais 81 peut estre fait par 1 & 81, & par 3 & 27.

A cause de 1 & 81 on trouve le quarré de 40 & celuy de 41; car on voit qu'ostant 1 de 81 la moitié du reste est 40, de mesme ajoustant 1 à 81 la moitié de la somme est 41.

On agira donc de mesme aux autres parties de 81, sçavoir 3 & 27, prenant la moitié de leur somme & de leur différence. La somme est 30, la différence 24, la moitié desquelles est 15 & 12: on verra donc si ajoustant à 81 le quarré de 12 on aura celuy de 15, ce qui se trouve estre ainsi.

On éprouvera la mesme chose sur quelqu'autre quarré, dont la racine sera composée, comme fut 225 quarré de 15.

Les parties rélatives de 225 sont 1, 225,] 3, 75,] 5, 45, & 9, 25.

La moitié de la somme & de la différence desdites parties sont 113, 112,] 39, 36,] 25, 20,] & 17, 8.

Partant si on ajouste 225 au quarré de 112, on aura le quarré de 113.

225 joint au quarré de 36, donne celuy de 39.

225 estant joint au quarré de 20, donne celuy de 25.

Et enfin 225 avec le quarré de 8, donne celuy de 17.

TROISIÉME EXEMPLE.

UN nombre estant donné, déterminer s'il est hypotenuse de quelque triangle, & quels sont les deux costez dudit triangle.

Afin de donner facilement la solution de cette question, dans laquelle si l'on proposoit quelque nombre particulier, comme si on demandoit si 221 est hypotenuse; il faut voir si on pourra remarquer quelque sorte de nombres affectez particulierement aux hypotenuses; & pour y parvenir je me serviray du second précepte, puisque je ne sçay pas encore les propriétez particulieres des hypotenuses, & que ce sont elles qu'il faut chercher. Mais il faut sçavoir ce que c'est qu'une hypotenuse, & quel moyen on a d'en trouver quelqu'une.

Que la propriété suivante soit donnée.

Le quarré de l'hypotenuse d'un triangle rectangle vaut autant que les quarrez des deux autres costez du triangle.

Partant si l'on joint chaque quarré à chaque quarré, on aura les quarrez de toutes les hypotenuses, sçavoir quand la somme des deux quarrez viendra à estre quarrée.

Je cherche donc par le second précepte toutes les hypotenuses sans en obmettre aucune, commençant par la moindre, & pour y parvenir j'assemble tous les quarrez.

Mais de peur de s'embarasser, & pour n'obmettre aucune hypotenuse, je forme quelqu'ordre par le troisiéme précepte, par lequel je puisse poursuivre l'assemblage desdits quarrez aussi loin que je voudray, & tel aussi (autant que faire se pourra) qu'on puisse s'arrester où on voudra, sans que le travail qu'on aura commencé oblige à continuer bien avant, & aussi sans qu'on soit obligé (en cas qu'on voulust poursuivre la recherche plus avant) de reprendre ce qu'on auroit quitté. Ce qui se doit entendre, si cela se peut faire commodément.

†	4. 1	5.
	9. 1	10.
†	9. 4	13.
†	16. 1	17.
	16. 4	20.
†	16. 9	25. ℞ 5.
	25. 1	26.
†	25. 4	29.
	25. 9	34.
†	25. 16	41.
†	36. 1	37.
	36. 4	40.
	36. 9	45.
	36. 16	52.
†	36. 25	61.
	49. 1	50.
†	49. 4	53.
	49. 9	58.
†	49. 16	65.
	49. 25	74.
†	49. 36	85.
†	64. 1	65.
	64. 4	68.
†	64. 9	73.
	64. 16	80.
†	64. 25	89.
	64. 36	100. ℞ 10.
†	64. 49	113.
	81. 1	82.
†	81. 4	85.
	8r. 9	90.
†	81. 16	97.
	81. 25	106.
	81. 36	117.
	81. 49	130.
†	81. 64	145.

Par éxemple, si pour assembler lesdits quarrez on ajoustoit au premier quarré 1 tous les autres quarrez jusqu'à celuy de 200, & que par aprés on vint à les ajouster à 4, puis à 9, on s'obligeroit, pour avoir toutes les hypotenuses moindres, de parcourir presque tous les quarrez, & on entreprendroit un grand travail sans peut-estre en avoir besoin.

Au contraire, si aprés avoir assemblé tous lesdits quarrez l'un à l'autre, on vouloit pousser la recherche plus avant, il faudroit reprendre ce qu'on auroit laissé, car il faudroit recommencer à 1, & luy ajouster les quarrez plus grands que celuy de 200, ce qui apporteroit quelque desordre. Il vaudra donc mieux prendre un autre ordre, comme cy-aprés.

Je prens le quarré 4, & luy ajouste 1.

Puis je viens à 9, & luy ajouste tous les moindres, commençant à 1.

Puis je prens 16, & luy ajouste les quarrez moindres 1, 4, 9, & je mets la somme ensuite de chaque couple de quarrez, comme on voit icy. Et continuant en cette façon autant loin qu'on voudra, je remarque les couples dont la somme est quarrée, parce que la racine de ce quarré est l'hypotenuse d'un triangle.

Et par le moyen de cette addition on trouvera des hypotenuses, & aucune ne pourra estre obmise.

Mais parce que je voy qu'il arrive peu souvent que la somme soit un quarré, je considere s'il n'y a rien de superflu dans cette table.

Les nombres qu'on veut avoir doivent estre quarrez : je considereray donc quelque propriété du quarré, comme que tout quarré est pairement pair, ou pairement pair + 1.

Mais si on ajouste ensemble deux quarrez impairs, comme 9 & 1,] 25 & 9, la somme sera impairement paire; parce que les deux quarrez estant chacun un pairement pair + 1, les deux ensemble feront un pairement pair + 2, qui est un impairement pair.

De-là on conclura qu'il est superflu d'ajouster ensemble deux quarrez impairs, car leur somme estant impairement paire, ne peut pas estre quarrée.

Je considere aussi suivant le quatriéme précepte si les

quarrez composez entr'eux peuvent estre exclus, comme estant multiples d'autres couples de quarrez premiers entr'eux.

Je trouve que les triangles estant multipliez par quelque nombre que ce soit, donnent toûjours d'autres triangles, car la proportion des costez ne change point ; & si deux quarrez estant joints ensemble font un quarré, si on multiplie lesdits quarrez par quelque quarré, il est certain que la somme de ces multiples sera encore un quarré, qui sera mesuré par le mesme quarré qui aura multiplié les deux autres.

Il faudra donc retrancher de la table les quarrez qui sont de mesme ordre, & ceux qui ont une commune mesure.

Reste donc de poursuivre la table, en joignant les quarrez premiers entr'eux, & de divers ordres, lesquels aussi je marqueray en la table précédente, afin de les distinguer des autres.

100.	1	101.
100.	9	109.
100.	49	149.
100.	81	181.
121.	4	125.
121.	16	137.
121.	36	157.
121.	64	185.
121.	100	221.
144.	1	145.
144.	25	169. ℞ 13.
144.	49	193.
144.	121	265.
169.	4	173.
169.	16	185.
169.	36	205.
169.	64	233.
169.	100	269.
169.	144	313.
196.	1	197.
196.	9	205.
196.	25	221.
196.	81	277.
196.	121	317.
196.	169	365.
225.	4	229.
225.	16	241.
225.	64	289. ℞ 17.
225.	196	421.
256.	1	257.
256.	9	265.
256.	25	281.
256.	49	305.
256.	81	337.
256.	121	377.
256.	169	425.
256.	225	481.

On pourroit par aprés avoir égard aux finales, ainsi qu'il est montré au cinquiéme précepte ; car on voit que dans cette seconde table, quoy-qu'il y ait déja un grand racourcissement ; néanmoins si on vouloit oster toutes les finales inutiles, il y en auroit encore un beaucoup plus grand.

On pourroit ensuite considérer quelque propriéte des quarrez, comme que ceux qui ne sont point mesurez par 3, surpassent de l'unité un multiple de 3. Mais parce qu'on a déja exclu les quarrez qui ont une commune mesure, il s'ensuit qu'il n'y aura aucune des sommes susdites qui soit mesurée par 3 ; car pour estre telle il faudroit que chacun des quarrez fust multiple de 3, puisque les quarrez sont ou multiples de 3, ou multiples de 3 + 1 ; partant si chacun des quarrez surpasse de l'unité un multiple de 3, la somme sera multiple de 3 + 2, ou multiple de 3 − 1, & partant elle ne pourra pas estre quarrée.

Il faudra donc que des deux quarrez qu'on ajouste, l'un soit multiple de 3, & l'autre multiple de 3 + 1, ce qui exclut encore beaucoup d'additions.

Mais avant que de continuer ladite table suivant les régles desdites exclusions, il faut voir si les sommes quarrées qu'on a trouvées ne pourront rien apprendre touchant ce qui est proposé, & si on ne pourra point trouver quelque propriété desdites hypotenuses, outre celle en vertu de laquelle on les a trouvées jusques icy.

Je trouve icy 25, 100, 169, & 289, qui entre lesdites sommes sont quarrées ; mais 100 est du nombre de celles qui ont esté rejettées, parce qu'il provient de deux quarrez qui ont une commune mesure.

Les racines de ces nombres, sçavoir 5, 10, 13, 17, seront donc hypotenuses de triangles rectangles dont les deux autres costez seront les racines des quarrez qu'on a assemblez pour avoir lesdits quarrez 25, 100, 169, 289.

Ainsi 25 estant la somme des quarrez 16 & 9, les racines des trois quarrez 25, 16, 9, qui sont 5, 4, 3, seront les costez d'un triangle rectangle.

Mais en considérant ma premiére table, je voy qu'elle contient lesdits nombres 5, 10, 13, 17, que j'ay trouvé estre hypotenuses, & qu'ils sont de suite dans la colomne où sont les sommes des quarrez ; car 4 & 1 donnent 5, 9 & 1 donnent

donnent 10] 9 & 4 donnent 13] & 17 vient de 16 & 1 : il se pourroit donc faire que non seulement les quarrez des hypotenuses sont la somme de deux quarrez, mais aussi que les hypotenuses mesmes sont pareillement la somme de deux quarrez, ce qu'il faut examiner.

Je voy déja que 5, 13 & 17, sont hypotenuses ; & de plus j'ay dans la table plusieurs multiples desdits 5, 13 & 17, qui sont pareillement hypotenuses, comme 10, 2[illegible] 4[illegible], 45, 26, 34, &c. & qui sont aussi la somme de deux quarrez.

Il faut donc voir si les autres nombres premiers de la table sont pareillement hypotenuses, sçavoir 29, 41, 37, 61, &c.

Mais parce qu'il seroit trop long d'examiner si les quarrez desdits nombres sont la somme de deux quarrez, je cherche quelqu'autre voye qui n'oblige point de considerer lesdits quarrez.

Cette voye sera de satisfaire à la seconde partie de la question, sçavoir de donner les deux autres costez du triangle, ce qui se trouvera par la premiere regle, puisqu'on a les quarrez dont l'hypotenuse est la somme, & qu'on sçait les costez de quelques triangles, sçavoir de ceux dont 5, 13 & 17 sont hypotenuses. Car par la table susdite on voit que 5 est hypotenuse, & que 3 & 4 sont les costez, parce que 25 quarré de 5, est la somme de 9 & 16, quarrez de 3 & 4 ; de mesme on trouvera que 5 & 12 sont les costez du triangle dont 13 est hypotenuse, & que 8 & 15 sont les costez du triangle 8, 15, 17.

Cela supposé on requiert une voye ou regle par laquelle on puisse trouver lesdits costez, sçachant seulement l'hypotenuse & les deux quarrez dont elle est la somme.

Cette regle se trouvera par le premier éxemple qui a esté donné cy-devant ; & l'appliquant à tous les nombres de la table, je trouve les costez des triangles dont ils sont hypotenuses. Par éxemple, 29 est la somme de 25 & 4, la difference desdits quarrez qui est 21 est le costé impair ; si donc 29 est hypotenuse, & 21 l'un des costez de son triangle, il faudra que le quarré de 21 estant osté de celuy de 29, il reste un quarré dont la racine soit l'autre costé du triangle. J'oste donc 441 quarré de 21, de 841 quarré de 29, reste 400 quarré de 20, qui est l'autre costé, & partant 29 est hypotenuse. La mesme chose se pourra éxaminer aux autres hypotenuses suivantes, & mesme aussi aux multiples ; car si en les prenant de suite & sans aucun choix, on trouve la mesme chose à toutes, je conclus que ladite regle est générale, sçavoir que la somme de deux quarrez inégaux est l'hypotenuse d'un triangle rectangle, dont les costez sont tels nombres qu'on voudra.

Mais il ne faut pas se contenter de cela, car il faut éxaminer la converse, sçavoir si toute hypotenuse est la somme de deux quarrez.

J'ay icy de deux sortes d'hypotenuses, sçavoir de primitives, qui sont nombres premiers, ou au moins qui servent à des triangles dont les costez n'ont point de commune mesure, & d'autres qui sont multiples d'autres hypotenuses primitives, & dont les costez ne sont pas premiers entr'eux, mais qui se peuvent mesurer par un mesme nombre.

Pour ce qui est des hypotenuses primitives, je voy icy plusieurs nombres qui servent d'hypotenuse à des triangles fort différens, comme 3, 4, 5,] 8, 15, 17,] 20, 21, 29,] 28, 45, 53, &c. qui sont tous la somme de deux quarrez ; partant il n'y a aucune apparence qu'il y ait d'autres nombres premiers qui soient hypotenuses, & qui ne soient point la somme de deux quarrez ; car les uns ne peuvent pas avoir plustost cette proprieté que les autres, puisqu'elle se trouve en plusieurs triangles fort différens. Que si on s'en vouloit asseurer davantage, il faudroit éxaminer quelques-uns des autres nombres premiers en les prenant de suite, comme 7, 11, 19, 23, & voir si leurs quarrez sont la somme de deux quarrez ; ce qui se pourra faire, en ostant, par éxemple, de 529 quarré de 23, les quarrez qui sont moindres, & considérant si le reste sera quarré, en se servant pour cét

effet des finales des quarrez. Mais on trouvera toûjours que les nombres premiers qui ne sont point la somme de deux quarrez, ont un quarré qui n'est point aussi la somme de deux quarrez: ainsi parce que [illegible]3 n'est point la somme de deux quarrez, son quarré 529 ne la sera pas aussi.

Reste donc à examiner les multiples, & pour cet effet je prens quelque hypotenuse primitive, comme 5, & je la multiplie par plusieurs nombres pris de suite sans aucun choix, & sans en ubmettre aucun, comme par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c. & j'auray 10, 15, 20, 25, 30, [illegible] 40, 45, &c. lesquels derniers nombres sont de necessité hypotenuses, puisqu'ils sont multiples de 5, car on a trouvé qu'en multipliant un triangle par quelque nombre que ce fust, on a encore un triangle dont les costez ont entr'eux mesme proportion.

Je regarde par aprés en la premiere table où sont les [illegible] de tous les quarrez, tant ceux qui sont premiers entr'eux, que ceux qui ont une commune mesure, & tant ceux de mesme ordre, que de divers ordres.

En cette table je trouve bien quelques-uns desdits nombres, comme 1[illegible], 2[illegible], 25, 40, 45, mais je n'y trouve pas les autres, sçavoir 15, 30, 35, d'où je conclus que toute hypotenuse n'est pas la somme de deux quarrez. Et considerant quelle difference il peut y avoir entre les hypotenuses qui sont la somme de deux quarrez & celles qui ne le sont pas, je trouve que les premieres sont ou bien multiples d'une hypotenuse par un quarré comme [illegible] & 45, ou par un double quarré comme [illegible] & 4[illegible] ou qu'elles ne peuvent estre mesurées que par des hypotenuses comme 25, & passant outre en ladite table, on trouveroit encore 50, 6[illegible] & 85: mais ces trois dernieres ont encore cela de particulier, qu'en vertu des quarrez dont elles sont la somme, elles servent d'hypotenuse à des triangles primitifs.

Les autres hypotenuses qui ne se trouvent point dans ladite table, & partant qui ne sont point la somme de deux quarrez, comme 15, 3[illegible], 35, [illegible] sont multiples d'hypotenuses par des nombres qui ne sont ni quarrez, ni doubles quarrez, ni hypotenuses, car les trois premieres sont multiples de 5, par 3, 6 & 7.

Mais il faut voir si on ne pourra point découvrir quelqu'autre proprieté des hypotenuses; & pour y parvenir, je considere les seules hypotenuses primitives, laissant-là les multiples qui n'ont autre chose que ce qu'elles empruntent de leurs primitives, dont voicy quelques-unes.

5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 6[illegible], [illegible], 85, 89, 97, 101, [illegible]09.

Je voy premierement que tous les nombres premiers ne sont pas en ce rang, & qu'il y a aussi des nombres composez meslez parmi, mais non pas tous, car on n'y trouve point 21, 49, & autres.

Afin donc de débrouiller un peu ces nombres, je les separe en premiers & composez, & je regarde quelles sont les parties des composez, 2[illegible] est le quarré de 5, 65 a pour parties 5 & 13,] & 85 a 5 & 17.

Je considere que lesdits nombres [illegible] 13 & 17 sont compris entre les nombres premiers qui sont hypotenuses, d'où je conclus que les nombres composez de seules hypotenuses sont aussi hypotenuses primitives, de mesme que les nombres premiers dont ils sont composez.

Reste donc à considerer les nombres premiers susdits, 5, 13, 17. Je regarde aussi quels sont les autres nombres premiers qui ne se trouvent point en ma liste. Ces nombres sont 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, &c. je compare les uns avec les autres pour voir si les premiers n'ont point quelque proprieté qui ne [illegible] point aux derniers, & je trouve que les hypotenuses, sçavoir 5, 1[illegible], & [illegible] surpassent toutes de l'unité un multiple de 4, & que les derniers [illegible], 11, &c. sont tous moindres de l'unité qu'un multiple de 4, d'où on tirera [illegible] [illegible].

Tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est hypotenuse, & tout nombre premier qui est hypotenuse, surpasse de l'unité un multiple de 4.

P[illegible] pro[illegible] il fera fa[illegible]e de réfoudr[illegible] le probleme, en divifant le nombre donné en fes parties s'il en a, & voyant fi quelqu'une d'icelles eft un nombre premier qui furpaffe de l'unité un multiple de 4.

[illegible] fuppo[illegible] que toute hypotenufe primitive eft la fomme de deux quarrez de [illegible]ers ordre, la con[illegible]equ[illegible]nce eft bien fa[illegible]le a tirer, que cette hypotenu[illegible] fur[illegible] de l'un[illegible]e un multiple de 4; car tout qua[illegible]é impair furpaffe de l'unité un multiple de 4, [illegible]il n'eft pas befoin d'en excepter 1 [illegible] & partant un quarré impair [illegible] avec un pair, (qui eft toujours pairement pair) fera un pairement pa[illegible]r [illegible] 1

P[illegible]ur ce qu[illegible] eft de trouver le triangle, on verra par ce qui a efté dit fi le nombr[illegible] donn[illegible] eft [illegible] fomme de d[illegible]x quarrez, & on [illegible]herchera quels font lefdits quar[illegible] d[illegible] le quarré prochainement moindre, & puis le fuivant; & [illegible]ant a [illegible] e qu[illegible] eft[illegible] quarré, ce qui eft deduit ai leurs pl[illegible] au long, & [illegible] ux quarrez dont le nombre eft la fomme, on aura le triangle comme [illegible]

La p[illegible]dente p[illegible] roit pû eftre conduite d'une autre forte, car pu[illegible] il [illegible] que de[illegible] en[illegible]ble f[illegible]ffent un quarré, je prendray tous les quarrez [illegible]un [illegible]re, & verray par le fecond exemple quel quarré il [illegible]y faut adjoufter pour fai[illegible]e un autre quarré; car par ce moyen on auroit promptement l[illegible] qu[illegible] de toute[illegible] les hypotenufes, tant primitives que multiples [illegible] auc[illegible] [illegible] de n'avoir point deux fois les mefmes nombres, il [illegible] faudra remarquer [illegible]ez qui f[illegible]t moindres que celuy qu'on examinera.

Par exemple ay[illegible] 16 [illegible] quart eft 4; les parties rélatives de 4 font [illegible] & 4; leur diff[illegible]ce eft [illegible] qui [illegible] m[illegible] q[illegible] 4 moindre de 16; & partant je retiendray le quarr[illegible] 9, qui eftant joint a 1[illegible] donne 25, quarré de l'hypotenufe 5.

QUATRIEME EXEMPLE.

UN n[illegible]e comp[illegible] eftant donné avec les parties premiéres & analogiques, determiner a combie[illegible] il fer[illegible] d'hypotenufe.

[illegible] le n[illegible]mb[illegible]e eft [illegible]mpofé il fervi[illegible] d'hypotenufe à quelques triangles mu[illegible]ple[illegible]; & s[illegible] eft compofé d[illegible] feul[illegible] [illegible]tenufes, il fervira auffi à des triangle[illegible] [illegible]mitifs: ma[illegible] p[illegible]ce que les m[illegible] provie[illegible]ent néceffairement de pri[illegible]m[illegible]s, [illegible] arreftera pr[illegible] a[illegible]x [illegible] primi[illegible].

J[illegible] t[illegible]uve da[illegible] m[illegible] table [illegible] nombres compofez, comme 25, 65, 85, & j[illegible] t[illegible]e que 25 ne [illegible]t qu'a un feul triangle primitif, non plus que les nombres pr[illegible]rs mais 65 & 85 [illegible]rvent chacu[illegible] deux triangles primitifs.

Il fau[illegible] donc qu'il y ait qu[illegible]lque reff[illegible]ance [illegible] 25 & les nombres pre[illegible] pas entr[illegible] 5 ou 85, & [illegible]ces nombres premiers.

J[illegible] r[illegible]uv[illegible] que 25 ne peut [illegible]ftre mef[illegible] que par un feul nombre premier, non plus [illegible]e l[illegible] nombres premiers mais 65 & 85 fe mefurent chacun par deux no[illegible]-la par 5 & 13, & celuy-c[illegible] par [illegible] & 17

E[illegible] enfuivra que les pu[illegible]ances des nombres premiers ne ferviront d'hypo[illegible]ufe qu'à un feul triangle primitif. Je [illegible]examine à 125 & 6[illegible] puiffances de 5, & je le[illegible]ouve ainfi, car chacun defdits nombres n'eft qu'une feule fois la fomme de [illegible] c[illegible]x d[illegible] je[illegible]clus la [illegible]c[illegible]té dudit théo[illegible]

Ma[illegible] nombres [illegible] [illegible]rent par deux nombres premiers differens, (comme 65 qu[illegible] e[illegible] 13) [illegible]r d'hypotenufe à deux triangles primitifs, puifqu'il[illegible] [illegible] d[illegible]ux quarr[illegible]z premiers ent[illegible] eux.

De-là [illegible] s[illegible] une h[illegible]pot[illegible] par un n[illegible]bre qui la mefure, le produ[illegible] ne ferv[illegible] pas d[illegible]enufe a plus de triangles pr[illegible]tifs : par

exemple, [illegible] 5 ne doit servir d'hypotenuse primitive qu'à deux [illegible] que 65: car encore que [illegible] 5 soit mesuré par 5 & 25 [illegible] & [illegible] 5 par 5 [illegible] moins l'un & l'autre n'est mesuré que par les deux nombres premiers 5 & 13, joint que les quarrez & les autres puissances qui ont un nombre premier pour racine ne servent d'hypotenuse qu'à un seul triangle [illegible].

Cette remarque sera confirmée par l'examen qu'on sera de 325, par lequel on trouvera qu'il n'est que deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux, & partant ne sert d'hypotenuse qu'à deux triangles primitifs.

Je compose par aprés un nombre de trois [illegible] premiers, & pour plus de facilité je prens les moindres, sçavoir 5, 1[illegible]

Leur produit est 1105, je regarde combien de fois il est la somme de deux quarrez premiers entr'eux, ce qui se fera ostant de [illegible] le quarré prochainement moindre, sçavoir 1089, le reste sera 16 qui est un quarré, & partant [illegible] est la somme des deux quarrez 1089 & 16.

J'oste par aprés du mesme 11[illegible] l'autre quarré précédent, sçavoir 1024, reste 81 qui est encore un quarré, & ainsi continuant [illegible] que 11[illegible] est quatre fois la somme de deux quarrez [illegible] je [illegible] qu'il [illegible] pot[illegible] à quatre triangles primitifs.

On pourroit trouver lesdits quarrez d'une autre sorte, sçavoir [illegible] ostant le premier quarré 1089, & au reste 16 ajoustant 65 qui est la somme des [illegible] & [illegible] 2, racines dudit 1089, & du quarré prochainement moindre.

Et à la somme 81 ajoustant 63 qui est la somme des deux racines moindres chacune de l'unité que les précedentes, & ainsi continuant tant que ladite somme sera moindre que le reste, ce qui arrive à la derniere somme 529, qui estant ostée de 11[illegible] 5 [illegible] 5-63 car si on passoit outre, la somme seroit plus grande que le reste.	16 65 81 63 144. 61	4. 9. 12.
Autant de fois qu'on a un quarré pour ladite somme [illegible] nant [illegible] le premier nombre trouvé 16, autant de fois le [illegible] est la somme de deux quarrez: mais il faut [illegible] gardes [illegible] sont tous premiers entr'eux, ce qui [illegible] aucun d'eux ne se mesure par quelqu'une des parties du nombre, qui sont 5, [illegible], 17: mais on a parlé de cecy ailleurs.	2[illegible]5 59 264	
Je voy donc qu'un nombre qui ne [illegible] que par un seul nombre premier, ne sert d'hypotenuse primitive qu'à un seul triangle. S'il [illegible] par deux nombres premiers, il sert à deux triangles. S'il se mesure par trois nombres premiers, il sert à quatre triangles.	57 321 55	
Il faut donc voir quel rapport 1, 2, 4, a avec 1, 2, 3.	3[illegible]6	
Je voy que 1, 2, 3, se suivent en l'ordre des nombres, & 1, 2, 4, se suivent en l'analogie de 2, partant il faudroit que le nombre qui auroit quatre nombres premiers fust huit fois hypotenuse, & celuy qui en auroit cinq fust seize fois hypotenuse, car de mesme que 4 [illegible] troisiéme nombre de l'analogie de 2, & partant a rapport à 3, de mesme 8 est le quatriéme, & 16 le cinquiéme.	5[illegible] 4[illegible]9 51 48[illegible] 49	
Pour s'asseurer davantage de cette verité, il faut rechercher [illegible] la raison ou convenance qu'on peut apporter de cette proportion.	529.	2[illegible].

Puisque les nombres composez servent à plus de triangles que les [illegible] il faut que cette augmentation provienne de [illegible] parties [illegible] premieres entr'elles, autrement les puissances [illegible] que [illegible] racines.

Cela ne provient donc pas [illegible] de [illegible] parties, mais des parties premieres seulement [illegible] ses simplement selon leur mul[illegible] égale à la multitude desdites [illegible]

Reste donc à considérer lesdites parties en tant qu'elles composent le nombre : il les faut donc prendre deux à deux, en telle sorte toutefois qu'elles soient premières entr'elles, car autrement elles ne donneroient pas des quarrez premiers entr'eux ; & parce qu'ayant pris une des parties, si on veut faire le nombre, l'autre partie vient nécessairement en suite, on nommera ces parties rélatives ; par éxemple, si le nombre est 1105, dont les parties premiéres sont 5, 13, 17, quand on prendra 5 pour une des parties, on prendra 13 & 17, (c'est-à-dire le produit de 13 par 17) pour la partie rélative audit 5.

Il faut donc voir en combien de façons on peut faire chaque nombre par deux parties rélatives premiéres entr'elles.

Et premiérement les nombres premiers, & leurs puissances ne peuvent estre faits que d'une sorte, sçavoir en prenant l'unité pour une des parties, & le nombre entier pour l'autre ; ainsi 5 ne peut estre fait que par 1 & 5. La mesme chose arrive aux puissances, car 125 cube de 5 ne peut aussi estre fait que d'une façon, sçavoir par 1 & 125, car si on prenoit 5 & 25, les parties ne seroient pas premiéres entr'elles ainsi qu'il est requis.

Les nombres qui sont mesurez par deux nombres premiers comme 65, qui a 5 & 13 pour parties, peuvent estre faits en deux façons, sçavoir en prenant 1 d'un costé & le produit de 5 & 13 de l'autre, & en prenant 5 d'un costé & 13 de l'autre pour la seconde façon.

Le nombre qui a trois parties, comme 1105 qui a 5, 13, 17, se fait en quatre façons ; sçavoir 1 par 5, 13 & 17,] 5 par 13 & 17,] 13 par 5 & 17,] 17 par 5 & 13.

Si le nombre avoit quatre parties premiéres, comme 32045, qui a 5, 13, 17, 29, il se feroit en huit façons. On prendra 1 d'un costé, par 5, 13, 17 & 29, ou le nombre entier, puis 5 par 13, 17 & 29,] 13 par 5, 17 & 29,] 17 par 5, 13 & 29,] 29 par 5, 13 & 17,] 5 & 13 par 17 & 29,] 5 & 17 par 13 & 29,] 5 par 29, 13 & 17, qui font en tout huit façons de faire le nombre donné.

De la mesme maniere on trouvera seize façons avec cinq parties, & trente-deux façons avec six, &c.

Ayant ainsi trouvé les primitifs, on viendra aux multiples, & pour les trouver il faudra compter les primitifs de chacune des parties : ainsi ayant 65 dont les parties sont 5 & 13, chacune desdites parties sert à un primitif, & partant 65 servira à deux multiples, & en tout à quatre triangles.

Si on donnoit 325 dont les parties sont 25, 13, de ces deux il faut faire toutes les autres, commençant par celles qui n'ont qu'une partie, & prenant aussi leurs puissances, puis celles qui ont deux parties ; & ainsi on aura 5, 25, 13 & 65, ou 5 par 13, les trois premieres donnent chacune un triangle, & la derniere qui a deux nombres différens en donne deux, & partant ledit 325 aura cinq multiples, qui avec les deux primitifs font en tout sept triangles.

Ayant ces quantitez je chercheray les moyens de trouver les autres sans avoir la peine de les compter ; & voici comment on raisonnera pour cét effet.

La multitude des triangles ausquels un nombre sert d'hypotenuse n'augmente pas pour la grandeur des parties, mais seulement pour leur multitude ; par éxemple, le nombre qui sera fait de 13 & 17, n'aura pas plus de triangles que celuy qui proviendra de 5 & 13, car l'un & l'autre n'a que deux nombres premiers : mais si on prenoit 325, qui est fait de 25 & 13, il aura plus de parties, & partant plus de triangles que 65, qui n'a que 5 & 13 comme on vient d'éxaminer ; & partant cette multitude de parties vient ou de la grandeur des puissances, ou de la multitude des parties premieres & de leurs puissances.

Il faudra donc dans l'éxamen prendre seulement le nombre qui dénote la puissance, sans se soucier de quel nombre il est puissance, puisque sa quantité n'y fait rien.

Ayant donc trouvé que le produit de 5 par 13 a quatre triangles, je cherche les

exposans desdites parties premieres, ou de leurs puissances ; & je trouve 1 & 1 : je chercheray donc un moyen de rencontrer 4 par le moyen de 1 & 1.

Si je double chacun des exposans 1 & 1, j'auray 2 & 2, dont la somme sera 4, qui est le nombre requis.

Il faut donc voir quelqu'autre éxemple, pour voir si la mesme chose arrivera.

325 a pour parties premieres & analogiques 25 & 13, & sert d'hypotenuse à sept triangles.

Les exposans desdites parties sont 2 & 1, il est manifeste que le double d'iceux, sçavoir 4 & 2 estant joints ne feront pas un nombre impair tel qu'est 7, & partant la régle premiérement trouvée n'est pas bonne. Il faudra donc chercher un autre rapport entre 1, 1 & 4.

Je trouve que le double du produit de 1 par 1, estant joint aux mesmes 1 & 1, donne 4.

La mesme chose se fera en cherchant 7 par le moyen de 2 & 1, car le double du produit est 4, qui estant joint à 2 & 1 donne 7.

J'éprouveray encore cette régle sur d'autres nombres, & je trouve qu'elle convient à tous.

Mais si le nombre se mesuroit par plusieurs nombres premiers, & qu'il y en eust plus de deux, cela pourroit apporter quelque difficulté ; par éxemple, si on donnoit 1105 qui se mesure par 5, 13, 17, & qui a 1, 1, 1, pour exposant de ses parties ; il faut par le moyen d'iceux trouver 13, car il sert d'hypotenuse à treize triangles.

Si on prenoit le double du produit des trois exposans, & qu'on luy ajoustast les trois exposans, on n'auroit que 9 ; ce n'est donc pas la régle qu'il faut suivre.

Je prendray donc les exposans deux à deux, & premiérement avec 1 & 1 je trouveray 4. Je retiendray ce 4 comme s'il estoit exposant, & le compareray avec le 1 qui reste.

Le double du produit de 1 & 4 est 8, auquel joignant les mesmes 1 & 4, on aura 13 comme il est requis.

Pour s'assurer davantage de cette régle, on prendra quelque grand nombre, comme le produit du cube de 5 par le quarré de 13 & par 17.

Les exposans desdites parties sont 1, 2, 3.

Je prens le double du produit de 1 & 2, & luy ajouste les mesmes 1 & 2 pour avoir 7.

Puis je prens le double du produit dudit 7 par 3 qui reste, & luy ajouste les mesmes 7 & 3 pour avoir 52.

Je dis donc que le nombre donné sert d'hypotenuse à cinquante-deux triangles.

Je chercheray par une autre voye si ledit nombre a cinquante-deux triangles, sçavoir en comptant toutes ses parties, & les triangles primitifs qui appartiennent à chacune.

A.	1	b. q. par C. cub.
B.	1	a. par b. par C. cub.
B. q.	1	a. par C. cub.
C.	1	a. par b. q. par c. q.
C. q.	1	a. par b. q. par C.
C. cub.	1	a. par b. q.
A. par B.	2	b. par C. cub.
A. par B. q.	2	C. cub.
A. par C.	2	b. q. par C. q.
A. par C. q.	2	b. q. par C.
A. par C. cub.	2	b. q.
B. par C.	2	a. par b. par C. q.
B. par C. q.	2	a. par b. par C.
B. par C. cub.	2	a. par b.
B. q. par C.	2	a. par C. q.
B. q. par C. q.	2	a. par C.
B. q. par C. cub.	2	a.
A. par B. par C.	4	b. par C. q.
A. par B. par C. q.	4	b. par C.
A. par B. par C. cub.	4	b.
A. par B. q. par C.	4	C. q.
A. par B. q. par C. q.	4	C.
A. par B. q. par C. cub.	4	o. primitifs.

Somme 52.

Pour faire cela plus aisément on prendra seulement les puissances, puisque la diversité des nombres premiers n'y fait rien.

Je pose donc que le nombre soit A. par B. q. par C. cub.

Je considere lesdites parties en toutes les façons possibles, prenant premiérement celles qui ne servent qu'à un seul triangle primitif, sçavoir celles où il n'y a qu'une seule puissance ou racine ; puis celles qui seront faites de deux différentes puissances, & qui servent à deux triangles ; & enfin celles qui contiennent trois puissances, & qui servent à quatre triangles comme on voit cy-dessus.

Les parties sont premiérement en grosses lettres, puis ensuite la multitude des triangles primitifs de ladite partie. Et derriere en petites lettres est la partie relative, qui est le nombre de multiplicité, sçavoir le nombre par lequel le triangle est multiple. Par exemple A. par C. q. sert à deux triangles primitifs, lesquels seront multipliez par b. q. par C. Et supposant que C. cub. soit 125, que B. q. soit 169, & que A. soit 17, on aura 425. Pour A. par C. q. qui servira d'hypotenuse à deux triangles qu'il faudra multiplier par 845, qui est b. q. par C.

CINQUIÉME EXEMPLE.

UN nombre estant donné, déterminer combien de fois il est la somme de deux quarrez.

Il faut premiérement voir si on ne trouvera point quelque propriété particuliere aux nombres qui sont la somme de deux quarrez, afin qu'on puisse connoistre plus facilement si le nombre est la somme de deux quarrez.

Si on n'avoit rien de connu, & qu'on ne sceust point que la somme de deux quarrez inégaux est une hypotenuse, il faudroit assembler les quarrez, & faire une table des sommes, comme on voit au troisiéme exemple.

Cela fait, je considére plusieurs desdites sommes prises de suite, comme 5, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, 34, 41, 37, 40, 45, 52, 61, 50, 53, &c. & je regarde si elles n'ont rien de semblable entr'elles que les autres nombres n'ayent point.

Et parce que je voy diverses sortes de nombres, je les sépare par classes selon leurs diversitez.

Et premiérement, je trouve des nombres pairs & des impairs, des nombres premiers & des composez, des impairs premiers & des composez, des pairs dont les uns sont pairement pairs, & les autres impairement pairs.

Je considére premiérement les nombres premiers comme les plus simples, & je trouve 5, 13, 17, 29, 37, 41, 61, 53.

Je regarde quels sont les autres nombres premiers non compris en cette table, & j'auray 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59 ; j'examine s'il y a quelque différence entr'eux, & si les précédens ont quelque chose qui soit commune à tous, & qui ne convienne à aucun des derniers.

Je trouve que 5, 13, 17, & les autres qui sont la somme de deux quarrez, surpassent de l'unité un multiple de 4, ou bien qu'ils sont pairement pairs +1, & les autres nombres, sçavoir 3, 7, 11, &c. sont tous pairement pairs − 1.

Voilà pour ce qui est des nombres premiers.

Quant aux composez, puis qu'ils sont de diverses sortes, il faut voir d'où peut provenir cette diversité, & si ce ne seroit point de la difference façon d'assembler les quarrez.

Et sur cét assemblage, je trouve que les nombres premiers sont tous faits de deux quarrez premiers entr'eux & de divers ordre.

Et que si on assemble deux quarrez impairs premiers entr'eux, on aura pour la somme un impairement pair, qui sera double d'un des nombres cy-dessus pairement pair +1.

Et par les autres assemblages on trouvera les autres sommes composées.

Il faudra paraprés considérer les parties de ces nombres composez, & je trouve de deux sortes de compositions; car les uns n'ont point d'autres parties que des nombres premiers pairement pairs + 1, ou leurs puissances, comme 25, 65, 85. Les autres ont pour parties lesdits nombres premiers, & d'autres qui sont pairement pairs — 1, ou qui sont de l'analogie de 2. Et considérant ces autres nombres qui ne sont point la somme de deux quarrez, je trouve qu'ils sont tous ou quarrez, ou doubles quarrez; par exemple, 10 a pour parties 2 & 5, desquels 5 est la somme de deux quarrez, & 2 est double quarré.

20 a pour parties 4 & 5, desquelles 4 est un quarré.

45 a pour parties 9 & 5, desquelles 9 est quarré.

De là je concluray que tout nombre premier pairement pair + 1, est la somme de deux quarrez; & que lesdits nombres premiers estant multipliez par un quarré, ou par un double quarré, donnent des nombres qui sont aussi sommes de deux quarrez.

Il faut maintenant considérer s'il peut y avoir des nombres qui soient plusieurs fois la somme de deux quarrez.

On voit par la table que lesdits nombres premiers ne sont qu'une fois chacun la somme de deux quarrez.

Pour les nombres composez nous en avons remarqué de deux sortes, dont les uns sont multiples d'un nombre, qui est la somme de deux quarrez par un qui ne l'est point, comme 45 qui est multiple de 5 par 9, quand on ne verroit point par la table qu'il n'est point plus de fois la somme de deux quarrez que son primitif; la raison montre assez que 45, par exemple, dont les parties premieres & analogiques sont 5 & 9, ne peut pas avoir plus de compositions que son primitif 5, car puisque de ses deux parties 5 & 9, l'une sçavoir 5 est la somme de deux quarrez, & l'autre qui est 9 ne l'est point, il est certain que ledit 9 ne luy pourra communiquer ce qu'il n'a point; mais seulement parce qu'il est quarré, il n'empeschera point que la propriété de 5 ne passe en 45, puisqu'un quarré multipliant un quarré fait un quarré, & aussi 9 multipliant 4 & 1 dont la somme est 5, donnera les deux autres quarrez 36 & 9 dont la somme sera 45, mais il ne luy pourra pas ajouster de nouvelle composition, ni le faire estre somme de deux autres quarrez que des multiples par 9, de ceux dont 5 est la somme.

Reste donc que le nombre qui est plusieurs fois la somme de deux quarrez, soit composé de seuls nombres premiers pairement pairs + 1, ou au moins qu'il soit multiple d'un nombre composé desdits nombres premiers seulement.

Mais pour examiner les différens nombres composez, il faut commencer par les plus simples, sçavoir par ceux qui ne se mesurent que par un seul nombre premier, comme sont les puissances dont la racine est un nombre premier pairement pair + 1.

Je trouve que 25 quarré de 5, n'est qu'une seule fois la somme de deux quarrez.

125 cube de 5 est deux fois la somme de deux quarrez.

625 qq. de 5 l'est aussi deux fois.

Il sera facile de voir combien de fois chacun de ces petits nombres est la somme de deux quarrez, en ostant les quarrez moindres, comme on voit au quatriéme éxemple.

Or on voit que chacun desdits nombres qui sont puissances d'un nombre premier, n'est qu'une seule fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux; de sorte qu'il ne reste plus qu'à voir combien de fois il est la somme de deux quarrez composez entr'eux, c'est-à-dire, qui ont une commune mesure, ce qui se fera aisément comme il s'ensuit.

Il faut voir combien de fois le nombre se peut diviser en deux parties, dont l'une soit un quarré, & compter combien de fois chacune des sommes relatives est la somme de deux quarrez premiers entr'eux; car autant de fois le nombre donné

donné est la somme de deux quarrez multiples, & qui ont l'autre partie rélative, qui est un quarré pour commune mesure.

Par là on voit qu'un quarré, dont la racine est un nombre premier, n'est qu'une fois la somme de deux quarrez non plus que sa racine. Que le cube & le qq. sont chacun deux fois la somme de deux quarrez.

Que la cinquiéme & sixiéme puissance sont chacune trois fois la somme de deux quarrez, & ainsi continuant.

D'où il sera facile de faire une régle pour trouver combien de fois chaque puissance, dont la racine est un nombre premier, est la somme de deux quarrez; sçavoir en prenant les exposans desdites puissances, & considérant de quelle façon on tirera 1 des exposans 1 & 2, & comment on aura 2 par 3 & 4, &c. Car on voit que si on prend la moitié de l'exposant lorsqu'il est pair, ou le milieu lorsqu'il est impair, on aura ce qu'on cherche.

Il faut maintenant voir ce qui appartient aux nombres qui sont mesurez par plusieurs nombres premiers, qui surpassent de l'unité un multiple de 4.

Je trouve dans la table 65 & 85, dont le premier a 5 & 13 pour parties, & le second 5 & 17, & chacun desdits nombres est deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux. Pour des quarrez multiples il n'y en a point, parce qu'aucun desdits nombres n'a de quarré pour partie.

On trouvera aussi que si le nombre donné a pour parties trois nombres premiers comme 1105, qui est produit par 5, 13, 17, il sera quatre fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux, comme on a veu au quatriéme éxemple, & il ne peut estre la somme de deux quarrez multiples, parce qu'il n'a point de partie quarrée. On verra audit quatriéme éxemple combien de fois chaque nombre est la somme de deux quarrez premiers entr'eux, car ils le sont autant de fois qu'ils sont hypotenuses primitives, comme il a esté dit.

Mais si le nombre donné peut estre mesuré par quelque quarré, il sera la somme de quarrez multiples autant de fois que la partie rélative est la somme de deux quarrez primitifs. Et pour avoir une régle par laquelle je puisse trouver la multitude des couples de quarrez, sans avoir la peine de les déchifrer tous par la considération de toutes les parties quarrées; je chercheray, par ce qui a esté dit, la multitude des couples de quarrez de plusieurs nombres, & aprés en avoir quelques-uns, je verray quelle régle on pourra donner qui leur convienne à tous; & afin d'éviter la difficulté de cette recherche, je choisiray les moindres nombres, sçavoir ceux qui ne sont mesurez que par deux nombres premiers.

Ainsi je trouve qu'un nombre composé de deux nombres premiers, comme 65, dont les parties sont 5 & 13, est deux fois seulement la somme de deux quarrez.

Si les parties du nombre sont un quarré & une racine, il sera trois fois la somme de deux quarrez, car il aura deux primitifs & un multiple.

Si les parties sont un cube & une racine, il sera quatre fois la somme de deux quarrez.

Si les parties sont un quarré quarré & une racine, il sera cinq fois.

Si les parties sont deux quarrez, il sera quatre fois la somme de deux quarrez.

Si c'est un quarré & un cube, il sera six fois, &c.

Je voy icy que la grandeur des parties ne fait rien à la multitude des couples de quarrez; par exemple, 17 ou son quarré 289, pour estre plus grand que 5 ou son quarré 25, n'est pas pour cela plus de fois la somme de deux quarrez; mais l'augmentation des puissances augmente cette multitude: ainsi une cinquiéme puissance donne trois couples, & un quarré n'en a qu'une.

Il faudra donc considerer seulement lesdites puissances, lesquelles seront commodément representées par leurs exposans.

Je feray donc une petite table des parties de quelques nombres, ausquelles on mettra les exposans desdites parties au lieu d'icelles parties, comme on voit icy.



Car par exemple, 1, 2 signifient que les parties du nombre sont une racine, ou nombre premier, & un quarré ; & ensuite on met 3 séparé d'une ligne, qui monstre que le nombre dont les parties sont un quarré, & un nombre premier, est trois fois la somme de deux quarrez.

1. 1	2.
1. 2	3.
1. 3	4.
1. 4	5.
1. 5	6.
2. 2	4.
2. 3	6.
2. 4	7.
2. 5	9.
2. 6	10.
3. 3	8.
3. 4	10.
3. 5	12.
3. 6	14.

Or voicy comme on trouvera ladite multitude de couples de quarrez. Par éxemple, on veut sçavoir combien de fois un nombre, dont les parties sont un quarré & une cinquiéme puissance, est la somme de deux quarrez.

Premiérement parce qu'il se mesure par deux nombres premiers, je conclus qu'il est deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux.

Reste donc à trouver les couples des quarrez multiples.

Pour les trouver je divise le nombre en deux parties rélatives, l'une desquelles soit un quarré, & ce en toutes les façons possibles.

Pour le faire avec plus de facilité, je nommeray les parties, que l'une soit A. q. & l'autre B. cinquiéme puissance.

Je prendray donc A. q. pour une des parties rélatives ; l'autre partie sera B. cinquiéme puissance, laquelle n'est qu'une fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux, comme il a esté dit, je marque donc 1 ensuite. Puis je prens B. q. pour une des parties : la rélative sera A. q. par B. cube, qui est deux fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux : je marque donc 2 ensuite.

A. q. --- B. 5me puiss.	1.
B. q. --- A. q. par B. cub.	2.
B. qq. -- A. q. par B.	2.
B. q. par A. q. --- B. cub.	1.
B, qq. par A. q. --- B.	1.
	Somme 7.

Et ainsi continuant à prendre les parties quarrées comme on voit icy, on aura les primitifs de la partie rélative, qui donneront autant de multiples au nombre total, puisque les quarrez primitifs appartenans à la seconde partie, sont tous deux multipliez par la premiere partie qui est un quarré.

On aura donc 7 multiples, qui estant joints aux deux primitifs, qui sont particuliérement affectez au nombre total, font en tout 9 couples de quarrez dont la somme est ledit nombre qui a pour parties un quarré & une cinquiéme puissance.

Il faut donc de la multitude des couples de plusieurs nombres inférer quelque régle pour trouver ladite multitude.

Or je ne trouve point de régle par laquelle je puisse trouver à tous la multitude des quarrez par l'inspection des exposans des puissances desdites parties.

Aussi lesdits exposans n'expriment pas ladite multitude de couples de quarrez, comme ils faisoient aux hypotenuses pour en exprimer la multitude. Car, par éxemple, une cinquiéme puissance est bien cinq fois hypotenuse, mais elle n'est que trois fois la somme de deux quarrez ; & une sixiéme puissance qui est six fois hypotenuse, n'est aussi que trois fois la somme de deux quarrez.

On mettra donc la multitude desdites couples de quarrez ensuite des exposans, comme on voit icy, pour s'en servir au lieu desdits exposans.

Exposans.		
1. 1	1. 1	2.
1. 2	1. 1'	3.
1. 3	1. 2	4.
1. 4	1. 2'	5.
1. 5	1. 3	6.
2. 2	1'. 1'	4.
2. 3	1'. 2	6.
2. 4	1'. 2'	7.
2. 5	1'. 3	9.
2. 6	1'. 3'	10.
3. 3	2. 2	8.
3. 4	2. 2'	10.
3. 5	2. 3	12.
3. 6	2. 3'	14.

Mais parce que les puissances dont l'exposant est pair, n'ont pas une plus grande multitude de couples de quarrez que la précédente puissance dont l'exposant est impair ; il semble qu'il est à propos de ne pas obmettre cette condi-

tion, & partant je marque d'un accent le nombre de multitude appartenant aux puissances paires.

Ainsi ensuite des exposans 1, 2, je mets les nombres de multitude 1, 1'; & aprés les exposans 2, 4, je mets 1', 2', & je me serviray desdits nombres de multitude 1, 1', pour trouver 3 qui est ensuite; & de 1', 2', pour trouver 7 qui est aprés.

Mais parceque je voy que les mesmes nombres de multitude qui appartiennent aux exposans ne donnent pas le mesme nombre de multitude pour le nombre donné, & que ceux qui sont marquez, sçavoir ceux dont l'exposant est pair, donnent un plus grand nombre que ceux dont l'exposant est impair; il est manifeste qu'il faut avoir égard à la qualité des exposans, ce qui consiste à voir s'il est pair ou impair; car, par éxemple, 1, 2, provenans de 1 & 3 donnent 4; mais les mesmes 1, 2', provenans de 1, 4, donnent 5; & si les mesmes 1', 2, viennent de 2, 3, ils donneront 6; & venant de 2, 4, ils donneront 7.

Exposans.		
1. 1	1. 1	2.
1. 2	1. 1'	3.
1. 3	1. 2	4.
1. 4	1. 2'	5.
1. 5	1. 3	6.
2. 2	1'. 1'	4.
2. 3	1. 2	6.
2. 4	1'. 2'	7.
2. 5	1'. 3	9.
2. 6	1'. 3'	10.
3. 3	2. 2	8.
3. 4	2. 2'	10.
3. 5	2. 3	12.
3. 6	2. 3'	14.

De là on voit manifestement qu'on ne peut donner une mesme régle générale, puisque les mesmes nombres 1, 2, donnent quatre nombres différens; mais il faudra distinguer si les exposans dont lesdits 1, 2, ou autres nombres sont dérivez, sont pairs ou impairs.

Cette diversité se peut considérer en trois façons: car ou les deux exposans sont tous deux impairs, ou ils sont tous deux pairs, ou l'un est pair & l'autre impair.

Je chercheray donc séparément des regles pour chacune de ces trois façons.

Et premiérement quand les exposans sont tous deux impairs. Le premier éxemple de la table est quand les exposans des parties du nombre donné sont 1, 1, les nombres de multitude qui leur appartiennent sont aussi 1, 1; je regarde comment je feray 2 avec 1, 1, & je voy que si on prend la somme desdits 1 & 1 on aura 2.

Je prens un autre éxemple, sçavoir le troisiéme où les exposans sont 1, 3, & leur nombre de multitude sont 1, 2: or la somme de 1, 2, n'est pas 4 ainsi qu'il seroit requis, & partant ce n'est pas là la régle.

Je chercheray donc 2 avec 1 & 1 d'une autre sorte, & je trouve que le double du produit de 1 par 1 est 2.

Et considérant les autres éxemples où les deux exposans sont tous deux impairs, je trouve les nombres qui appartiennent à chacun d'iceux en la mesme sorte; car le double du produit de 1, 2, qui appartiennent à 1, 3, est 4, & ainsi des autres; d'où je conclus que la régle est bonne.

Je passe aux exposans qui sont tous deux pairs. Le premier éxemple est celuy dont les exposans sont 2 & 2, leurs nombres sont 1', 1', (sçavoir la moitié d'iceux, & aux exposans impairs le milieu,) je cherche le moyen de faire 4 avec 1 & 1.

Pour suivre le plus que je pourray la premiere méthode, il faudra que je prenne le produit de 1 par 1, lequel est 1 dont le quadruple sera 4. Mais il n'en ira pas de mesme aux exposans 2 & 4, car les nombres qui leur appartiennent sçavoir 1' & 2', donneroient 8, & non pas 7, ainsi qu'il est requis.

J'essayeray donc à faire 4 par le moyen des mesmes 1' & 1' du premier éxemple d'une autre façon, en suivant encore le plus que faire se pourra la premiere méthode.

On prendra donc encore le produit de 1 par 1, lequel est 1; son double est 2, auquel joignant les mesmes 1 & 1, on aura 4, ainsi qu'il est requis.

Je prens ensuitte les exposans 2 & 4: les nombres qui leur appartiennent, sça-

voir leur moitié est 1 & 2, leur produit est 2 dont le double est 4, auquel joignant les mesmes 1 & 2, on aura 7, qui est le nombre qu'il falloit avoir.

J'éprouve la mesme chose aux exposans 2 & 6, & trouve 10, d'où je conclus que la régle est bonne.

Je passe par-aprés à la troisiéme distinction, sçavoir quand l'un des exposans est pair, & l'autre impair. Le premier éxemple est quand les exposans sont 1 & 2, leur milieu & moitié sont 1 & 1', avec lesquels il faut trouver 3. Je prens comme auparavant le produit de 1 par 1, qui est 1, son double est 2.

Or puisque les deux exposans estant impairs on prend simplement le double du produit sans rien ajouster, & lorsque lesdits exposans sont tous deux pairs on ajouste au double du produit les deux nombres qui se sont multipliez, il se pourra faire que quand l'un des exposans est pair & l'autre impair, il faudra seulement ajouster un des nombres au double du produit susdit.

Partant audit produit 2 j'ajouste l'un des nombres, sçavoir 1 pour avoir 3.

Mais parce que chacun des nombres qui se sont multipliez est 1, je ne puis encore sçavoir si c'est celuy qui vient de l'exposant pair, ou celuy qui vient de l'impair.

Je prens donc un autre éxemple, sçavoir le suivant auquel les exposans sont 1 & 4. Les nombres qui en dépendent sont 1, 2', le double de leur produit est 4; mais parce qu'il faut avoir 5, on ajoustera 1 audit 4 : or cét 1 est le nombre qui provient de l'exposant impair ; je diray donc qu'au double du produit il faut ajouster le milieu de l'exposant impair.

Je regarde aux autres éxemples si la mesme chose arrivera comme à ceux dont les exposant sont 1, 6,] 2, 3,] 2, 5, &c. & je trouve que cette régle convient à tous, d'où je conclus qu'elle est bonne.

Il faut maintenant voir quand le nombre donné sera mesuré par trois nombres premiers différens ; par éxemple, si ses parties sont un nombre premier, un quarré & un cube, lesquelles soient A. B. q. & C. cub.

B. q. — A. par C. cub.	2.
C. q. — A. par C. par B. q.	4.
B. q. par C. q. — A. par C.	2.

Je les mets en deux parties rélatives, en telle sorte que l'une soit un quarré, & je prens les primitifs de la partie rélative au quarré que je mets ensuite. Par éxemple, prenant C. q. pour une des parties, la rélative sera A. par C. par B. q. laquelle contenant trois sortes de nombres premiers, elle sera quatre fois la somme de deux quarrez premiers entr'eux ; je mets donc 4 ensuite, & ainsi des autres.

Et assemblant tous lesdits primitifs des parties qui seront multiples au nombre total, je trouve huit multiples, ausquels joignant les quatre primitifs dudit nombre total, on aura en tout douze couples de quarrez, desquels le nombre donné est la somme.

Il faut donc trouver 12 par le moyen des exposans 1, 2, 3, ou des nombres qui leur appartiennent 1, 1', 2.

Et premiérement de 1 & 1' j'ay 3. Je prendray donc 3 au lieu de 1, 1', & ainsi j'auray 3 & 2 ; leur produit est 6 dont le double est 12, qui est la multitude requise des couples de quarrez.

On pourroit icy trouver quelque difficulté sur le 3 qui provient de 1 & 1', sçavoir s'il doit estre pris comme venant d'un exposant pair ou d'un impair, puisqu'il provient de tous les deux ensemble ; mais la régle nous montre que l'impair prévaut icy, car autrement il faudroit ajouster un des nombres au double du produit 12.

Mais icy il faut considérer que l'exposant pair montre que l'exposé est quarré, & l'exposant impair montre que l'exposé n'est par quarré : si donc le nombre de multitude est celuy qui provient de plusieurs exposans, ou qui est la moitié ou milieu d'un desdits exposans, ce nombre de la multitude appartient à un nombre quarré,

quarré, & il doit estre réputé provenir d'un pair: mais si ledit nombre de multitude appartient à un nombre non quarré, il doit estre réputé comme provenant d'un impair. Si donc entre les parties analogiques d'un nombre, il s'en trouve une qui ne soit point quarrée, le nombre ne sera point quarré, & les parties non quarrées auront leurs exposans impairs.

D'où il s'ensuit qu'entre plusieurs exposans, s'il y en a quelqu'un qui soit impair, le nombre qui est produit par les parties à qui appartiennent lesdits exposans, suit la loy des exposans impairs.

Ainsi en nostre exemple, ayant premiérement travaillé sur les exposans 1 & 2, qui donnent 3 pour le nombre de la multitude, ledit 3 doit estre réputé comme provenant d'un exposant impair, parce qu'entre les exposans dont il provient il y en a un impair, ce qui fait que le nombre qui est trois fois la somme de deux quarrez n'est pas quarré, & partant son exposant doit estre réputé impair.

On trouvera le mesme nombre 12 en meslant autrement lesdits exposans. Comme si je multiplie à part les nombres 1, 2, provenans des exposans 1 & 3, j'auray 4. L'autre exposant est 2, son nombre est 1', je multiplie donc 1' par 4, le produit est 4, dont le double est 8, auquel il faut ajouster le nombre qui provient de l'exposant impair, sçavoir 4, puisque l'autre nombre 1' provient d'un exposant pair, & on aura 12 comme cy-devant.

SIXIÉME EXEMPLE.

TROUVER tous les triangles qui ont un nombre donné pour différence de leurs moindres costez.

Afin de trouver tout ce qui dépend de la connoissance des nombres qui servent de différence aux costez des triangles, je fais plusieurs triangles primitifs de suite, & je prens leur différence, en laissant les multiples, parce qu'ils ne peuvent rien avoir qui ne vienne des primitifs.

3.	4.	5	1.
5.	12.	13	7.
8.	15.	17	7.
7.	24.	25	17.
20.	21.	29	1.
12.	35.	37	23.
9.	40.	41	31.
28.	45.	53	17.
11.	60.	61	49.
16.	63.	65	49.
33.	56.	65	23.
48.	55.	73	7.
13.	84.	85	71.
36.	77.	85	41.
39.	80.	89	41.
65.	72.	97	7.

On voit icy tous les triangles primitifs dont les hypotenuses sont moindres que 100, & aprés eux est la différence de leurs moindres costez.

Or pour remarquer ce qu'il y a de particulier dans lesdits nombres qui servent de différence, je trouve qu'ils sont premiers ou composez de nombres que je trouve aussi dans la table, comme 49 qui est le quarré de 7; de plus ces nombres premiers (si on excepte 1) sont tous différens de l'unité d'un multiple de 8, & je ne trouve aucun nombre dans ladite table qui n'ait cette condition.

Maintenant il faut voir comment on pourra trouver tous les triangles, la différence des moindres costez estant donnée.

Je prendray par exemple 7, & par son moyen je chercheray une régle pour trouver les triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17. Mais parce que 7 est nombre premier, & qu'il sert de différence à plusieurs triangles, il faut de nécessité qu'il ait quelqu'autre propriété par laquelle on puisse trouver lesdits triangles, autrement ils ne se pourroient pas trouver; car quoy-que je sçache que 7 est différent de l'unité d'un multiple de 8, cela ne me donne autre chose, sinon que 7 est proche du premier octonaire, ce qui ne pourra pas suffire pour trouver les deux triangles susdits, & les autres qui sont encore ensuite.

Or en considérant 7, je voy qu'il est la différence entre 1 & 8, & entre 2 & 9, sçavoir entre un quarré & un double quarré. Je regarderay donc si les autres nombres qui servent de différence entre les moindres costez d'un triangle sont aussi la différence d'un quarré & d'un double quarré.

Et sans examiner 1 qui sert de différence entre 1, 2, & 8, 9, & autres, je viens à 17 qui sert de différence entre 1 & 18, & entre 8 & 25; de mesme 23 sert de différence entre 2 & 25, & entre 9 & 32, & chacune desdites couples contient un quarré & un double quarré.

De plus, je remarque qu'à chacune de ces couples il y a un des nombres moindre que la différence d'entr'eux; ainsi à la couple 9, 32, le moindre nombre 9 est moindre que 23 qui en est la différence.

Je verray donc si par cette proprieté je trouveray que 7 est la différence entre les moindres costez des deux triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17.

Voicy comme il s'y faut prendre.

7 sert de différence entre 1 & 8, & entre 2 & 9. Je prens leurs racines qui sont 1, 2″, & 1″, 3. Je marque les racines des doubles quarrez, afin de les connoistre d'avec celles des quarrez, car on voit bien qu'il faut comparer la racine du double quarré avec le nombre dont elle provient d'une autre maniere que celle du quarré simple, & qu'elles doivent produire un effet different l'une de l'autre.

Je mets donc 7, & ensuite les racines des deux couples susdites comme on voit icy; sçavoir 1, 2″, & 1″, 3.

7	1.	2″	2.	3.
	1″.	3	1.	4.

Je considere par aprés les deux triangles qu'il faut trouver, sçavoir 5, 12, 13, & 8, 15, 17, je prens les quarrez dont ils proviennent, qui sont 4, 9; & 1, 16.

Leurs racines sont 2 & 3,] & 1, 4, que j'écris aussi ensuite.

Car il faut remarquer que d'ordinaire la solution se trouve plus aisément par le moyen des racines que par les quarrez, de sorte que quand on aura des quarrez, si on ne trouve pas aisément par leur moyen ce qu'on cherche, on l'examinera par les racines, ce qui sert aussi à rendre la recherche plus facile par la septiéme régle, sçavoir en se servant de moindres nombres.

Il faut donc par le moyen de 1, 2″, & 1″, 3, trouver 2, 3, & 1, 4, sçavoir par les racines des quarrez & doubles quarrez dont 7 est la différence, trouver les racines des quarrez qui font les triangles qui ont 7 de différence entre leurs moindres costez.

Je voy que 1″, 2″, sont les racines des moindres quarrez desdits triangles, & les deux grandes 3 & 4, se pourront trouver prenant en croix la somme de 1″, 2″, & de 1, 3.

On pourroit dire aussi que la somme & la différence de 1′ & 3′, donnent 2 & 4, qui sont les racines des quarrez pairs des triangles; & la somme & la différence de 1″, 2″, donnent 1 & 3, qui sont les racines des quarrez impairs.

7	1′.	2″	2.	3.
	1″.	3′	1.	4.

Mais on pourroit encore se servir d'une seule couple pour un triangle; sçavoir si on prend la racine du double quarré pour une des racines, & la somme des deux pour l'autre.

Ainsi à la premiere couple 1′, 2″,] 2 sera une des racines requises, & 3 qui est la somme de 1 & 2 sera l'autre.

Et à l'autre couple 1″, 3′,] 1 sera l'une des racines, & la somme de 1, 3, sçavoir 4, sera l'autre.

Et cette derniere façon si elle est bonne, comme il y a quelque apparence, sera plus commode, puisque chaque couple donne un triangle.

Ce qui me fait présumer qu'elle est bonne, est que les autres ne peuvent pas servir pour les triangles qui ont 1 de différence entre leur costez; car 1 est la différence entre le quarré & double quarré 1, 2, le moindre desquels sçavoir 1 n'est pas plus grand que ladite différence 1.

Voicy donc comme je l'examineray à 1.

Les racines du quarré & double quarré susdit sont 1′ & 1″, donc 1 sera une des racines, (sçavoir prenant la racine du double quarré) & 2 qui est la somme des

deux racines 1' & 1" fera l'autre racine : on aura donc 1, 2, dont les quarrez 1, 4, donnent le triangle 3, 4, 5, qui a 1 de différence entre ses moindres costez.

Le mesme 1 est encore la différence entre le quarré, & le double quarré 8 & 9, dont les racines sont 2", 3'.

On aura donc pour les racines des quarrez 2 & 5, sçavoir la racine du double quarré, & la somme des deux.

Lesdits 2 & 5 donneront le triangle 20, 21, 29, qui a 1 de différence entre ses moindres costez.

Il faut maintenant examiner les deux premieres régles sur 17. Les quarrez & doubles quarrez dont il est la différence sont 1, 18, & 8, 25. Leurs racines sont 1', 3", & 2", 5'.

Je les dispose comme auparavant.

17	1'.	3"	3.	5.
	2'.	5'	2.	6.

Par la premiere régle, je prendray 3 & 2 pour les racines des moindres quarrez requis, & les sommes de 2", 3", & de 1', 5', pour les autres ; mais on ne pourra pas faire par ce moyen les triangles requis, car on auroit les quarrez de 3 & 5, & de 2, 6, qui donneroient des triangles ausquels les trois costez seroient pairs, & partant la différence qui seroit paire ne seroit pas 17.

Que si on vouloit accoupler autrement 5 & 6, & qu'on prist 2, 5, & 3, 6, on n'auroit pas aussi le triangle requis, car les quarrez de 3 & 6 estant multiples de 3, donneroient un triangle auquel tous les costez seroient mesurez par 3, & partant la différence des costez ne pourroit pas estre 17, puisqu'elle-mesme seroit aussi mesurée par 3, & partant la premiere façon de trouver les triangles n'est pas bonne. Venons à la seconde.

17	1'.	3"	4.	5.
	2".	5'	1.	6.

La somme & la différence de 1', 5', sont les racines des quarrez pairs, & la somme & la différence de 2", 3", sont les racines des quarrez impairs : mais cette régle ne réussit pas non plus que la premiere, quoy-qu'elle ait plus d'apparence d'estre bonne, car par la premiere, aprés qu'on a pris 2", 3", pour les racines des moindres quarrez, on prend par aprés les sommes de 2", 3", & de 1', 5', pour les racines des deux autres quarrez ; d'avoir pris 2" pour un triangle, & 3" pour l'autre, cela va bien, parce qu'il y a de la ressemblance entre 2' & 3" : mais de prendre par aprés la somme de 2", 3", pour un des triangles, & celle de 1', 5', pour l'autre, ce sont des façons différentes, parce que 2", 3", sont racines de doubles quarrez, & 1', 5', de quarrez simples.

La seconde façon n'a pas cette répugnance, les racines de chaque triangle estant égales à la somme & à la différence de 1', 5', & de 2", 3" ; néanmoins parce que l'on prend pour le premier la différence des racines des quarrez simples & la somme de celles des doubles quarrez, & le contraire pour le second triangle ; cette diversité fait qu'elle ne réussit pas.

La troisiéme voye est plus réguliere, & les triangles se trouvent par des façons entiérement semblables, aussi est-ce la vraye méthode de trouver les triangles.

17	1.	3"	3.	4.
	2".	5	2.	7.

On se sert de chaque couple à part, prenant la racine du double quarré pour la moindre racine, & la somme des deux quarrez pour l'autre.

Ainsi 3 est la racine du moindre quarré d'un des triangles, & 4 qui est la somme de 3" & 1, est l'autre racine.

Les deux racines sont donc 3 & 4, qui donnent le triangle 7, 24, 25, qui a 17, pour différence de ses costez.

L'autre triangle se trouvera de la mesme maniere, sçavoir prenant la racine du double quarré 2 pour celle du moindre quarré, & la somme de 2 & 5 sçavoir 7, pour racine de l'autre quarré. On aura donc 2 & 7 pour racines, qui donnent le triangle 28, 45, 53, qui a 17 de différence entre ses costez.

La mesme chose se fera aux autres nombres, car des couples de 23, sçavoir de 3, 4'', & 1'', 5, on trouvera les triangles 33, 56, 65, & 12, 35, 37, qui ont 23 de différence entre leurs costez.

23	3,	4''	4.	7.
	1''.	5	1.	6.

Et des couples de 31 on trouvera les triangles 9, 40, 41, & 60, 91, 109, qui ont 31 de difference, d'où l'on peut inférer que la régle est bonne.

31	1,	4''	4.	5.
	3''.	7	3.	10.

Voilà donc le moyen de trouver les triangles qui ont un nombre donné pour différence de leurs costez, mais la question demande tous lesdits triangles.

Il faut donc voir combien il y en doit avoir, & s'il y en a quelque nombre déterminé; & pour cét effet j'ay recours à la table qu'on a faite en commençant d'éxaminer la question, dans laquelle je voy qu'un mesme nombre sert à plusieurs triangles, car il y en a 4 qui ont 7 pour différence.

Je considére aussi qu'il n'y a point de répugnance qu'un mesme nombre serve de différence aux moindres costez d'une infinité de triangles, veû mesme qu'il y en a une infinité qui n'ont que 1 de différence entre le grand costé & l'hypotenuse, & je conclus qu'il se pourroit bien faire aussi qu'il y auroit une infinité de triangles qui auroient un mesme nombre pour différence de leurs moindres costez.

Et ce qui me confirme en cette opinion est que je voy quatre triangles qui ont un nombre premier, sçavoir 7 pour différence. Or les nombres premiers ne sont pas si abondans, lorsque la chose est limitée; comme on voit que les mesmes nombres sont aussi la somme des susdits costez des triangles: mais parce que cela est limité, & qu'il est impossible qu'ils soient la somme des costez d'une infinité de triangles, on voit que les nombres premiers comme 7, 17, &c. ne sont chacun la somme des costez que d'un seul triangle.

Or si chaque nombre sert de différence entre les moindres costez d'une infinité de triangles, il est nécessaire qu'il y ait quelque progression qui conduise à cette infinité de triangles; & s'il y a une progression, & qu'on sçache les deux moindres termes, & la différence des nombres de ladite progression, on la pourra poursuivre aussi loin qu'on voudra.

Je cherche donc dans ma table deux triangles qui ayent une mesme différence entre leurs moindres costez, & je prens les triangles les plus proches. Ainsi 5, 12, 13, & 8, 15, 17, ont tous deux 7, de différence entre leurs costez.

Il faudroit voir si on pourroit avec le moindre faire le plus grand: mais parce que les racines des quarrez qui font le triangle sont plus simples que les costez du mesme triangle, je prens lesdites racines qui sont 2, 3, & 1, 4; mais on ne peut pas trouver une suite qui avec 2, 3, donne 1, 4, ou avec 1, 4, donne 2, 3, & qui continuë à l'infini en augmentant: car si on prend 2, 3, pour le premier terme, & qu'on trouve 1 au second, cela iroit en diminuant; de mesme qui prendroit 1, 4, pour le premier, le second auroit 3 pour sa plus grande racine qui seroit moindre que la plus grande du précédent, & ainsi on iroit encore en diminuant.

Il faut donc afin que la progression aille en augmentant, que chacun des termes augmente, ou au moins que le grand terme augmente, & que le moindre ne diminuë point.

Je conclus de là que les deux triangles susdits sont chacun le commencement de quelque progression.

Il faut donc prendre dans la table quelqu'autre triangle plus grand qui ait pareil nombre de 7, pour différence entre ses moindres costez. Je trouve 48, 55, 73.

Les racines des quarrez dont il provient, sont 3 & 8.

Mais parce qu'on ne voit pas d'où peut provenir ce 3 & 8, sçavoir si c'est de 2, 3, ou de 1, 4, je choisiray plutost dans la table une autre différence pour l'éxaminer, puisque j'y voy deux triangles assez éloignez l'un de l'autre qui ont chacun l'unité pour différence entre leurs costez.

Joint

Joint aussi que pour plus grande facilité la méthode requiert qu'on se serve du moindre nombre possible en l'examen. Mais (pour retourner à nostre 7) si on vouloir juger duquel des deux triangles dépend 48, 55, 73, sçavoir si c'est de 5, 12, 13, ou de 8, 15, 17, il faudroit voir si c'est le premier qu'on rencontre aprés les deux susdits, & s'il n'y en a point dont les costez soient moindres, & parce que je trouve que c'est le moindre aprés les deux susdits, je concluray qu'il provient du moindre des deux premiers, sçavoir de 5, 12, 13, qui est moindre que 8, 15, 17.

Je trouve donc 3, 4, 5, qui a 1 de différence, & ensuite 20, 21, 29. Les racines de leurs quarrez sont 1, 2, & 2, 5.

Je les dispose comme on voit icy, & je regarde comment je pourray de 1, 2, tirer 2, 5. Et premierement je voy que le moindre nombre de la seconde couple est égal au plus grand de la premiere, car chacun d'iceux est 2.

1.	2.
2.	5.
5.	12.

Reste donc à faire 5 avec 2, & 1. Le 5 est la somme des trois nombres que j'ay déja, sçavoir de 2, 2, & 1, ou (ce qui est la mesme chose) il est la somme du moindre nombre 1, & du double de 2 qui est le plus grand.

Je continuë par aprés cette progression de la mesme sorte, prenant le plus grand nombre 5 pour le moindre de la couple suivante, & pour avoir le plus grand j'ajouste 2 au double de 5 pour avoir 12.

1.	2	3.	4.	5.
2.	5	20.	21.	29.
5.	12	119.	120.	169.
12.	29	696.	697.	985.

J'ay donc 5 & 12 dont les quarrez donnent le triangle 119, 120, 169, qui a 1 de différence entre ses moindres costez.

De la mesme façon avec 5 & 12, on fera 12, 29, qui donneront le triangle 696, 697, 985.

J'appliqueray par aprés cette méthode aux autres nombres.

Et avec 2, 3, je feray les racines 3 & 8, prenant 3 pour la moindre, & la somme de 2, & du double de 3 pour la plus grande, qui donneront le triangle 48, 55, 73.

2.	3.	5.	12.	13.	1.	4.	8.	15.	17.
3.	8.	48.	55.	73.	4.	9.	65.	72.	97.
8.	19.	297.	304.	425.	9.	22.	396.	403.	565.

Et avec 3 & 8, on fera 8 & 19, & son triangle 297, 304, 425.

Semblablement avec 1 & 4 on fera 4 & 9 & son triangle 65, 72, 97, & avec 4 & 9, on fera 9, 22, & son triangle 396, 403, 565.

Et ainsi à toutes sortes de nombres, pourveu qu'on sçache un des triangles, on trouvera les autres, mais il faut aussi avoir égard aux multiples.

Or ces multiples sont faciles à trouver quand on sçait les primitifs, & ce qu'on doit icy remarquer est que tout nombre excepté 1, sert de différence entre les moindres costez d'une infinité de triangles multiples, parce que tout nombre est multiple de 1, lequel 1 sert de différence entre les moindres costez d'un triangle.

Ainsi 7 sert de différence entre les costez des triangles 5, 12, 13, & 8, 15, 17, & de ceux qui en proviennent; mais outre cela parce que 7 est multiple de 1; il sera encore la différence des costez des triangles multiples par 7, de 3, 4, 5, de 20, 21, 29, & de leur suite; sçavoir de 21, 28, 35,] 140, 147, 203, & des autres.

Il en est de mesme des autres nombres, & s'ils estoient composez il y auroit beaucoup plus de multiples; au moins il y auroit plus de principes dont ils proviennent.

Il y a plusieurs autres choses à considerer sur ce sujet, dont on a parlé au discours des triangles au chapitre qui traite de la somme & de la différence des deux moindres costez: mais cecy suffira pour faire découvrir le reste.

TROUVER UN TRIANGLE
auquel tant l'hypotenuse que la somme des deux autres costez soit un quarré.

Voicy le triangle.
4687298610289. hypotenuse.
4565486027761. costé impair.
1061652293520. costé pair.

C'est la question que l'exemple 7 suivant nous enseigne à chercher par tant de moyens.

TROUVER UN TRIANGLE
duquel l'aire ajoustée aux deux petits costez fasse un quarré.

Voicy le triangle.
205769.
190281.
78320.

TROUVER UN TRIANGLE
dont l'aire jointe à l'hypotenuse donne un quarré.

C'est 17, 144, 145.

TROUVER UN TRIANGLE
dont l'aire jointe au petit costé fasse un triangle.

C'est 3, 4, 5,] 16, 30, 34.
Et le troisiéme est 105, 208, 233.

SEPTIÉME EXEMPLE.

TROUVER un triangle auquel tant l'hypotenuse que la somme des deux autres costez soit un quarré.

Puisque la question requiert deux choses, sçavoir l'hypotenuse quarrée & la somme des deux costez aussi quarrée, je chercheray les moyens de faire chacun separément, & je verray si l'un estant quarré l'autre le peut estre aussi, suivant ce qui a esté dit au neuviéme précepte.

Je chercheray premiérement tous les triangles qui ont un quarré pour la somme de leurs moindres costez.

Je suppose donc qu'on ait examiné quels nombres doivent estre la somme des deux moindres costez des triangles, & qu'on ait trouvé que ce sont des nombres premiers différens de l'unité d'un multiple de 8, ou qui sont composez desdits nombres premiers seulement.

Je prens donc les quarrez desdits nombres, sçavoir de 7, 17, 23, 31, &c. & je cherche leurs triangles pour voir si quelqu'un d'entr'eux aura un quarré pour son hypotenuse.

Pour avoir lesdits triangles il faut avoir les couples de quarrez & doubles quarrez, dont la différence est la somme des deux moindres costez du triangle. Et parce que tous les nombres dont on se doit servir sont quarrez, il faut voir si par le moyen de leurs racines, on ne pourra point trouver les couples de quarrez, & doubles quarrez qui leur appartiennent.

Pour trouver cela on se servira des méthodes ordinaires, prenant des nombres

connus ; par éxemple, je sçay que 7 est la différence de 1, 8, & de 2, 9, dont les racines sont 1, 2″, & 1″, 3. Je sçay aussi que son quarré 49 est la différence de 1, 50, & de 32, 81, dont les racines sont 1, 5″, & 4″, 9.

1. 2″ 1″. 3	1. 5″ 4″. 9

Il faut donc par le moyen de 1, 2″, & 1″, 3, trouver 1, 5″, & 4″, 9. On donneroit bien plusieurs moyens de passer de l'un à l'autre, mais ils ne conviennent pas aux autres nombres. En voicy un qui convient à tous.

Je prens le produit des deux couples, sçavoir de 1 par 2, & de 1 par 3, pour avoir 2 & 3. Leur somme est 5 qui est le costé du double quarré, leur différence est 1 qui est le costé du quarré de la mesme couple. On aura donc 1, 5″, pour une des couples.

L'autre se trouvera aisément, sçavoir en prenant la différence de 1 & 5 pour costé du double quarré de l'autre couple, & la somme des racines des doubles quarrez sçavoir de 4″ & 5″ pour la racine du quarré de ladite seconde couple.

On aura donc ainsi les deux couples 1, 5″, & 4″, 9.

J'éprouve la mesme chose aux autres nombres comme 17, & 23, & je trouve que cela y revient.

Je fais donc une table assez grande de plusieurs quarrez qui sont la somme des deux moindres costez d'un triangle, comme on peut voir cy-aprés ; & afin de trouver commodément les couples de quarrez & doubles quarrez dont ils sont la différence, je mets leurs racines avec leurs couples aussi ; comme prés de 49 je mets 7 avec ses couples 1, 2″, & 1″, 3, afin qu'on puisse trouver plus facilement les couples de 49 par le moyen de celles de 7, car les racines estant moindres que leurs quarrez, leurs couples se trouveront aussi plus facilement que celles des quarrez.

TABLE DES QUARREZ
qui sont la somme des moindres costez des triangles.

7. 1. 2″ 1″. 3	49. 1. 5″ 4″. 9	71. 1. 6″ 5″. 11	5041. 49. 61″ 12″. 73	119. 3. 8″ 5″. 13	14161. 41. 89″ 48″. 137
17. 1. 3″ 2″. 5	289. 7. 13″ 6″. 19	73. 5. 7″ 2″. 9	5329. 17. 53″ 36″. 89	9. 10″ 1″. 11	79. 101″ 22″. 123
23. 3. 4″ 1″. 5	529. 7. 17″ 10″. 27	79. 7. 8″ 1″. 9	6241. 47. 65″ 18″. 83	127. 1. 8″ 7″. 15	16129. 97. 113″ 16″. 129
31. 1. 4″ 3″. 7	961. 17. 25″ 8″. 33	89. 3. 7″ 4″. 11	7921. 23. 65″ 42″. 107	137. 5. 9″ 4″. 13	18769. 7. 97″ 90″. 187
41. 3. 5″ 2″. 7	1681. 1. 29″ 28″. 57	97. 1. 7″ 6″. 13	9409. 71. 85″ 14″. 99	151. 7. 10″ 3″. 13	22801. 31. 109″ 78″. 187
47. 5. 6″ 1″. 7	2209. 23. 37″ 14″. 51	103. 5. 8″ 3″. 11	10609. 7. 73″ 66″. 139	161. 1. 9″ 8″. 17	25921. 127. 145″ 18″. 163
49. 1. 5″ 4″. 9	2401. 31. 41″ 10″. 51	113. 7. 9″ 2″. 11	12769. 41. 85″ 44″. 129	9. 11″ 2″. 13	73. 125″ 52″. 177

167.	27889.	287.	82369.				
11. 12"	119. 145"	1. 12"	241. 265"	11. 16"	71. 281"		
1". 13	26". 171	11". 23	24". 289	5". 21	210". 491		
191.	36481.			401.	160801.		
3. 10"	89. 149"	15. 16"	223. 257"	7. 15"	79. 289"		
7". 17	60". 209	1". 17	34". 291	8". 23	210". 499		
193.	37249.	289	83521.	409.	167281.		
7. 11"	17. 137"	7. 13"	23. 205"	13. 17"	137. 305"		
4". 15	120". 257	6". 19	182". 387	4". 21	168". 473		
199.	39601.	311.	96721.	431.	185761.		
1. 10"	161. 181"	9. 14"	31. 221"	9. 16"	17. 305"		
9". 19	20". 201	5". 19	190". 411	7". 23	288". 593		
217.	47089.	313.	97969.	433.	187489.		
11. 13"	113. 173"	5. 13"	103. 233"	17. 19"	281. 365"		
2". 15	60". 233	8". 21	130". 363	2". 21	84". 449		
		329.	108241.	439	192721.		
5. 11"	47. 157"	3. 13"	191. 269"	19. 20"	359. 401"		
6". 17	110". 267	10". 23	78". 347	1". 21	42". 443.		
223.	49729.			449.	201601.		
13. 14"	167. 197"	11. 15"	89. 241"	1. 15"	391. 421"		
1". 15	30". 227	4". 19	152". 393	14". 29	30". 451		
233.	54289.	337.	113469.	457.	208849.		
3. 11"	119. 185"	1. 13"	287. 313"	11. 17"	49. 325"		
8". 19	66". 251	12". 25	26". 339	6". 23	276". 601		
239.	57121.	343.	117649.	463.	214369.		
7. 12"	1. 169"	13. 16"	151. 265"	7. 16"	113. 337"		
5". 17	168". 337	3". 19	114". 379	9". 25	224" 561		
241.	58081.	353.	124609	479.	229441.		
1. 11"	199. 221"	15. 17"	217. 293"	13. 18"	119. 349"		
10". 21	22". 243	2". 19	76". 369	5". 23	230". 579		
257.	66049.	359.	128881.	487.	237169.		
9. 13"	49. 185"	17. 18"	287. 325"	5. 16"	217. 377"		
4". 17	136". 321	1". 19	38". 363	11". 27	160". 537		
263.	69169.	367.	134689.	497.	247009.		
5. 12"	73. 193"	5. 14"	137. 277"	15. 19"	193. 377"		
7". 19	120". 313	9". 23	140". 417	4". 23	184". 561		
271.	73441.	383.	146689.				
11. 14"	103. 205"	3. 14"	233. 317"	9. 17"	47. 353"		
3". 17	102". 307	11". 25	84". 401	8". 25	306". 659		
281.	78961.	391.	152881.	503.	253009.		
13. 15"	161. 229"	1. 14"	337. 365"	3. 16"	329. 425"		
2". 17	68". 297	13". 27	28". 393	13". 29	96". 521		

Je voy par aprés comment on fera le triangle par le moyen desdites couples; par éxemple, 7 est la somme des costez du triangle 3, 4, 5, les racines des quarrez qui donnent ledit triangle sont 1 & 2, je cherche donc comment avec les couples susdites, sçavoir avec 1, 2", & 1", 3, je feray 1 & 2.

Je.

Je trouve que les racines des doubles quarrez desdites couples sont les racines des quarrez du triangle; je prens par aprés un autre nombre comme 17, dont les couples sont 1, 3", & 2", 5, & je trouve aussi que prenant 3 & 2 pour les racines des quarrez qui doivent composer le triangle, elles donneront 5, 12, 13, qui a 17 pour la somme de ses moindres costez.

Voyons maintenant ce qu'il faut pour faire que l'hypotenuse soit quarrée. Il est nécessaire que les deux quarrez dont elle est la somme soient les costez d'un triangle; car puisque le quarré de l'hypotenuse est la somme des quarrez des deux autres costez d'un triangle, les racines desdits quarrez qui sont la somme d'un quarré d'hypotenuse sont les costez d'un triangle.

Or les racines des doubles quarrez de chaque couple sont les racines des quarrez dont la somme doit estre une hypotenuse quarrée. Il s'ensuit donc que lesdites racines des doubles quarrez doivent estre les costez d'un triangle.

Il ne sera donc point besoin de former les triangles qui ont les quarrez susdits pour la somme de leurs moindres costez, puisqu'on n'a besoin d'autre chose que de voir si l'hypotenuse est quarrée. Et on connoistra si elle est quarrée en considérant les racines des doubles quarrez susdits, & voyant s'ils peuvent estre les deux costez d'un triangle.

On ne considere icy que les triangles primitifs, parce que les multiples se réduisent à un primitif; & parce que le primitif est moindre que son multiple, s'il y en a quelqu'un qui ait les qualitez requises, il se trouvera auparavant ledit multiple.

Pour voir si les racines des doubles quarrez (qui appartiennent aux quarrez susdits qui sont la somme des costez d'un triangle) sont les costez d'un triangle, il faut considérer quelques propriétez des costez des triangles suivant le sixiéme précepte.

1°. Le costé pair de tout triangle primitif doit estre pairement pair, & partant toutes les couples qui sont icy ausquelles il se trouve un impairement pair doivent estre excluës, comme on voir aux couples de 289, 529, 2209, 2401, &c.

2°. L'un des deux costez de chaque triangle doit estre mesuré par 3: or le plus grand des deux nombres susdits ne peut pas estre mesuré par 3, ni aussi estre pair, lorsque la somme des deux moindres costez est un quarré, car le costé impair estant la différence des deux quarrez, si le plus grand des deux est pair & le moindre impair, ce moindre sera pairement pair -+ 1, car tout quarré impair est pairement pair -+ 1, & partant estant osté du quarré pair il restera un pairement pair -- 1, pour le costé impair. Et si on ajouste par aprés ce costé impair au costé pair qui est pairement pair, la somme sera un pairement pair -- 1, & partant ne sera pas un quarré; par exemple, le triangle qui sera fait par les quarrez de 5 & 12, ne pourra pas avoir un quarré pour la somme de ses costez, car le costé impair sera la différeuce de 25 & 144, quarrez de 5 & 12, & ce costé impair sera pairement pair -- 1, sçavoir 119, puisque pour l'avoir il faut oster un pairement pair -+ 1, sçavoir 25 du pairement pair 144. Si donc on ajouste le pairement pair -- 1, qui est 119, au costé pair du triangle, sçavoir à 120 qui est pairement pair, la somme sera un pairement pair -- 1, & partant ce ne sera pas un quarré.

On montrera de la mesme façon que si le plus grand des deux quarrez qui font le triangle est mesuré par 3, la somme des deux moindres costez ne sera point un quarré.

Que les racines desdits quarrez soient comme devant 5 & 12, pour avoir le costé impair on ostera 25 de 144; or 25 est multiple de 3 -+ 1, car tout quarré qui n'est point mesuré par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3.

Si donc on oste un multiple de 3 -+ 1 d'un multiple de 3, sçavoir 25 de 144, restera 119 qui sera ternaire -- 1.

Le costé impair sera donc ternaire -- 1, lequel estant ajousté au costé pair 120

qui néceſſairement eſt multiple de 3, la ſomme deſdits coſtez ſera multiple de 3 — 1, & partant ne ſera point quarrée.

Puis donc que le plus grand des deux nombres ſuſdits, qui ſont racines des doubles quarrez & qui doivent auſſi eſtre coſtez de triangles, n'eſt point meſuré par 3 ny par 4, il faudra de néceſſité que le moindre des deux ſoit meſuré par 3 & 4, puiſque les coſtez des triangles doivent contenir 3 & 4. Le moindre doit donc eſtre meſuré par 12.

Il faudra donc rejetter toutes les couples auſquelles la racine du moindre double quarré ne ſe meſure pas par 12.

Et le premier qui n'eſt point excepté par les deux régles précédentes eſt 5041, quarré de 71, qui a 12 pour la racine du moindre de ſes doubles quarrez.

3°. Le grand coſté de tout triangle eſt composé, & ſe meſure par deux nombres premiers, ſi on en excepte 3, 4, 5, & quelques-uns de ſes multiples : mais lorſque le grand coſté eſt impair comme il eſt toûjours icy, il n'y a aucune exception.

Et partant il faudra exclure tous les quarrez (qui ſont la ſomme des coſtez des triangles) qui ont un nombre premier ou ſa puiſſance pour la racine du plus grand double quarré.

Ainſi 5041, quarré de 71, ſera auſſi exclus, parce que le plus grand de ſes doubles quarrez a 61 pour racine; de meſme 5329 ſera exclus, parce que 53 eſt ſa grande racine, & que 61 & 53 ſont nombres premiers.

Les nombres ou quarrez ſuivans, ſçavoir 6241, 7921 & 9409 ſeront auſſi exclus, car ils ont bien un nombre composé pour leur grande racine, mais la moindre n'eſt pas meſurée par 12.

Comme auſſi 57121 ſera exclus, quoy-que ſa moindre racine 168 ſoit meſurée par 12, car la grande racine 169 eſt le quarré d'un nombre premier.

Il ne reſtera donc à examiner que les nombres ou quarrez, dont la moindre des racines des doubles quarrez eſt meſurée par 12, & la grande eſt meſurée par deux nombres premiers; car puiſque les racines des doubles quarrez doivent eſtre les coſtez d'un triangle, elles doivent avoir les deux ſuſdites conditions qui appartiennent aux coſtez des triangles tels qu'il eſt ici requis.

On aura auſſi égard aux finales des coſtez des triangles, & par l'examen qu'on fera deſdits triangles on trouvera que lorſque le coſté pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toûjours par 5.

Quand il finit par 4 ou 6, l'impair finit par 3 ou 7.

Quand il finit par 0, l'impair finit par 1 ou 9.

Par les régles précédentes on excluroit la pluſpart des nombres ſuſdits, & il ne reſteroit que 24, 265, qui appartiennent à 82369 quarré de 287; puis 168, 305, appartenans à 167281,] 288, 305, appartenans à 185761,] 84, 365, qui appartiennent à 187489,] 276, 325, qui dépendent de 208849, & 96, 425, qui viennent de 253009. Mais éxammant leſdits nombres par les finales on rejettera 24, 265,] 84, 365,] 276, 325,] & 96, 425, parce que les finales 4 & 5,] & 6, 5, ne ſont point enſemble aux coſtez des triangles.

Reſte donc les couples 168, 305, & 288, 305 qu'il faut éxaminer, & voir ſi leurs quarrez éſtant joints enſemble font un quarré; mais il ſe trouve que non, & partant ils ne feront point les coſtez d'un triangle, & l'hypotenuſe des triangles ne ſera point quarrée.

Or le plus grand quarré de la table eſt 253009, & partant on ſera aſſuré qu'il n'y a aucun quarré qui ſoit la ſomme des deux coſtez d'un triangle qui ait ſon hypotenuſe quarrée, s'il n'eſt plus grand que ledit 253009 quarré de 503.

Mais on pourroit traiter cette queſtion d'une autre ſorte, & au lieu de faire une table des quarrez qui ſont la ſomme des coſtez d'un triangle, on en pourroit faire une qui contiendroit tous les quarrez qui ſont hypotenuſes.

Or parce que la méthode enſeigne de ſe ſervir des moindres nombres poſſi-

bles, & aussi de retrancher tout ce qui est inutile, comme on voit par le troisiéme précepte, je cherche les moyens de faire lesdits racourcissemens & exclusions.

Pour amoindrir les nombres on se servira des racines au lieu des quarrez des hypotenuses, & par le moyen du triangle qui a ladite racine pour hypotenuse, on aura le triangle qui a le quarré de ladite hypotenuse ; par exemple, avec 3, 4, 5, je feray le triangle qui a 25 pour hypotenuse, car ledit triangle est fait par les quarrez de 3 & 4, qui sont costez dudit triangle 3, 4, 5.

Mais pour n'avoir point la peine de prendre lesdits quarrez de 3 & 4, je chercheray quelqu'autre méthode pour trouver 7 & 24, (qui sont costez du triangle qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuse,) par le moyen desdits 3 & 4.

Et premiérement 24 est le double du produit de 3 & 4, reste donc à trouver 7. Si je prens la somme desdits 3 & 4 j'auray 7, il faut donc voir à quelqu'autre triangle si cela réussira de mesme.

Au triangle 5, 12, 13, la somme de 5 & 12 est 17, mais 17 n'est pas costé du triangle qui a 169 quarré de 13 pour hypotenuse. Ledit triangle est 119, 120, 169. Je regarde si 17 mesure 119, & je trouve qu'il le mesure, le quotient est 7, lequel 7 est la différence de 5 à 12.

Je dis donc que si on multiplie la somme des deux costez par leur différence, on aura le costé impair du triangle qui aura pour hypotenuse le quarré de l'hypotenuse du premier triangle.

Et je voy que la mesme chose arrive au premier triangle 3, 4, 5, car 7 qui est la somme de 3 & 4, estant multiplié par la différence 1 donne 7 pour costé du triangle, qui a 25 quarré de 5 pour hypotenuse, sçavoir de 7, 24, 25.

De cette façon on aura les costez des triangles dont l'hypotenuse est quarrée, par le moyen de tous les triangles, & ayant lesdits costez on aura leur somme : reste donc à voir si cette somme sera quarrée.

Mais afin de n'avoir point la peine d'éxaminer tous les triangles, il se faut servir de l'autre moyen qui est de retrancher tout ce qui est inutile ; ce qui se fera en considérant quelques propriétez du quarré, puisque ladite somme des costez doit estre un quarré : par éxemple, tout quarré impair (tel qu'est ladite somme) surpasse de l'unité un pairement pair.

De là on inferera que les triangles dont le moindre costé sera impair ne pourront pas donner de triangle qui ait un quarré pour la somme de ses costez, & partant on ne prendra que les triangles dont le moindre costé sera pair.

Et de cette autre proprieté, que tout quarré non divisible par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3, on inferera que le moindre costé doit estre mesuré par 3, & partant il ne faudra considérer que les triangles dont le moindre costé sera mesuré par 12.

La façon dont on trouvera ces deux exclusions a esté traitée au commencement du présent éxemple, & partant on ne la répétera point icy ; car les costez des triangles dont on parle icy sont les mesmes nombres qui doivent servir de racine aux doubles quarrez appartenans aux sommes quarrées susdites, & on a montré que la moindre des deux racines susdites doit estre mesurée par 12.

Je prens donc tous les triangles dont le moindre costé est mesuré par 12. Et on pourroit les mettre tous de suite commençant par 12, 35, 37,] 24, 143, 145,] 36, 77, 85,] 36, 323, 325, &c. mais parce qu'on a déja éxaminé cette question par une autre voye, sçavoir par la somme des costez, & qu'on l'a poursuivie jusqu'à faire que la somme des costez du triangle fust 253009, on commencera par des hypotenuses qui donneront à peu prés ladite somme, ou plûtost moins, afin que dans l'inégalité desdites sommes, qui sont souvent en proportion fort différente avec l'hypotenuse, on n'en n'omette aucune.

Je commenceray donc par les hypotenuses quarrées dont la racine n'est point moindre que 400, & suivray l'ordre desdites hypotenuses, les choisissant dans

une table que je suppose estre faite desdires hypotenuses, desquelles il ne faut prendre que les racines, comme il a esté dit.

Que si on n'avoit point travaillé à la question par la voye précédente, ou qu'on n'eust point de table desdites hypotenuses, il faudroit prendre les triangles dont le moindre costé se mesure par 12, & poursuivre, comme on vient de le montrer, & pratiquer les exclusions dont on parlera cy-aprés.

On peut considérer les finales, & voir quelles elles doivent estre, afin que la somme des costez du triangle qu'on fera soit un quarré.

Et premiérement quand le costé pair du triangle est 2 ou 8, l'impair doit finir par 5. Si le pair finit par 0, l'impair peut avoir 1 ou 9 pour finale, & en toutes les façons susdites les finales n'empeschent point que la somme des costez du triangle qui sera produit du premier qui est icy consideré, ne soit un quarré.

Mais si le costé pair du premier triangle finit par 6, le costé impair doit finir par 3. Et si ledit costé pair finit par 4, l'impair doit avoir 7 pour finale; autrement si 6 estoit avec 7, & 4 avec 3, la somme des costez du triangle qui seroit produit, n'auroit pas une finale quarrée; ce qu'on montrera comme il s'ensuit.

Pour faire avec le premier triangle celuy dont l'hypotenuse est quarrée, on multiplie pour le costé impair la somme des deux costez par leur difference, & pour le costé pair on prend le double du produit des mesmes costez. Si donc les costez finissent par 6 & 7, la somme d'iceux finira par 3, car 7 & 6 font 13, & la difference finira par 1, car le costé pair estant le moindre costé, il le faudra oster de 7.

Le produit de 1 par 3, sçavoir de la somme par la différence sera 3, & telle sera la finale du costé impair du triangle requis.

Pour le costé pair il faudroit prendre le produit des mesmes finales 6 & 7 qui finira par 2, & son double finira par 4, partant le costé pair finira par 4, lequel estant joint avec le costé impair qui finit par 3, la somme des deux finira par 7, qui n'est point une finale quarrée; car les quarrez impairs ont pour finale 1, 9, ou 25, & partant la somme des deux costez ne sera point un quarré.

On montrera de mesme que si les costez du premier triangle finissoient par 4 & 3, la somme des costez du triangle qui en seroit produit finiroit aussi par 7, & partant elle ne seroit point quarrée.

On voit icy plusieurs triangles qui ont tous leur moindre costé divisible par 12, & qui sont destinez pour faire des triangles qui ayent pour hypotenuse le quarré de l'hypotenuse de ceux-cy. Mais on en exclura ceux qui n'ont pas les finales de leurs costez ainsi qu'il est requis, & qui sont marquées -- devant leur moindre costé, comme sont 336, 377,] 336, 527,] 156, 667,] 504, 703,] &c. car le 6 se doit trouver avec le 3,] & le 4 avec le 7.

Il y a encore une autre exclusion, mais elle est tirée de la premiere partie de cét exemple, & de l'autre table.

Les costez des triangles qui sont en cette table-cy, sont les mesmes qui devroient estre les racines des doubles quarrez de la table précédente, car lesdites racines doivent estre les costez d'un triangle, & leurs quarrez doivent faire le triangle qui a les deux conditions susdites.

120.	391.	409.
84.	437.	445.
168.	425.	457. —+
132.	475.	493.
—336.	377.	505.
396.	403.	565.
276.	493.	565. —+
48.	575.	577.
240.	551.	601.
—336.	527.	625.
300.	589.	661.
—156.	667.	685.
108.	725.	733. —+
216.	713.	745.
468.	595.	757.
432.	665.	793.
168.	775.	793.
540.	629.	829. —+
—504.	703.	865.
348.	805.	877.
60.	899.	901.
420.	851.	949.
—696.	697.	985.
372.	925.	997. —+
660.	779.	1021.
192.	1015.	1033.
132	1085.	1093.
744.	817.	1105.
576.	943.	1105.
—264.	1073.	1105.
528.	1025.	1153. —+
204.	1147.	1165.
660.	989.	1189.
612.	1075.	1237.

Or

Or on a monstré que la plus grande des deux susdites racines doit estre impaire, mais je veux icy monstrer qu'elle est hypotenuse primitive.

Puisque le quarré qui est la somme des costez d'un triangle, est la difference d'un quarré & d'un double quarré, & qu'en la table susdite il y a toûjours deux couples desdits quarrez & doubles quarrez, en l'une desquels le double quarré est plus grand que le quarré, & en l'autre il est moindre; il s'ensuit qne le plus grand double quarré des deux est la somme de deux quarrez: par exemple, 49 est la différence de 1, 50, & de 32, 81, & partant dans la couple dont le double quarré est plus grand que le quarré 49, ledit double quarré qni est 50 est la somme de deux quarrez, sçavoir de 1 & 49, d'où il s'ensuit qu'il est hypotenuse: mais voyons quelle hypotenuse. Le quarré qui sert de somme aux costez comme 49, est toûjours impair, & partant l'autre quarré 1 sera aussi impair, puis qu'ensemble ils doivent faire un double quarré qui est pair; ce sont donc deux quarrez impairs qui sont premiers entr'eux, car s'ils avoient une commune mesure, le double quarré l'auroit aussi, & le triangle seroit multiple; mais on suppose qu'il soit primitif.

Puis donc que les deux quatrez, qui joints ensemble font le double quarré, sont impairs & premiers entr'eux, leur somme sera le double d'une hypotenuse primitive, comme on a dit ailleurs: mais la mesme somme est un double quarré, & partant la racine de ce double quarré sera hypotenuse primitive.

Le grand costé des triangles de la table précédente doit donc estre l'hypotenuse d'un triangle, & partant pairement pair plus 1.

Je marque donc les triangles dont le grand costé est hypotenuse, la marque est —+, & rejette les autres dont le grand costé est pairement pair — 1, comme 120, 391, 409, &c. & ceux ausquels ledit costé estant pairement pair —+ 1, n'est pas néanmoins hypotenuse comme 84, 437, 445, &c.

Il n'y a donc que six triangles qui ne soient point exclus, sçavoir 168, 425, 457,] 276, 493, 565,] 108, 725, 733,] 540, 629, 829,] 372, 925, 997,] 528, 1025, 1153, desquels triangles il faudra faire ceux qui auront pour hypotenuse le quarré de leur hypotenuse. Ainsi avec 168, 425, 457, on fera le triangle dont l'hypotenuse sera le quarré de 457; mais on n'a besoin que de la somme des costez dudit triangle, pour voir si c'est un quarré: par éxemple, on prendra pour le costé pair dudit triangle le double du produit de 168 par 425, qui sera 142800, l'impair se trouvera multipliant la somme de 168 & 425 par leur différence, sçavoir 593 par 257, le prodnit 152401 est le costé impair, qui estant joint au costé pair 142800 donne 295201 pour la somme des costez, qui n'est point un quarré, ainsi qu'il paroistra en prenant la racine par la voye ordinaire, & par la mesme façon on trouvera que les autres cinq triangles ne donnent pas des triangles dont la somme des costez soit un quarré.

HUITIÉME EXEMPLE.

TROUVER un triangle dont l'hypotenuse & l'enceinte soient quarrées.

Je cherche quelque voye pour trouver l'enceinte des triangles, autrement qu'en ajoustant les costez. Je trouve qu'on la peut avoir en multipliant la somme des racines des quarrez qui font le triangle, par le double de la plus grande racine. Ainsi au triangle 3, 4, 5, les racines sont 2 & 1, leur somme est 3, qui multipliée par 4 (double de la plus grande racine 2) donne 12, pour l'enceinte dudit triangle.

De cette propriété je concluray que pour faire que l'enceinte soit un quarré, il faut que la somme des deux racines soit un quarré, & que la plus grande racine soit un double quarré, afin que venant à multiplier ladite somme (qui est un quarré) par un autre quarré (qui sera le double de la plus grande racine,) on ait un

quarré pour l'enceinte. Ainsi prenant pour les deux racines 18 & 7 qui ensemble font 25, on multipliera ladite somme 25 par 36 double de 18, & on aura 900 pour l'enceinte du triangle 252, 275, 373.

Maintenant il faut voir ce qui est necessaire pour faire que l'hypotenuse soit quarrée; ou bien supposant que l'hypotenuse de ce triangle soit quarrée, je regarde ce qu'on en peut déduire.

Je voy que si l'hypotenuse est quarrée, les racines des quarrez dont elle est la somme doivent estre les costez d'un triangle.

Mais parce qu'il faut qu'un mesme triangle ait l'hypotenuse quarrée, & l'enceinte quarrée, je joins ensemble les deux susdites conditions, & partant il faudra trouver un triangle dont le grand costé soit double quarré, & la somme des deux moindres costez soit un quarré.

Pour faire que le costé pair soit double quarré, il faut que le triangle soit fait de deux qq. parce que leurs racines doivent estre quarrées: il faudra donc trouver un triangle fait par deux qq. qui ait un quarré pour la somme de ses moindres costez.

Or les nombres qui sont la somme des deux costez d'un triangle sont deux fois la différence d'un quarré, & d'un double quarré, & les racines des deux doubles quarrez sont aussi les racines des quarrez qui font le triangle: mais les quarrez qui font le triangle sont des qq. partant leurs racines sont quarrées: il s'ensuit donc que les racines des doubles quarrez susdits sont des quarrez.

On pourra donc se servir icy de la première table de l'exemple précédent qui contient les quarrez qui sont la somme des costez d'un triangle: il faudroit donc trouver en ladite table, dans la liste des couples appartenantes aux quarrez, quelque quarré qui eust deux quarrez pour les racines de ses doubles quarrez, ce qui ne se trouve point en toute cette table: toutefois on ne peut pas estre asseuré qu'il ne s'en trouvast point si on poursuivoit la table plus loin, puisque cela se trouve bien aux sommes non quarrées, comme a 23 qui a 1 & 4 pour les racines de ses doubles quarrez, & à 137 qui a 4 & 9.

Or cette table mene fort loin, car par son moyen on entre bien avant dans les nombres d'onze lettres, & voicy comme il y faudroit proceder, si on avoit trouvé deux quarrez qui servissent de racine à deux doubles quarrez appartenans à un mesme nombre.

Par éxemple, si les racines des doubles quarrez qui appartiennent à 247009 quarré de 497, sçavoir 306, 353, estoient deux quarrez, & qu'on voulust par leur moyen faire le triangle qui auroit des quarrez pour son enceinte, & pour son hypotenuse, voicy comme il y faudroit proceder.

Le triangle fait par les quarrez de 306 & 353, auroit pour costé pair 216036, & pour costé impair 30973.

Les quarrez de ces deux costez qui sont 46671553296 & 959326729 estant joints ensemble, donneront une hypotenuse quarrée qui sera 47630880025.

Or l'enceinte du triangle dont ledit nombre est hypotenuse, se trouvera multipliant la somme des racines 216036 & 30973, sçavoir 247009, (qui est un quarré, puisque c'est le nombre auquel appartiennent les deux racines premiérement prises, sçavoir 306 & 353,) par le double de la plus grande, sçavoir par 432072 pout avoir 106725672648 qui sera l'enceinte du triangle, dont l'hypotenuse sera le quarré susdit 47630880025.

Et cette enceinte seroit aussi un quarré si les deux nombres susdits 306 & 353 estoient quarrez, car cela estant 216036 qui est le double de leur produit seroit un double quarré, & le double de ce nombre, sçavoir 432072 seroit un quarré: si donc on vient à le multiplier par 247009 qui est aussi un quarré, le produit seroit un quarré: or ce produit estant l'enceinte d'un triangle qui a un quarré pour hypotenuse, ledit triangle auroit les deux conditions requises.

On peut encore examiner cette mesme question d'une autre façon comme il s'ensuit.

L'enceinte se trouve, comme il a esté dit, en multipliant la somme des deux racines par le double de la plus grande des deux ; il faudra donc, afin que l'enceinte soit quarrée, que la somme des deux racines soit un quarré, & la plus grande soit un double quarré, afin que son double soit un quarré. Mais afin que l'hypotenuse soit quarrée, il faut que les racines susdites soient costez de triangles, afin que leurs quarrez estant joins ensemble fassent le quarré d'une hypotenuse : il faudra donc trouver un triangle dont le grand costé soit double quarré, & la somme des deux moindres costez soit un quarré.

Puisque le grand costé doit estre double quarré, il faut qu'il soit le double d'un quarré pair, car autrement il ne seroit pas pairement pair, ainsi qu'il est requis aux costez pairs, & partant il aura pour finales 2, 8, ou 0, comme lesdits doubles quarrez.

Or quand le costé pair finit par 2 ou 8, l'impair finit toûjours par 5, (ce qui se doit entendre aux primitifs dont nous parlons icy) & partant la somme des costez finit par 7 ou 3 qui ne sont point finales quarrées.

Et partant si le costé impair finit par 2 ou 8, la somme des deux costez ne pourra pas estre un quarré.

Reste donc que le costé pair finisse par 0, car ainsi l'impair finira par 1 ou 9, & la somme desdits costez aura une finale quarrée.

On considérera par aprés que tout quarré non divisible par 3 surpasse de l'unité un multiple de 3, & partant le double quarré sera ternaire −+ 2 ou −− 1. Mais en tout triangle l'un des costez se mesure par 3, & partant si le costé pair n'est point ternaire l'impair le sera, & la somme de ces costez dont l'un est ternaire, & l'autre ternaire − 1 sera aussi ternaire −− 1, & partant ce ne sera pas un quarré ainsi qu'il est requis.

Il faut donc que le costé pair soit mesuré par 3 & aussi par 5, afin qu'il finisse par 0 ; il ne pourra donc estre moindre que 1800, double du quarré de 30.

On remarquera aussi que le costé impair doit estre ternaire −+ 1, afin qu'estant joint au costé pair qui est ternaire, il fasse un ternaire −+ 1 qui puisse estre quarré.

Or la moitié du costé pair, sçavoir 900 est produite par les racines des deux quarrez constitutifs du triangle, lesquelles racines doivent nécessairement estre quarrées, afin qu'elles soient premieres entr'elles, & l'une d'icelles doit estre mesurée par 9 & l'autre non, puisque le costé pair est mesuré par 9.

Et partant le costé impair estant la différence des deux quarrez desdites racines, il sera la différence de deux qq. le moindre desquels doit estre mesuré par 81, & sa racine par 9, autrement le costé impair seroit ternaire −− 1, car puisque l'un des deux qq. doit estre mesuré par 3 ou 81, si c'estoit le plus grand qui le fust, donc le moindre qq. seroit ternaire −+ 1, lequel estant osté du plus grand qui seroit ternaire, resteroit un ternaire −− 1 pour ledit costé impair.

Ce mesme costé impair doit estre aussi pairement pair −+ 1, autrement estant joint au costé pair, il ne feroit pas un pairement pair −+ 1, comme doit estre la somme pour estre quarrée ; & partant le susdit moindre qq. qu'on a montré devoir estre mesuré par 81, doit estre pair, car s'il estoit impair, le grand qq. seroit pair, & leur différence seroit un pairement pair − 1 ; car si on oste un pairement pair −+ 1 d'un pairement pair, il restera un pairement pair −− 1, & partant la racine de ce moindre qq. sera au moins 36.

D'ailleurs puisque tout qq. impair surpasse de l'unité un multiple de 16, le costé impair, qui est la différence de deux qq. le plus grand desquels est impair, surpassera aussi de l'unité un multiple de 16, car le qq. pair estant divisible par 16 (comme tout qq. pair doit estre,) si on l'oste d'un multiple de 16 −+ 1, il restera un multiple de 16 −+ 1.

Quand donc on assemblera les deux costez, sçavoir le pair avec l'impair, si le pair ne se mesure que par 8 comme 1800, (qu'on avoit pris pour le moindre costé pair possible) la somme des deux costez susdits retiendra aussi cette restriction, & surpassera de l'unité un multiple de 8 & non pas de 16.

Mais les nombres qui sont particuliérement affectez à estre la somme des costez des triangles, différent tous de l'unité d'un multiple de 8, & partant leurs quarrez surpasseront de l'unité un multiple de 16, tels sont 49, 289, 529, &c.

De là il s'ensuit que le costé pair doit au moins estre mesuré par 16, & partant au lieu de 1800 il faudra prendre son quadruple 7200, double de 3600, quarré de 60, qui est le moindre qui puisse avoir les conditions requises, sçavoir d'estre double quarré, & d'estre divisible par 3, 5, & 16.

Mais ledit 7200 se trouvera encore trop petit: car si on prend, comme il a esté dit, les parties de la moitié 3600 en telle sorte que la partie paire soit mesurée par 9 ainsi qu'il est requis, on aura pour parties 144 & 25; mais la partie paire doit estre la moindre comme on a montré cy-devant, puisqu'elle est la racine d'un qq. pair, qui doit estre le moindre des deux.

Si donc 144 est la moindre partie possible, il faut que l'autre soit plus grande, & qu'elle se mesure par 25, & que ce soit un quarré comme 625, qui multiplié par 144 donne 90000, dont le double 180000 sera le moindre costé pair qu'on doive éxaminer.

Mais le costé pair estant tel, & prenant 144 & 625 pour les parties qui doivent faire le triangle, le costé impair se trouvera plus grand que le pair, car ce sera 369889. Or est-il qu'il doit estre moindre que le pair, puisque la question requiert que le grand costé soit double quarré, & par conséquent pair.

Il faut donc voir ce qui fait icy que le grand costé est impair. Cela provient de ce que les parties susdites 144 & 625, qui doivent estre les racines des quarrez dont le triangle est formé sont trop distantes l'une de l'autre, & sont hors des bornes nécessaires pour faire que le grand costé soit pair.

Il faudra donc prendre des nombres moins différens pour lesdites racines comme 576 & 625, ausquelles la moindre est toûjours paire, & le double du produit desdites racines sçavoir 720000 sera le costé pair, & l'impair sera 58849.

Or si la somme de ces deux costez qui est 778849 estoit un quarré, on auroit ce qui est requis; car multipliant ladite somme 778849 par 1440000 double du grand costé 720000, on auroit 1121542560000, qui est l'enceinte du triangle qui est fait par les quarrez desdits 720000 & 58849, duquel triangle l'hypotenuse est le quarré de la somme des quarrez de 576 & 625; ou si on veut l'hypotenuse dudit triangle est le quarré de l'hypotenuse du triangle, dont les costez sont 720000 & 58849.

Et l'enceinte susdite 1121542560000 seroit un quarré, puisqu'elle seroit le produit des deux quarrez 778849 & 1440000. Mais parce que ledit 778849 (qui est la somme des costez 720000 & 58849) n'est pas quarré, l'enceinte susdite ne sera pas aussi un quarré.

On voit donc par là que s'il y a des triangles qui ayent leur hypotenuse & leur enceinte quarrée, il faut que ladite enceinte soit fort grande, puisque la moindre & premiére qui ait besoin d'estre examinée a treize lettres comme on voit icy.

Qui voudroit passer outre, on pourroit prendre 1225 au lieu de 625, puis on augmenteroit aussi 576 prenant garde toûjours que la partie paire soit la moindre, mais que l'impaire ne l'excéde pas plus que de la raison qu'il y a de 1 + R. 2 à 1, & que si la partie paire est 1000000, l'impaire n'excede pas 2414213.

Cét examen conduiroit fort loin avec peu de nombres.

Et pour examiner lesdits 576 & 1225, je les prens pour racines des quarrez qui font un triangle, partant le costé pair sera 1411200, & l'impair sera 1168849, (qui se trouve multipliant la somme de 576 & 1225 par leur différence, sçavoir 1801

1801 par 649) la somme des deux costez sera 2580049 qui n'est point quarrée, & partant on pourroit passer à un autre; car l'enceinte de l'autre triangle qu'on cherche ne seroit point un quarré, puisqu'elle se trouve multipliant ladite somme 2580049 par le double du costé pair, sçavoir par 2822400 qui est un quarré.

NEUVIE'ME EXEMPLE.

TROIS Marchands ont mis ensemble quelque argent pour leur trafic: celuy du premier a profité pendant six mois, celuy du second pendant neuf mois, & celuy du dernier pendant douze mois.

Le premier a receû 70. livres, tant pour sa mise que pour son gain. Le second 230. livres. Le troisiéme 180. livres. On demande la mise de chacun.

Ces sortes de questions dépendent de la premiére régle, car on peut prendre d'autres exemples de mesme nature dont on aura la solution.

Ainsi je fais une autre question semblable à la premiére, & je pose que le premier Marchand ait mis 8. livres, & ait gagné 12. livres en six mois; le second & le troisiéme doivent profiter à mesme raison eû égard au temps: si donc le second a mis 6. livres, son gain sera de 9. livres en six mois, & partant si son argent a profité pendant neuf mois, le profit sera de 13. livres 10. sols. Si le troisiéme a mis 3. livres, le profit en six mois sera de 4. livres 10. sols, & en douze mois de 9. livres.

Donc le premier aura 20. livres, tant pour son profit en six mois que pour sa mise. Le second aura 19. livres 10 sols, pour son profit de neuf mois & pour sa mise. Le troisiéme aura 12. livres pour son profit en douze mois & pour sa mise.

Il faut donc voir comment avec 20. livres & six mois de temps on trouvera la mise qui est 8. livres, & de mesme des autres.

C'est la façon ordinaire des questions qui n'ont qu'une solution, ou qui ont tout nombre pour solution comme celle-cy: mais pour celles qui en ont une multitude indéfinie (on entend icy parler des nombres dont il y a ou dont il peut y avoir une infinité, & qui néanmoins vous ménent bientost a de fort grands nombres, comme qui demanderoit les nombres parfaits, ou ceux qu'on nomme Amiables) on n'est pas obligé de trouver 8, car ce seroit un grand hazard si on trouvoit 8 parmi tant d'autres nombres qu'on peut donner; & puisque le gain ni la mise ne sont point séparément determinez, on pourra prendre quel nombre on voudra pour la mise ou pour le gain, car on peut augmenter & diminuer l'un ou l'autre tant qu'on voudra; il suffit seulement de faire que l'argent de chacun profite également en temps égal, & en temps inégal à proportion du temps. Or on peut séparer un nombre en deux parties, qui auront entr'elles telle raison donnée qu'on voudra.

Mais puisqu'en la question proposée la raison de la mise & du gain n'est point donnée, il sera permis de prendre le nombre & la raison à discrétion, puisque la somme de la mise & du profit peut estre séparée en deux parties qui auront telle raison qu'on voudra.

Je pose donc que la mise du premier soit de 50. livres, son profit sera donc de 20. livres; il faut donc voir qu'elle raison il y a de 50 à 20: mais parce que le temps de chacun est différent, il faut diviser le profit par le temps, & pour plus grande facilité je prens le plus grand nombre qui soit commun aux temps des trois Marchands. On aura donc pour le premier Marchand deux termes, pour le second trois termes, & pour le troisiéme quatre termes.

Je regarde quel profit a fait le premier Marchand en un terme, & je trouve 10. livres. Je considére maintenant quelle raison il y a de la mise 50 au profit d'un terme 10, la raison est quintuple, & le profit est par terme la cinquiéme partie de la mise.

On posera donc $\frac{5}{5}$ pour la miſe de chacun ; & parce que les ſommes données contiennent la miſe & le gain tout enſemble, il faut aſſembler le profit avec leſdits $\frac{5}{5}$.

Le ſecond Marchand a laiſſé ſon argent à profit pendant trois termes, & en chaque terme a gagné la cinquiéme partie de ſa miſe : or la miſe eſtant $\frac{5}{5}$, la cinquiéme partie ſera $\frac{1}{5}$ & $\frac{3}{5}$ pour les trois termes ; & parce que les 230. livres qu'a euës le ſecond Marchand contiennent la miſe & le gain, il faut aſſembler les $\frac{5}{5}$ de la miſe, avec les $\frac{3}{5}$ de gain, & on aura en tout $\frac{8}{5}$; je diray donc par la régle de proportion :

Si $\frac{8}{5}$ donnent 230, combien $\frac{5}{5}$, ou bien :

Si 8 donnent 230. livres, combien 5. Je multiplie 230 par 5, & je diviſe le produit 1150 par 8, le quotient 143. livres 15. ſols ſera la miſe du ſecond.

De meſme pour le troiſiéme Marchand, ſa miſe eſtant $\frac{5}{5}$, ſon profit pour quatre termes à raiſon de $\frac{1}{5}$ pour terme ſera $\frac{4}{5}$, qui eſtant joint à la miſe donne $\frac{9}{5}$ pour la ſomme qui repreſente 180. Je trouveray donc par la meſme régle de proportion que :

Si $\frac{9}{5}$ ou 9 donnent 180, ---- $\frac{5}{5}$ ou 5 donneront 100 pour la miſe du troiſiéme Marchand.

Si on avoit pris 60. livres pour la miſe du premier Marchand, le profit ſeroit 10. livres en deux termes, & partant 5. livres par terme, qui eſt la douziéme partie de la miſe, & ſur cette proportion on trouveroit les miſes des autres.

DIXIE'ME EXEMPLE.

TROUVER un triangle dont l'hypotenuſe ſoit quarrée, & dont le moindre coſté ait un quarré pour différence avec chacun des deux autres.

Puiſque le triangle a deux propriétez différentes, il les faut examiner l'une aprés l'autre.

1°. Pour faire que l'hypotenuſe ſoit quarrée, il faut que les racines des quarrez qui la compoſent ſoient les deux coſtez d'un autre triangle.

2°. Pour faire qu'un triangle ait ſon moindre coſté different d'un quarré de chacun des deux autres, il faut prendre pour la racine du plus grand des deux quarrez qui le compoſent, l'hypotenuſe d'un triangle, & la racine de l'autre quarré ſera un des moindres coſtez du meſme triangle, moins la différence de l'hypotenuſe & de l'autre coſté. Ainſi ayant choiſi le triangle 3, 4, 5, l'hypotenuſe 5 ſera la racine du grand quarré, & pour l'autre racine j'oſte d'un des coſtez comme de 3 la différence de 4 à 5, ou de 4 la différence de 3 à 5, & reſtera 2. On a donc 5 & 2 dont les quarrez font le triangle 20, 21, 29, qui a la condition requiſe. On peut voir cela dans le diſcours des triangles.

Mais leſdites racines 5 & 2 doivent eſtre les deux coſtez d'un triangle, ſi on veut que l'hypotenuſe qui ſera faite de leurs quarrez ſoit un quarré.

Il faut donc trouver un triangle dont le moyen coſté ſoit l'hypotenuſe d'un autre triangle, & le moindre coſté ſoit un des coſtez de cét autre triangle moins la différence de ladite hypotenuſe & de ſon autre coſté. De ſorte que ſi 5 & 2 eſtoient les deux coſtez d'un triangle, on auroit ce qu'on cherche, parce que le moyen coſté 5 eſt l'hypotenuſe du triangle 3, 4, 5, & le moindre coſté 2 eſt un des coſtez dudit triangle 3, 4, 5, moins la différence de l'autre coſté & de l'hypotenuſe.

Je chercheray par aprés en la table des triangles, ſi je trouveray un triangle qui ait ſes deux coſtez tels qu'il eſt requis.

Et pour abréger & exclure les ſuperflus, je voy que le grand coſté doit eſtre une hypotenuſe, je ne m'arreſteray donc qu'aux triangles dont le grand coſté ſera impair & hypotenuſe primitive, car les hypotenuſes multiples ne doivent point

icy eſtre conſidérées, à raiſon que le triangle dont elles ſont hypotenuſes eſt multiple, & le triangle auquel elles ſerviroient de coſté ſeroit auſſi multiple: or nous n'avons dans la table que des primitifs, & il ne ſerviroit de rien auſſi de conſidérer les multiples.

Or il y a beaucoup de maniéres pour connoiſtre ſi un nombre n'eſt point hypotenuſe: mais il ne ſe faut ſervir que de celles qui donnent d'abord à connoiſtre que le nombre n'eſt point hypotenuſe, comme s'il eſt pairement pair — 1; & s'il eſt diviſible par 3, on rejettera donc les triangles auſquels le coſté impair eſt petit coſté, & ceux auſſi auſquels ledit coſté impair eſt meſuré par 3, & ceux auſquels il eſt pairement pair — 1.

Je conſidére auſſi quel doit eſtre l'autre coſté du triangle, & je trouve qu'il doit eſtre moindre que la moitié du moyen coſté qui doit eſtre hypotenuſe, comme on voit à 5 & 2, & cela eſt facile à juger par la conſtruction de 2.

Avec cela j'examine les triangles de la table, & je regarde ceux dont le grand coſté eſt impair, & ſurpaſſe de l'unité un pairement pair.

Les coſtez impairs ſont dans la ſeconde colonne de la table aprés l'hypotenuſe.

Le premier eſt celuy qui a 21 pour grand coſté: mais parce que 21 eſt meſuré par 3, je paſſe outre. Je laiſſe auſſi 45, & puis 77; parce qu'on voit ſans peine qu'il eſt diviſible par 7, lequel 7 n'eſtant point hypotenuſe, ſes multiples ne ſeront point auſſi hypotenuſes primitives.

Le premier qu'on trouve qui doive eſtre examiné eſt 221, ſon autre coſté eſt 60, je trouve que 221 eſt hypotenuſe des triangles 221, 21, 220, & de 221, 171, 140. Mais d'abord je trouve du defaut à tous les deux, car puiſque 60 doit eſtre moindre que l'un & l'autre des coſtez du triangle auquel 221 ſert d'hypotenuſe, le triangle 221, 21, 220, n'y pourra pas ſervir.

Dans l'autre triangle 171 eſtant pairement pair — 1, ſi on l'oſte de 221, qui eſtant hypotenuſe doit toûjours eſtre pairement pair + 1, il reſtera un impairement pair, qui eſtant oſté d'un pairement pair, ſçavoir du coſté pair 140, reſtera un impairement pair, lequel partant ne pourra pas eſtre le coſté pair d'un triangle tel qu'eſt 60. Il faut donc:

1°. Que le grand coſté du triangle ſerve d'hypotenuſe à un autre triangle.

2°. Que le petit coſté qui eſt pair, ſoit moindre que la moitié du grand coſté.

3°. Que le ſecond triangle auquel le grand coſté du premier ſert d'hypotenuſe, ait ſon moindre coſté plus grand que le moindre coſté du premier.

4°. Que ledit ſecond triangle ait un pairement pair + 1, pour ſon coſté impair.

Le premier triangle qui ait toutes ces conditions eſt 457, 425, 168, car le grand coſté 425 eſt l'hypotenuſe d'un autre triangle, & le petit coſté 168 eſt moindre que la moitié de 425; de plus 425 ſert d'hypotenuſe au triangle 425, 297, 304, auquel le moindre coſté 297 eſt plus grand que 168, & le coſté impair 297 eſt pairement pair + 1.

Mais on pourroit encore donner une autre condition au ſecond triangle, auquel il faut, qu'oſtant 304 de 425, & oſtant ce qui reſte de 297, il reſte enfin 168; mais ledit 168 doit néceſſairement eſtre diviſible par 3, & deſdits trois coſtez 425, 297, 304, il ne ſçauroit y avoir que l'un des deux moindres diviſible par 3, & partant afin que la derniere difference ou reſte ſoit meſuré par 3, il faut que les deux autres, comme 425, 304, excédent 3 d'une meſme quantité, car ainſi leur difference ſera meſurée par 3, & cette difference eſtant par aprés oſtée du troiſiéme coſté qui eſt auſſi meſuré par 3, le dernier reſte ſera meſuré par 3, & cette cinquiéme condition ne ſe trouve pas dans ledit triangle 425, 297, 304, car 304 ſurpaſſe un ternaire de l'unité, & 425 le ſurpaſſe de 2.

Paſſant outre à chercher les triangles, on trouve 725 qui ſert de coſté au triangle 733, 725, 108, & d'hypotenuſe au triangle 725, 333, 644, leſquels ont les cinq conditions requiſes; car pour la cinquiéme 644 ſurpaſſe de 2 un ter-

naire auſſi-bien que l'hypotenuſe 725: mais ſi on conſidere les finales, on verra que cela ne peut réuſſir, c'eſt-à-dire, que ſi on oſte 333 de 725, & qu'on oſte le reſte de 644, il ne peut pas reſter 108 comme il ſeroit beſoin, ce qui ſe connoiſtra oſtant ſeulement les dernieres lettres: car ſi on oſte le|3|de 333, du|5|de 725, il reſtera 2, lequel eſtant oſté du|4|de 644, reſtera 2, mais il faudroit qu'il reſtaſt 8 pour avoir la finale de 108.

La conſidération de ces finales eſt fort facile, & montre d'abord l'impoſſibilité quand elle provient de là. On peut auſſi juger de cette façon de recherche qu'en travaillant on trouve toûjours de nouvelles facilitez & abrégez.

Mais paſſant outre à la recherche on trouvera 925 au triangle 997, 925, 372, qui a auſſi les quatre premiétes conditions avec celuy qui a 925 pour hypotenuſe, ſçavoir 925, 533, 756: mais ce dernier n'a pas la cinquiéme, joint que les finales y répugnent comme au précédent.

Le meſme empeſchement ſe trouve auſſi a 1261, 1189, 420, & à ſon correſpondant 1189, 989, 660.

Enfin on trouve 1517 au triangle 1525, 1517, 156, & ſon correſpondant 1517, 165, 1508, qui ſont les premiers qui ont toutes les conditions requiſes, & meſme les finales s'accordent bien à ce qui eſt requis. On éprouvera donc ſi oſtant de 165 la différence de 1508 à 1517, on aura 156; j'oſte 1508 de 1517, reſte 9, lequel eſtant oſte de 165, reſte 156 ainſi qu'il eſt requis.

On a donc trouvé un triangle dont le moyen coſté, ſçavoir 1517, eſt hypotenuſe d'un autre triangle, & dont le moindre coſté 156 eſt moindre que l'un des coſtez du ſecond triangle de la différence de l'autre coſté à l'hypotenuſe, car 156 eſt moindre que 165 de 9, lequel 9 eſt la différence de l'autre coſté 1508, & de l'hypotenuſe 1517; ce qu'il falloit trouver.

Ayant ce triangle 156, 1517, 1525, on aura celuy qui eſt requis prenant les coſtez de celuy-cy pour les racines des quarrez qui le compoſent, les quarrez de 156 & 1517 ſont 24336 & 2301289, qui donnent le triangle 473304, 2276953, 2325625, auquel l'hypotenuſe eſt un quarré dont la racine eſt 1525, & le moindre coſté 473304 a un quarré pour différence avec chacun des deux autres, car ſa différence avec le moyen coſté eſt 1803649 quarré de 1343, & avec l'hypotenuſe 1852321 quarré de 1361. Ainſi qu'il eſtoit requis.

ABREGÉ DES COMBINAISONS.

On appelle combinaison le divers assemblage de plusieurs choses.

Il y en a de deux sortes principales, chacune desquelles se divise encore en d'autres. De ces deux jointes ensemble on en fait une troisiéme qui est meslée de ces deux, & encore une quatriéme qu'on nommera multiple, parce qu'elle se fait par la multiplication de chacune de ces sortes.

La premiére sera nommée combinaison d'ordre, la deuxiéme combinaison de changement, la troisiéme meslée, & la quatriéme multiple.

La combinaison d'ordre contient les façons différentes dont on peut arranger & disposer plusieurs choses; par exemple, en combien de sortes on peut arranger quelque multitude de soldats, ou combien on peut faire de nombres différens avec quelques chiffres, ou combien on peut faire d'Anagrammes de quelque nom, soit qu'elles se puissent prononcer, ou qu'elles ne le puissent; & ce qu'on observe en cecy, & qui est la propriété particuliére de cette combinaison, est que les choses une fois prises ne doivent point estre changées, comme si on prend cette diction *Jaques*, on considérera la variété des dispositions que peuvent recevoir les six lettres de cette diction, sans qu'il soit permis de mettre quelque autre lettre nouvelle outre ces six, ou d'en omettre quelqu'une.

Cette combinaison a plusieurs cas, ou une infinité, qui se réduiront à deux.

Le premier & le principal est quand toutes les choses combinées sont différentes, comme lors qu'il est question d'arranger des hommes, pas un desquels ne se peut trouver en deux lieux: ou lors qu'on fait les Anagrammes de quelque diction, dont toutes les lettres sont différentes, comme *Charité*.

Le second, qui dépend du premier, est quand parmi les choses combinées, il y en a de semblables, comme il arrive en faisant les Anagrammes des dictions qui ont quelques lettres semblables: par exemple, si on vouloit sçavoir combien on peut faire d'Anagrammes de cette diction *Pierre*, entre les six lettres de laquelle il y a deux *e*, & deux *r* qui se ressemblent.

Combinaison d'ordre.

L'ordre des choses différentes se trouve comme il s'ensuit.

On multiplie la combinaison de la multitude précédente par le nombre de la multitude donnée: ainsi pour avoir l'ordre de six choses, il faut multiplier l'ordre de 5 choses par 6; & pour avoir l'ordre de 5, on multipliera celuy de 4 par 5; & pour celuy de 4, on prendra le produit de l'ordre de 3 par 4; de mesme pour celuy de 3, on multipliera l'ordre de 2 par 3. Or l'ordre de 2 ne peut estre que 2, car deux choses ne souffrent que deux dispositions différentes, sçavoir en mettant au premier lieu celle qui auparavant estoit au second, comme *B, A.* & *A, B.* On pourroit dire aussi que la combinaison de deux choses se trouve en multipliant celle de 1, qui est 1 par 2.

On trouvera cette combinaison poursuivie jusques à 64. in lib. Harmonicorum du P. Mersenne, pages 116. & 117.

1	1.
2	2.
6	3.
24	4.
120	5.
720	6.
5040	7.
40320	8.
362880	9.
3628800	10.
39916800	11.
479001600	12.
6227020800	13.
87178291200	14.
1307674368000	15.
20922789888000	16.
355687428096000	17.
6402373705728000	18.
121645100408832000	19.
2432902008176640000	20.
51090942171709440000	21.
1124000727777607680000	22.

Si on veut donc trouver l'ordre de quelque multitude, il faudra chercher celuy des multitudes précédentes, & faire la table de toutes, comme on voit icy.

La colonne qui est du costé droit contient le nombre de la multitude des choses dont on veut sçavoir l'ordre, c'est-à-dire la différente façon de les arranger; celle qui est du costé gauche contient l'ordre.

Je mets donc premiérement 1, tant à droit qu'à gauche, parce que l'ordre d'une chose n'est qu'un; puis je mets du costé droit le nombre suivant 2, par lequel je multiplie l'ordre du précedent, sçavoir 1, pour avoir 2.

Je mets aprés 3 au dessous de 2 à droit, & par ce nombre je multiplie l'ordre de 2, sçavoir 2; & on aura 6, qu'il faudra mettre prés de 3; en suite j'écris 4 dessous 3, & je multiplie par ce 4 l'ordre de 3, sçavoir 6, pour avoir 24. & ainsi de suite comme on voit en la table.

obie
obei
oibe
oieb
oebi
oeib
boie
boei
bioe
bieo
beoi
beio
iobe
ioeb
iboe
ibeo
ieob
iebo

Voicy la différente disposition qu'on peut donner à quatre choses, afin de faire voir de quelle façon on les arrangera pour n'omettre aucune disposition. On se proposera premiérement quelque ordre, comme en ces quatre lettres *o, b, i, e*. La premiére soit *o*, la seconde *b*, &c. il faut en retenant la premiére changer l'ordre des derniéres. Ainsi, ayant placé & disposé les quatre lettres selon cét ordre, je retiens *o*, que je laisse toûjours au premier lieu, & je change les trois autres *b, i, e*, en toutes les façons possibles qui sont 6, & pour ces 6, on observera encore la mesme regle; & ainsi parce que je trouve *b*, le premier des 3, je le retiens, & je change les deux autres *i, e*, en toutes les sortes, qui sont 2, sçavoir *i, e*, & *e, i*.

Cela fait je change le *b*, & en son lieu je mets la lettre suivante, sçavoir la troisiéme qui est *i*, & on aura *o, i*, & en suite je mets les deux autres *b, e* dans leurs deux rangs, & enfin aprés *o*, je mets la quatriéme lettre, sçavoir *e*, & je change encore les deux autres *b, i*, en leurs deux façons.

Et parce que la quatriéme lettre est la derniére, & qu'on ne peut plus en mettre d'autre au second lieu, je change la premiére lettre *o*, & en

eobi sa place je mets la seconde *b*, & en suite les trois autres selon leur ordre,
eoib sçavoir la premiére au second lieu, puis la troisiéme & quatriéme; & la
eboi seconde lettre *b*, demeurant ainsi au premier lieu, on fera les six change-
ebio mens des autres trois, sçavoit de *o, i, e*, comme auparavant. Cela estant
eiob fait, on mettra la troisiéme lettre *i* au premier lieu, & on fera encore les
eibo six variations des trois autres *o, b, e*; & enfin on mettra la derniére *e*, au commencement, pendant que les trois autres *o, b, i* seront arrangées en six façons.

S'il y avoit cinq lettres différentes comme *Tobie*, on auroit en la mesme maniére que cy-devant les vingt-quatre changemens de *o, b, i, e*, le *T* demeurant toûjours le premier; puis on osteroit le *T* du premier lieu, & en sa place on mettroit *o*, aprés lequel on mettroit *T, b, i, e*, en vingt-quatre sortes; puis la troisiéme lettre *b* tiendroit le premier lieu, & enfin la quatriéme & la cinquiéme.

De mesme, si on avoit six lettres, on feroit le changement des cinq derniéres en cent vingt façons, & mettant chacune des six lettres au premier lieu, on aura six fois 120, sçavoir 720, pour les divers arrangemens des six choses.

Pour sept lettres on fera les 720 changemens des six derniéres, qui seront recommencez sept fois, à cause des sept lettres qui doivent occuper le premier lieu.

On trouvera de la mesme sorte les diverses situations pour les autres multitudes, ce qui donne assez à connoistre la construction de la table précédente, & la raison pour laquelle il faut multiplier tous les nombres & leurs produits depuis l'unité jusqu'au nombre de la multitude requise, pour avoir la combinaison de quelque multitude: car ayant à disposer plusieurs choses d'un ordre different, on commence à operer sur les trois derniéres; & gardant la premiére des trois, on range les deux derniéres en deux façons: & parce qu'il y a trois lettres différentes, on mettra chacune des trois pour la premiére, & aprés chacune on mettra les deux autres en deux façons. D'où il s'ensuit que pour avoir la combinaison de trois choses, il faut multiplier 2 par 3, dont le produit est 6.

Si on vient aprés à considerer quatre choses, on a montré comme les trois derniéres se peuvent varier en six façons: mais parce que chacune de ces quatre choses peut tenir le premier lieu, & que les trois qui resteront se varient en six sortes, il faudra multiplier 6 par 4, pour avoir la varieté de l'ordre de quatre choses, qui sera 24.

De mesme, si on a cinq choses, chacune doit estre mise la premiére, & à chacune de ces situations les quatre derniéres seront rangées en vingt-quatre sortes: il faut donc multiplier 24 par 5. Pour avoir l'ordre de cinq choses, qui sera 120; & ainsi de suite, il faudra multiplier la combinaison précédente par le nombre de la multitude donnée; & cela est une preuve évidente qui sert de démonstration pour la construction de la table.

Mais lors que dans une diction il y a plusieurs lettres semblables, comme en cette diction, *Beauté*; il est certain qu'il n'y aura pas tant de varietez en l'ordre, que si toutes les six lettres estoient différentes; & que les deux *e* qui s'y rencontrent diminuënt la multitude de ces varietez.

En ce cas, il faudra prendre la combinaison de l'ordre des lettres selon leur multitude, & la diviser par l'ordre qui appartient à la multitude des semblables: ainsi, pour sçavoir combien on peut faire d'anagrammes de la diction, *Beauté*, on prendra la combinaison de l'ordre de six choses, qui est 720; & parce que dans la diction il y a deux lettres semblables, on divisera 720 par la combinaison de deux choses, qui est 2, le quotient 360 sera la multitude des Anagrammes requises.

ebene De mesme pour cette diction, *Ebene*, on prendra 120, qui est la
ebeen combinaison de 5, à cause de ses cinq lettres: mais parce que parmi

ebnee ces cinq lettres il y en a trois semblables, je divise 120 par la combi-
eebne naison de 3, sçavoir par 6, & le quotient 20 sera la multitude des ana-
eeben grammes de cette diction.
eenbe On voit icy les 20 variétez de ces cinq lettres, qui pourront donner
eeneb à connoistre comment on pourra faire les variétez des situations, quand
eeebn les choses ne sont pas toutes différentes.
eeenb Que s'il y avoit plusieurs sortes de lettres semblables, il faudroit di-
enbee viser la combinaison de toutes les lettres par celle de chaque sorte de
enebe semblable, comme aux dictions, *Pierre* & *George*, ausquelles il y a six
eneeb lettres, mais deux d'une sorte & deux d'une autre.
beene Je prendray la combinaison de 6, sçavoir 720, & la diviseray par
beeen celle de 2, & le quotient 360 encore par celle de 2, & j'auray 180:
benee ou bien je multiplieray la combinaison de 2 par celle de 2, le produit
bneee sera 4, par lequel je diviseray 720, & le quotient sera 180.
nebee Pour avoir la combinaison ou la multitude des anagrammes de la di-
neebe ction, *Ananas*, je voy qu'elle a six lettres: je prens donc 720, qui
neeeb est la combinaison de 6; & par ce qu'entre ces lettres il y en a trois
nbeee d'une sorte & deux d'une autre, je divise 720 par la combinaison de 3, sçavoir par 6, & le quotient 120 par celle de 2, sçavoir par 2, & j'auray 60: ou bien je multiplie la combinaison de 3 par celle de 2, sçavoir 6 par 2, & par le produit 12 je divise la combinaison de la multitude des lettres, sçavoir 720, le quotient 60 donnera la multitude des variétez des lettres de cette diction.

Il semble que l'ordre demanderoit qu'on traitât en suite de la combinaison de changement ou de choix: mais parce qu'on trouve ses variétez par le moyen de la meslée, on traitera premiérement de celle cy, & on commencera par celle qu'on nomme générale.

Combinaison générale.

Cette combinaison est celle qui a esté appellée meslée, parce qu'elle contient tant l'ordre que le changement des choses. On la peut aussi diviser en deux espéces, comme les autres, sçavoir si on considére les choses toutes différentes, ou bien si on suppose qu'elles puissent estre toutes semblables, ou qu'il y en puisse avoir plusieurs semblables.

Cette derniére combinaison est la plus universelle de toutes, puisqu'elle comprend toute seule tout ce qui est compris dans toutes les autres; car on y considere l'ordre comme en la premiére, & on prend les choses dans une plus grande multitude, comme en la seconde; & outre cela on en peut prendre plusieurs semblables ou toutes, comme si on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet, car par ce moyen les douze cartes pourroient estre semblables, & ainsi on pourroit avoir douze Rois de pique; ou seulement neuf ou dix cartes semblables, & les autres différentes, & en toutes les autres façons possibles; & l'ordre fera voir en combien de maniéres on les pourroit joüer & jetter sur la table en toutes ces sortes de jeux.

Cette combinaison se trouve, prenant la multitude des choses pour l'exposant d'une puissance, qui a pour racine la diversité des choses combinées: ainsi pour sçavoir en combien de façons on peut avoir & arranger ou joüer les douze cartes prises dans douze jeux de piquet de trente-six cartes chacun, afin qu'on en puisse avoir tant de semblables qu'on voudra, il faut prendre 36 pour racine, & 12 pour l'exposant de la puissance.

Ce sera donc la douziéme puissance de 36.

Si on ne prenoit qu'une carte, on n'auroit que 36 variétez.

Si on en prenoit 2, on auroit 1296 variétez, sçavoir le quarré de 36.

Pour trois cartes, on prendroit le cube de 36. Pour quatre, le quarré quarré. Ponr cinq, la cinquiéme puissance de 36. & ainsi des autres.

La vérité de cette opération se peut tirer ou du raisonnement, ou de quelque exemple. Nous en avons un exemple aux chiffres, car il est certain qu'on les prend & dispose en toutes les façons possibles, soit semblables ou différentes & prises dans un plus grand nombre, & on a aussi égard à l'ordre: or les nombres se suivent, & ne different de proche en proche que de l'unité; d'où il s'ensuit que le dernier & plus grand nombre de ceux qui ont une certaine multitude de lettres, comprendra tous les précédens; par exemple, le plus grand nombre qui s'écrive par deux lettres ou chiffres est 99, qui comprend non-seulement les nombres de deux lettres, mais aussi ceux qui n'en ont qu'une; mais il faut considérer que parmi ces nombres, il n'y en a aucun qui ait un zéro du costé gauche, & en la place des dixaines: on le pourra donc supposer au devant des neuf premiers chiffres où il ne signifie rien, en prenant 01, 02, &c. & ainsi on auroit 99; nombres de deux lettres. Mais il y en manque encore un, pour avoir toutes les combinaisons des dix caractères pris deux à deux: car celuy qui seroit fait de deux zero, sçavoir 00, n'y est point; il faudra donc ajouster 1, à 99 pour avoir en tout 100 variétez, que peuvent souffrir deux choses prises dans dix. Or le nombre 100 contient 10 & 2, car 10 est sa racine, & 2 son exposant.

Les mesmes nombres ou chiffres pourroient encore fournir un autre exemple, sçavoir si on prenoit les deux choses dans neuf différentes, comme si on cherchoit tous les nombres de deux chiffres qui n'ont point de zero; car par ce moyen on n'aura que neuf lettres: or en chaque dixaine il y a neuf nombres qui n'ont point de zero, & il n'y a que neuf dixaines qui ayent deux lettres, car les nombres de la premiére n'ont qu'une lettre: si donc on multiplie 9 par 9, on aura 81, qui est la varieté requise de deux choses prises dans neuf; c'est la mesme chose aux autres quantitez. Mais voicy comme on fera voir la verité de cette regle.

Pour ne point sortir de nostre exemple de neuf, on voit premiérement que si on ne prend qu'une seule chose dans neuf différentes, on n'aura que 9 variétez: mais si on prend deux choses, puisqu'aprés chacune des neuf choses on peut mettre chacune des mesmes l'une aprés l'autre; pour avoir cette varieté, il faudra multiplier 9 par 9, & on aura 81, qui est le quarré de 9.

Que si on prend trois choses dans les neuf, on pourra devant chacune des 81 combinaisons précédentes mettre chacune des neuf choses: il faudra donc, pour avoir la varieté de trois choses prises dans neuf, multiplier 81 par 9, pour avoir 729 cube de 9.

Et ainsi continuant, on fera voir que ponr avoir la variété de quatre choses prises dans neuf, il faut multiplier 729 par 9, pour avoir le quarré quarré de 9, parce que devant chacune des 729 façons dont on aura pris & arrangé trois choses, on pourra mettre chacune des neuf dans lesquelles on les a prises.

De mesme, pour cinq choses prises dans neuf, on prendra la cinquiéme puissance de 9, &c.

Il faut seulement prendre garde que la diversité des choses qu'on prend, comme est icy 9, sert toûjours de racine, & la multitude des mesmes choses sert d'exposant.

Combinaison de changement ou de choix.

La seconde espéce de combinaison est nommée de changement, ou de choix; à la différence de la premiére, où on suppose que les mesmes choses demeurent toûjours: mais en celle-cy, on les varie, & on en fait comme divers amas pris

dans une grande multitude. Par exemple, si d'un Régiment de 1000 hommes, on en détache 100, & qu'on veüille sçavoir en combien de sortes on peut faire une Compagnie de 100 soldats pris dans un Régiment de 1000; ou bien si on veut sçavoir en combien de sortes on peut avoir les douze cartes du jeu de piquet, où il y en a trente-six; on voit manifestement que l'ordre ne fait rien à cette multitude, car la différente disposition des cartes dans la main ne change rien au jeu, encore qu'on puisse bien avoir égard à l'ordre tant aux soldats en les arrangeant diversement, qu'aux cartes en les joüant de plusieurs maniéres.

Cette combinaison sera aussi divisée en deux espéces comme la précédente, sçavoir celle en laquelle toutes les choses sont différentes, comme en l'assemblage des soldats, & celle en laquelle il se trouve plusieurs choses semblables; comme si on avoit un cent de diverses sortes de fruits, sçavoir de chacune espéce un cent, & qu'on voulust sçavoir en combien de façons on pourroit remplir un panier d'un cent de ces fruits, ou bien si on avoit ensemble douze jeux de piquet, & qu'on voulust voir en combien de sortes on pourroit avoir douze cartes à les prendre dans ces douze jeux.

Pour trouver la multitude des choix, il faut remarquer que toute combinaison meslée estant divisée par l'ordre, donne la combinaison de changement, pourveû que toutes les choses soient différentes, ou qu'il y en ait toûjours autant de semblables.

Exemple. Si on avoit six paniers dont chacun fut plein d'une espéce de fruit différent des autres, mais égaux entre eux, & qu'on voulust voir en combien de façons on pourroit prendre un cent de ces fruits dans les six paniers, supposant toûjours que dans chaque panier tous les fruits soient égaux, & qu'il n'y ait rien à choisir, de sorte que chaque espéce de fruit soit réputée pour un mesme fruit, ainsi que les lettres de l'Alphabet, chacune desquelles ne differe en rien de sa semblable en ce qui regarde l'usage qu'on en fait dans les dictions; & ainsi dans la diction, *Anna*, le premier *a* n'est pas autre que le second: or on entend que les fruits d'une mesme espéce soient icy pris en la mesme façon que les lettres.

Si donc on veut avoir la variété des sortes de choix qu'on peut faire d'un cent de ces fruits dans les six paniers, dans chacun desquels il faut supposer aussi qu'il y ait pour le moins un cent de fruits, afin que si on veut on puisse prendre un cent de ces fruits tous égaux, il faut faire la combinaison générale de cent choses prises dans six sortes de choses, si on y comprend aussi l'ordre.

Et parce que la variété des choses est 6, ce nombre sera la racine, & 100 qui est la multitude des choses qu'on prend servira d'exposant. On prendra donc la centiéme puissance de 6 pour la variété des diverses façons dont on pourroit prendre & arranger les fruits pris dans les six paniers.

Et parce que la combinaison générale contient la combinaison de l'ordre en toutes les façons possibles, tant des choses semblables que des différentes, dont l'ordre est différent, on ne la peut pas diviser par l'ordre; car la somme de plusieurs diviseurs donne un autre quotient que s'ils estoient séparez, c'est-à-dire, que si on divisoit séparément par chacun d'eux; joint que quelques-unes de ces variétez n'ont point d'ordre, c'est à-dire, ne se peuvent mettre qu'en une seule façon, comme lorsque les choses qu'on a prises sont toutes semblables, & les autres, où il se trouve plusieurs choses semblables, ont fort peu de variétez d'ordre, par exemple, si on a quatre choses, elles seront considerées confusément, soit qu'on les prenne toutes differentes, comme *a*, *b*, *c*, *d*, ou deux semblables, & deux autres différentes, comme *a*, *a*, *b*, *c*, ou trois semblables, & une autre comme, *a*, *a*, *a*, *b*, ou deux d'une sorte & deux d'une autre, comme *a*, *a*, *b*, *b*, ou enfin toutes quatre semblables comme, *a*, *a*, *a*, *a*, ou, *b*, *b*, *b*, *b*.

A, *b*, *c*, *d* se change en vingt-quatre façons; *a*, *a*, *b*, *c* en douze; *a*, *a*, *a*, *b* en

quatre; *a, a, b, b* en six, & enfin *a, a, a, a,* ne peut estre disposé que d'une sorte, & n'a aucun ordre : mais voicy comme on en separera l'ordre.

Nous avons dit que la combinaison de changement estoit de deux sortes; l'une où toutes les choses sont différentes comme aux douze cartes du piquet; l'autre où elles peuvent estre indifféremment, ou toutes différentes, ou toutes semblables, ou en partie dissemblables & en partie semblables, comme si on prenoit les douze cartes du piquet dans douze jeux de piquet.

Pour l'une & l'autre sorte de choix, il faut faire douze nombres par multiplication compris le premier qu'on multiplie, qui est 36, à cause qu'il y a trente-six sortes de choses : mais pour le premier où tout est différent, il faut multiplier par les nombres inférieurs, sçavoir par 35, & le produit par 34, &c. & pour le second qui peut avoir des choses semblables, il faut multiplier par les superieurs, sçavoir par 37, 38, &c.

Ce qu'il faut observer en cecy est que le nombre par lequel on commence les multiplications est celuy de la variété, & la multitude des nombres qu'il faut trouver par les multiplications le premier compris, est la multitude des choses.

Ainsi voulant avoir toutes les façons du jeu de piquet, sçavoir, de douze cartes prises dans trente-six, en sorte qu'elles soient toutes différentes, je prens 36 pour le terme & commencement des multiplications; & parce que toutes les cartes doivent estre différentes, il faudra multiplier 36 par les nombres précédens moindres, sçavoir, par 35, & le produit 1260 par 34, pour avoir 42840, qu'il faudra encore multiplier par 33, & continuer tant qu'on ait douze nombres, ce qui se fera aprés onze multiplications, & le dernier nombre par lequel il faudra multiplier sera 25, sçavoir 11 moins que 36; car on prend toûjours un moins que la multitude des choses, à cause que le nombre de la variété, sçavoir 36, est pris pour le premier nombre.

Le dernier produit est 599555620984320000, qui contient la variété de douze cartes prises en trenre-six avec l'ordre, c'est-à-dire supposant qu'on les arrange aussi en toutes les façons possibles, qui est le premier cas, ou premiére sorte de la combinaison meslée, qui suppose toutes les choses différentes, mais prises en un plus grand nombre, & supposant aussi l'ordre.

Que si on veut avoir les jeux de piquet sans l'ordre, puisque cét ordre ne change point le jeu, il faudra diviser le nombre trouvé 5995556209984320000 par la combinaison de l'ordre de douze choses, sçavoir par 479001600, & on aura 1251677700 variétez de jeux de piquet.

Pour ce qui est de joüer & de jetter les cartes sur la table, il faut avoir égard à l'ordre, & chaque jeu se peut joüer en 479001600 sortes, car telle est la combinaison de l'ordre de douze choses, & ainsi pour avoir en tout en combien de sorres on peut joüer les douze cartes prises en 36, il faut multiplier 1251677700 par 479001600, pour avoir le nombre cy-devant trouvé 599555620984320000, qui montre en combien de façons on peut avoir & joüer les douze cartes.

Voilà pour ce qui appartient à la combinaison de changement, & à la combinaison meslée lors que toutes les choses sont différentes.

Car la meslée, où l'ordre est compris se trouve comme on a veû multipliant le nombre de la variété des choses, comme 36 par les nombres précédens 35, 34, &c. tant qu'on ait autant de nombres ou produits compris 36, que la multitude des choses, qui est 12, & prenant le dernier produit pour le nombre requis.

Et la combinaison de changement se trouve divisant ce nombre, sçavoir le dernier produit, par le nombre de la combinaison d'ordre de la multitude des choses, qui est icy 12.

Reste à donner un exemple de la mesme combinaison de changement, lors que les choses peuvent estre semblables.

Que les douze cartes se prennent dans douze jeux de piquet de trente-six cartes chacun, afin qu'elles puissent estre toutes semblables, il faudra, comme on a dit cy-devant, multiplier 36 par les nombres suivans, sçavoir par 37, 38, &c. tant qu'on ait 12 nombres ou produits, sçavoir autant que la multitude des choses, & ainsi le dernier nombre qui multipliera sera 47, puis diviser le produit par l'ordre du nombre de la multitude, sçavoir par l'ordre de 12.

De mesme pour les six paniers de fruit dans tous lesquels on choisir cent fruits à discrétion, avec liberté de prendre si on veut tous les cent de mesme espece, & d'un mesme panier.

Parce que le nombre de la variété est 6, je prens 6 pour le terme ou commencement des multiplications; je le multiplie donc par 7, & le produit 42 par 8; & le produit par 9, tant qu'on ait 100 nombres, compris 6, & ainsi le dernier nombre qui multipliera sera 105, qui surpasse 6 de 99, sçavoir de 1 moins que le nombre de la multitude 100, à cause que 6 est conté pour le premier nombre; & le dernier produit estant divisé par l'ordre de cent choses, qui est la multitude des choses qu'on prend, donnera le nombre requis.

Que si on avoit des tables faites de la combinaison d'ordre, qui est la plus ordinaire & la plus en usage, on y pourroit prendre la combinaison de 105, sçavoir de 1 moins que la somme des deux nombres de variété & de multitude, & la diviser par la combinaison de 5, sçavoir de 6--1; car si on avoit commencé par 2 à multiplier, & qu'on eust continué jusques à 105, on auroit la combinaison de 105: mais parce qu'on n'a commencé que par 6, il s'ensuit que le produit devroit estre multiplié par la combinaison de 5 pour parvenir à celle de 105; & par conséquent, si on divise celle de 105 par celle de 5, on aura le nombre requis, qui doit estre divisé par celle de 100, comme il a esté dit.

Mais parce que de si grandes divisions & multiplications sont ennuyeuses, on se pourra servir du moyen suivant pour se passer de la division, & diminuer beaucoup les multiplications.

Nous prendrons l'exemple des jeux de piquet dans les deux façons précédentes.

1° On prend douze cartes dans trente-six toutes différentes, & on demande en combien de sortes je puis avoir les douze cartes: parce que 36 est la variété des choses, il me servira de terme; & parce qu'il y a douze choses, je prens 12 nombres, compris 36; car la multitude des nombres qui se multiplient doit suivre la multitude des choses qui se combinent; & parce que les cartes sont toutes différentes, & qu'il n'y en a point de semblables, je prens les nombres moindres que 36, comme on voit icy, sçavoir 36, 35, 34, &c. le produit desquels il faudroit diviser par la combinaison d'ordre de douze choses, laquelle combinaison se trouve, en multipliant l'un par l'autre tous les nombres jusqu'à 12, sçavoir 1, 2, 3, &c.

Puis donc que le produit des nombres inférieurs doit diviser celuy des supérieurs, il faut que les inférieurs se trouvent tous séparément dans les supérieurs, autrement leur produit ne diviseroit pas l'autre grand produit.

Que les inférieurs soient donc ostez des supérieurs, & la division sera faite, comme on voit icy.

								7.	9.		
36.	35:	34,	33,	32,	31,	30,	29,	28,	27,	26,	25.
				2		3					
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.

Je considére donc les supérieurs, & je trouve premiérement 36, qui est le produit de 3 & 12; j'oste donc 36 de la ligne supérieure, & 3 & 12 de l'inférieure.

Je viens à 35, qui est produit par 5 & 7; j'oste donc 35 d'un costé, & 5 & 7 de l'autre.

34 est

34 est fait de 2 & 17; mais parce que 17 n'est point en la ligne inférieure, je passe à une autre, & considère 33, qui est produit par 3 & 11; j'oste donc 33, & de la ligne inférieure j'oste 3 & 11; mais parce que le nombre 3 ne s'y trouve plus, je l'oste de quelque composé de la mesme ligne inférieure, comme de 9, & je remets un 3 dessus, parce que 9 est fait & produit de deux 3.

32 est fait de 4 & 8; j'oste donc 32 de la ligne supérieure, & 4 & 8 de l'inférieure. | 31 est nombre premier.

30 est fait de 3 & 10; j'oste donc 30, & de la ligne inférieure j'oste 3 & 10, sçavoir le 3 que j'avois mis sur le 9.

Il ne reste plus en bas que 2 & 6: le 6 est fait de 2 & 3; j'oste donc 3 de quelque nombre de la ligne supérieure, comme de 27, reste 9, que j'écris dessus 27; & ostant ainsi le 3 de 6, reste 2, que j'écris sur 6, (car icy, où il est question de parties qui font le nombre par multiplication, oster un nombre c'est diviser par ce nombre.)

Enfin il reste en bas 2 & 2, qui font 4, que j'oste de quelque nombre de la ligne supérieure, comme de 28, reste 7, que j'écris dessus, & j'oste tant 28 que les deux 2 de la ligne inférieure.

Reste donc en la ligne supérieure à multiplier, 34, 31, 29, 7, 9, 26, 25, l'un par l'autre, dont le produit fait 125167770 0 pour la diversité des jeux de piquet, comme on avoit trouvé cy-devant.

Que si on prend les douze cartes dans douze jeux de trente-six cartes chacun, les douze cartes pourront estre semblables: il faut donc prendre 12 nombres, suivant la multitude des cartes, à commencer par 36, qui représente la variété des cartes, & poursuivant par les nombres plus grands, comme on voit icy, il faudroit diviser le produit des supérieurs par celuy des inférieurs: mais pour épargner cette division, on ostera les semblables comme cy-devant, sçavoir pour 36, on ostera 3 & 12.

19 ... 23.
36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47.
2.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

Pour 40. | 4 & 10. pour 42. | 6 & 7. pour 44, 11 & 4.

Mais parce qu'il n'y a point de 4, on le prendra dans 8, & on mettra un 2 dessus. Pour 45 on ostera 5 & 9, & il restera 2 & 2 en la ligne inférieure; on en ostera l'un de 38, & l'autre de 46, restera 19 & 23, qu'on écrira dessus.

Restera donc 37, 19, 39, 41, 43, 23, 47, qu'il faut multiplier l'un par l'autre; le produit 52251400851 sera la variété requise des jeux qu'on peut avoir, sçavoir de douze cartes prises dans douze jeux de trente-six cartes chacun.

Corollaire premier.

De ce qui a esté dit, il s'ensuit que tout nombre qui dénote la variété des choses différentes sans l'ordre, dénote aussi la variété de quelques autres, entre lesquelles toutes ou quelques-unes peuvent estre semblables pareillement sans l'ordre, éxemple.

Le nombre qui montre la variété de douze cartes prises dans trente-six, montre aussi la variété de douze cartes prises dans douze jeux de vingt-cinq cartes chacun, c'est-à-dire, supposant douze jeux semblables, chacun desquels auroit vingt-cinq cartes différentes.

La raison se tire de l'opération, car aux deux cas des cartes différentes ou semblables, on prend le nombre de la variété pour le premier; & si les choses sont différentes, on prend les nombres moindres: que si elles peuvent estre

semblables, on en prend autant qui soient plus grands que le nombre de varieté : mais si du grand nombre comme 36, on descend au moindre 25, & qu'on multiplie les nombres qui sont entre deux, comme il a esté dit, on aura le mesme produit, que si on prend 25 pour le nombre de la varieté, & qu'on monte jusqu'à 36 : mais le premier se fait quand les choses sont differentes, & le second quand elles peuvent estre semblables : donc un mesme nombre montre la combinaison des choses differentes, & de celles aussi qui peuvent estre semblables, en le divisant par la combinaison d'ordre de douze choses : mais des deux nombres qui sont les extrémes de ceux qui le multiplient, le plus grand sera la varieté des choses quand elles sont toutes differentes, comme 36 ; & le moindre comme 25, quand les choses peuvent estre toutes semblables.

De mesme, le nombre qui represente la diversité ou combinaison de douze cartes prises en douze jeux de trente-six cartes chacun, montre aussi la combinaison de douze cartes prises en quarante-sept.

Ainsi pour passer des cartes semblables aux differentes, on change la varieté des cartes, & on prend le douziéme nombre en augmentant si on se sert de douze cartes chaque fois, & au lieu de 36, on aura 47.

Mais pour passer des choses differentes aux semblables, il faut prendre le douziéme nombre en diminuant, & au lieu de 36, on prend 25, car le nombre de la multitude, sçavoir 12, ne change point.

Corollaire second.

Lors qu'on prend les douze cartes dans douze jeux de cartes, afin qu'elles puissent estre toutes semblables, on les peut considérer avec l'ordre, ou sans l'ordre : si on y met l'ordre, il se faut servir des puissances quarrées ; si on n'y met point l'ordre, on se servira des puissances triangulaires.

On nomme icy puissance quarrée celle qui se fait par multiplication de la racine par elle-mesme, puis du produit par la mesme, &c. comme sont les puissances ordinaires.

On voit une table desdites puissances triangulaires jusqu'à la douziéme puissance de 25. in lib. Harmonicon, du P. Mersenne, page 136.

On nomme puissance triangulaire celle qui se fait par l'addition des puissances qui ont 1 moins d'exposant depuis la premiére, qui est 1 jusques à celle qui a pareille racine : ainsi la sixiéme puissance triangulaire de 5 est la somme des cinq premiéres cinquiémes puissances, & la cinquiéme puissance de 5 est la somme des cinq premiéres quatriémes puissances, & la quatriéme puissance de 5 est la somme des cinq premiers tétraédres, ou troisiémes puissances, & le tétraédre de 5 est la somme des cinq premiers triangles, comme le cinquiéme triangle, ou le triangle de 5 est la somme des cinq premiers nombres.

En chaque sorte on prend pour racine la varieté des choses, & pour exposant leur multitude : ainsi pour avoir les douze cartes lors qu'elles peuvent estre semblables avec l'ordre, on prend la douziéme puissance quarrée de 36, parce qu'il y a de trente-six sortes de cartes ; mais si on prend les mesmes douze cartes sans y joindre l'ordre, il faudra prendre la douziéme puissance triangulaire de 36.

Corollaire troisiéme.

On pourra tirer delà une régle bien facile pour avoir les puissances triangulaires. On demande, par exemple, la sixiéme puissance triangulaire de 5, la racine est 5, & l'exposant est 6, on prendra six nombres de suite dont la racine 5 sera le moindre, sçavoir 5, 6, 7, 8, 9, 10 ; il les faut multiplier l'un par l'autre, & diviser le produit par l'ordre de la multitude des nombres, qui est représentée par l'exposant 6, & cét ordre est 720, ou bien, pour éviter la division, on

ostera de ces six nombres, les six nombres premiers, 1, 2, 3, 4, 5, 6, comme on a veû cy-devant, & il restera 7, 3 & 10. dont le produit 210 est la puissance requise, sçavoir la sixiéme puissance triangulaire de 5.

	3.				
5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	2.	3.	4.	5.	6.

Déterminer en combien de façons trois dez peuvent faire leurs points.

POUR dire en général combien ils peuvent faire de divers points, il faut cuber 6, & l'on a 216 : mais pour sçavoir en particulier comment chaque point se peut faire, nous disons ainsi. Depuis 3 jusqu'à 18 nous avons seize nombres, les huit premiers se rapportent aux huit derniers, c'est-à-dire que 3 & 18 sont égaux à 4 & 17 ; 5 & 16 valent 6 & 15 ; 7 & 14 valent 8 & 13, &c. Or pour avoir en combien des maniéres chaque nombre peut venir : pour les six premiers, ou pour les six derniers, il faut prendre les six premiers triangles, ainsi l'on pourra amener 3 ou 18 en une sorte, car le premier triangle est 1 : 4 ou 17 en trois sortes, car 3 est le second triangle : 5 ou 16 en six façons, car le troisiéme triangle est 6 ; 6 ou 15 en dix sortes, car 10 est le quatriéme triangle : 7 ou 14 en quinze sortes, parce que 15 est le cinquiéme triangle : 8 ou 13 en vingt & une sortes, d'autant que 21 est le sixiéme triangle ; & voilà pour les six premiers, & pour les six derniers. Pour les quatre restans, sçavoir 9, 12, 10, 11. Pour 9 & 12, il faut prendre le quarré de 5, c'est-à-dire 25, & pour 10 & 11, il faut prendre le cube de 3, qui est 27, & ces deux nombres 25 & 27 déterminent les diverses maniéres dont se trouveront ces quatre derniers. Or toutes ces façons différentes, sçavoir, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, estant jointes ensemble, font 108, & les doublant nous aurons 216, qui est le cube de 6, que nous avons pris au commencement.

Question sur la régle d'Interest.

UN homme met un ducat à la Banque à multiplier pour 32 ans, à la charge d'en avoir les intérests, & intérest d'intérest à raison de 5 pour 100. On demande à combien se montera le principal & les intérests au bout de ce temps.

L'intérest est $\frac{1}{20}$ par an ; donc au bout de l'an le principal avec l'intérest se montera à $\frac{21}{20}$ de ducat.

Pour les années suivantes il faut prendre les puissances du numérateur & du dénominateur de cette fraction, & en faire une fraction, & le nombre des années sera l'exposant de ces puissances : il faudra donc prendre la trente-deuxiéme puissance de 21 & de 20 pour le principal & les intérests de 32 ans. J'ay pris 32 pour la commodité de la multiplication, à cause qu'il n'y aura qu'à prendre le quarré des nombres précédens. Ainsi

Pour 2 ans on aura $\frac{441}{400}$ de ducat.

Pour 4 ans [illegible], qui se trouve prenant le quarré de $\frac{441}{400}$.

Pour 8 ans [illegible].

Pour 16 ans [illegible].

Enfin pour 32 ans on aura [illegible], qui font $4\frac{3}{4}$ ducats peu plus : le profit sera donc $3\frac{3}{4}$ ducats & un peu plus, & ainsi il sera presque quadruple du principal.

Si on vouloit continuer à calculer l'intérest pour quelques autres années, il faudroit multiplier le numerateur par 21, & le dénominateur par 20 : mais pour éviter la difficulté de ces grands nombres, il faut retrancher une partie de la fra-

ction qui n'apporte pas un profit considérable & prendre seulement [illegible]. Donc pour 33 ans on auroit [illegible], qui est un peu plus de 5 ducats, qui feroient 4 ducats de profit. Et si on l'y laissoit encore une autre année, on auroit [illegible], qui sont 5 ducats $\frac{1}{4}$ peu plus, c'est donc 4 ducats $\frac{1}{4}$ de profit.

Des Combinaisons multiples.

ON a considéré de deux sortes de Combinaisons; l'une d'ordre, & l'autre de varieté ou changement, chacune desquelles peut estre multipliée: en voicy des exemples.

Six choses se peuvent ranger en 720 façons: que ce soient par exemple six soldats à qui je donneray six sortes d'armes: parce que les armes se peuvent encore combiner en 720 façons, il faudra prendre le quarré de 720, & on aura 518400 façons de les ranger & de les armer: mais si avec cela on leur donne six sortes de livrées, il faudra prendre le cube de 720 pour la varieté dont on les pourra ranger avec leurs diverses armes & livrées, ce qui se fera en 373248000 façons.

Mais si on n'avoit pas autant de sortes d'armes & de livrées que de soldats; par exemple, si on n'avoit que de quatre sortes d'armes, & que de l'une des sortes on en eust trois, comme si on avoit trois épées, un mousquet, une pique, & une hallebarde, & qu'on n'eust que trois sortes de livrées, sçavoir deux de chaque sorte: il faudra prendre pour les armes la combinaison de six choses entre lesquelles il y en auroit trois semblables: or on a fait voir que pour avoir cette combinaison, il faut diviser la combinaison de six, sçavoir 720, par six qui est la combinaison des trois choses semblables, & on aura 120 pour les diverses façons dont on peut armer ces soldats. On multipliera donc 720 par 120, & on aura 86400 maniéres de ranger & d'armer ces soldats.

Pour leurs livrées, parce qu'il y en a deux de chaque sorte & de trois sortes en tout, il faudra diviser 720 par la combinaison de deux choses répetées trois fois, qui est huit, parce que deux multipliant deux fait quatre, qui estant encore multiplié par deux donne huit: divisant donc 720 par huit, on aura 90, par lequel il faudra multiplier le produit qu'on vient d'avoir, qui est 86400, & on aura en tout 7776000 maniéres d'arranger ces soldats avec leurs armes & leurs livrées differentes.

Que si au contraire on avoit plus de sortes d'armes & de livrées qu'il n'y a de soldats; par exemple, si on avoit sept sortes d'armes & huit sortes de livrées qu'on voulust donner à six soldats en toutes les maniéres possibles, on se serviroit de la combinaison de varieté: voicy comme se fait cette combinaison.

Pour les armes, parce qu'il y en a de sept sortes, mais qu'on en prend que six à chaque fois, on multipliera 7 par les nombres moindres jusques à ce qu'on ait 6 nombres, sçavoir jusqu'à 1: on multipliera donc 7 par 6, le produit 12 par 5, puis le produit par 4, 3, & 2, on aura 5040, qui est le mesme nombre que celuy de la combinaison d'ordre de sept choses, parce que 1 ne multiplie point.

Pour les livrées, parce qu'il y en a de huit sortes, & qu'on ne se sert que de six, il faudra prendre le changement de six choses prises dans huit, qui se trouve en multipliant l'un par l'autre six nombres commençant par 8 en diminuant, sçavoir 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le produit est 20160 y compris l'ordre.

Il faudra donc multiplier 720, qui montre la quantité de façons dont on peut ranger six soldats, par 5040, qui est la varieté de leurs armes, & le produit 3628800 (qui contient l'ordre des soldats & des diverses maniéres dont on les peut armer) par 20160, qui est la varieté des livrées, & on aura 73156608000, qui montre toutes les façons d'arranger ces soldats, & de leur donner diverses armes & livrées.

La

La combinaiſon de variété ſe peut auſſi multiplier par une autre combinaiſon de variété.

On a ſix places à pourvoir de Commandans, mais on n'en veut placer d'abord que trois: on demande en combien de maniétes on peut placer dans trois de ces places trois de ces Commandans pris dans ſix qui ſont arreſtez. On prendra l'ordre de trois choſes priſes dans ſix, multipliant ſix par cinq, & le produit par quatre; puis diviſant le produit 120 par ſix, qui eſt la combinaiſon d'ordre de trois choſes, on aura 20 pour le changement de trois choſes priſes dans ſix; ou par abregé ou multipliera ſeulement cinq par quatre. La combinaiſon de trois places priſes dans ſix eſt pareillement 20; on multipliera donc 20 par 20, & on aura 400 façons de placer trois de ces Commandans chacun dans l'une des ſix places.

Or il n'importe pas qu'il y ait autant de places que de Commandans: il y en peut avoir plus ou moins, & la régle ſera toûjours la meſme.

Si par exemple, il n'y avoit que cinq places, il faudroit prendre la variété de trois choſes priſes dans cinq, qui eſt 60, l'ordre compris, qui eſtant diviſé par ſix qui eſt l'ordre de trois choſes, on a dix, lequel multiplié par 20, qui eſt la combinaiſon de trois Commandans pris dans ſix, on auroit 200 façons de les placer. Demeſme s'il y avoit huit places on prendroit la combinaiſon de trois pris dans huit, qui eſt 336 compris l'ordre, qui eſtant diviſé par ſix, qui eſt l'ordre de trois choſes, donne 56, qui multiplié par 20 donneroit 1120 façons de placer ces trois Commandans.

Il y a quelqu'autre choſe à conſidérer dans la combinaiſon pour l'aſſemblage des lettres qui forment les dictions: il y en a quelques-unes qui ne ſe peuvent prononcer quand elles ſont enſemble, c'eſt pourquoy il eſt néceſſaire de les ſeparer.

On veut ſçavoir, par exemple, combien on peut faire de dictions des huit lettres *a, b, c, d, e, i, o, ſ,* à telle condition que les trois *b, c, d,* ne ſe trouvent jamais enſemble. Il faudra conſidérer ces trois lettres comme une ſeule, & ainſi il n'y aura que ſix choſes, dont la combinaiſon eſt 720: mais parce que ces trois lettres ſe peuvent trouver de ſuite en ſix façons, il faut multiplier 720 par ſix; lo produit eſt 4320, qu'il faut oſter de la combinaiſon de huit choſes qui eſt 40320, reſtera 36000 dictions ou anagrammes qu'on pourra faire avec ces huit lettres ſans que *b, c, d* ſe trouvent enſemble.

On pourroit encore demander que deux de ces conſones ne ſe trouvaſſent jamais au commencement ni à la fin des dictions. Pour le trouver il faut voir combien il ſe fait de changemens pendant que deux de ces lettres ſont au commencement ou à la fin; & parce qu'il reſte ſix lettres, on aura 720 changemens: mais entre ces 720 il y en a 120 auſquels la troiſiéme conſone ſe trouve contre les deux autres, & cela eſt compris dans les 4320 qu'il a fallu oſter de 40320; il faut donc oſter 120 de 720, reſte 600 qu'il faudra multiplier par 12, parce qu'on peut prendre les deux lettres dans les trois en trois façons; & à cauſe de l'ordre il faudra multiplier trois par deux; & parce qu'il ne faut pas auſſi que les deux lettres ſe trouvent à la fin, on aura douze variétez, qui multipliées par 600 donnent 7200 qu'il faut oſter de 36000, reſtera 28800 anagrammes.

Pour ſçavoir en quel rang eſt une diction dans le grand nombre de la combinaiſon générale à commencer à celles d'une lettre, puis à celles de deux, de trois, & ainſi du reſte, juſqu'au nombre des lettres dont noſtre diction ſera compoſée, comme l'on fait aux chifres où l'on commence à compter par les nombres qui n'ont qu'un chifre, puis on vient à ceux qui en ont deux, &c; il faut voir la quantiéme eſt la premiére lettre à main gauche dans l'alphabet, & de combien de lettres eſt compoſée la diction: par exemple, je veux ſçavoir le quantiéme eſt ce mot *Aſer,* qui eſt de quatre lettres, dont il y en a 234256, & les autres dictions moindres y eſtant ajouſtées, ſçavoir celles de 3, 2 & une lettre, il y en aura 245410.

Pour ſçavoir donc le quantiéme il eſt dans ce dernier nombre à commencer à compter par *a*, puis *b*, &c, en aprés *a a*, *a b*, &c; je prens la premiére lettre *A*, qui eſt la premiére de toutes, & ne vaut qu'un mille, qui vaut 10648 (nombre des mots de trois lettres) puis je viens à *ſ*, qui eſt la dix-ſeptiéme centaine, & partant je multiplie 484 par 17, le produit eſt 8228; puis à *e*, qui eſt la cinquiéme dixaine dont chacune vaut 22, qui multiplié par cinq, font 110; la derniére lettre eſt *r*, qui eſt la ſeiziéme, puis j'adjouſte ces quatre ſommes enſemble, ſçavoir 10648, 8228, 110 & 16, le total eſt 19002; de ſorte que *Aſer* eſt le 19002 mot dans le nombre de 245410, ou ſi l'on veut, dans le dernier nombre de la combinaiſon générale de 22, qui eſt l'addition de tous les autres.

Le lieu de ce mot *Baal* ſe trouve ainſi: il eſt composé de quatre lettres, & partant la premiére à gauche eſt mille, qui exprime ſon nombre 10648 fois, & cette lettre *B* eſt la deuxiéme lettre, partant il faut multiplier ce nombre par deux, ce ſera 21296; la ſeconde lettre eſt *a*, qui eſt centaine, & qui vaut 484; la troiſiéme eſt encore *a*, qui eſt dixaine, & qui vaut 22; la derniére eſt *l*, qui eſt la dixiéme lettre, partant il faut aſſembler 21296, 484, 22 & 10, & on trouvera que *Baal* ſera le 21812 mot.

Le lieu de *Levi* ſe trouve ainſi; *L* eſt la dixiéme lettre, & partant je multiplie le mille qui eſt 10648 par 10, le produit eſt 106480; *e* eſt la cinquiéme lettre: je multiplie donc 484 par cinq, le produit eſt 2420; *v* eſt la dix-neuviéme lettre que je multiplie par 22, le produit eſt 418; *i* qui eſt la derniére, eſt la neuviéme; j'aſſemble donc 106480, 2420, 418 & 9, & je trouve que *Levi* eſt la 109327 diction.

Toutes les autres dictions ſe trouvent de meſme, ſoit qu'elles ayent plus ou moins de lettres; & il faut remarquer que la premiére choſe qu'il faut faire eſt de voir de combien de lettres la diction eſt compoſée, puis voir la quantiéme lettre eſt la premiére à main gauche, & par le nombre du rang qu'elle tient dans l'alphabet multiplier le nombre de la combinaiſon générale précédent celuy des lettres dont eſt compoſée la diction: par éxemple, ſi elle avoit huit lettres, & que la premiére lettre fuſt *G*, qui tient le ſeptiéme lieu dans l'alphabet, il faudroit multiplier le nombre de la combinaiſon de ſept choſes, qui eſt celuy qui précéde huit, par ſept, & puis continuer aux autres lettres. Si la diction avoit ſix lettres, & que la premiére fuſt un *V*, qui tient le dix-neuviéme lieu, il faudroit multiplier la combinaiſon de cinq choſes par dix-neuf, & ainſi des autres: ou bien commencer par la premiére lettre à main droite, qui ne vaut que ſon nombre, & la ſeconde le vaut 22 fois.

Par ce moyen on pourroit écrire des lettres bien obſcures, & qu'il ſeroit bien difficile de déchifrer, ſi l'on n'en ſçavoit la méthode; ſçavoir ſi on mettoit au lieu des mots le rang qu'ils tiennent dans le grand nombre: mais ce n'eſt pas aſſez de ſçavoir écrire, ſi l'on ne ſçait lire ſon écriture, & ce n'eſt pas peu de choſe que de ſçavoir lire celle-cy; car ceux meſmes qui l'auroient écrite ne la pourroient lire, s'ils n'en ſçavoient la méthode, quoi-qu'ils ſceuſſent celle de l'écrire.

Ayant donc un nombre donné, il faut prendre à la table des combinaiſons le plus grand nombre qu'on pourra, qui néanmoins puiſſe ſervir de diviſeur au nombre donné. La diviſion faite il faut prendre ce qui eſt reſté, & le diviſer par la combinaiſon qui précéde, & le quotient monstre la quantiéme lettre on doit prendre dans l'alphabet, de ſorte qu'il ne faut pas que le quotient paſſe jamais 22, & il faut continuer à diviſer juſques à ce que l'on diviſe par 22, & cette derniére diviſion faite, il faut voir ce qui reſte & mettre la lettre qui convient à ce nombre pour la derniére. Il faut remarquer que ſi l'on ne pouvoit arriver à la diviſion par 22, ou qu'icelle eſtant faite il ne reſtaſt rien, ou que l'on ne puſt pas diviſer par tous les nombres des combinaiſons moindres que le premier qu'on a pris, & que le reſte de la premiére diviſion fuſt trop petit pour ce faire, le

nombre que l'on auroit pris pour diviseur seroit trop grand, & il faudroit prendre celuy de devant, qui est moindre, & qui n'est que $\frac{1}{22}$ du premier, comme en ce nombre 234299, si on prenoit 234256 pour diviseur, le quotient seroit 1, & il ne resteroit plus que 43, que l'on ne pourroit diviser par les autres nombres; ainsi il faudroit prendre celuy de devant, qui est 10648, & cela arrive toûjours aux dictions qui commencent par un *z*, & à celles qui commencent par un *y* suivi d'un *z*. 2°. Il faut remarquer que la diction aura toûjours une lettre plus que le nombre des combinaisons qui servira de diviseur, comme en cét éxemple, où 10648 sert de diviseur, qui est le nombre de la combinaison de trois choses, il y aura quatre lettres; car ayant divisé 234299 par 10648, le quotient sera 21 qui vaut *y*, & il restera 10691 qu'il faudra diviser par 484, & le quotient sera 22, qui est un *z*, & il restera 43, qu'il faudra diviser par 22, le quotient est 1, qui est *a*, & le reste est 21 qui est *y*; de sorte que ledit nombre vaudra autant que *yzay*. 3°. Il est à remarquer qu'il faut diviser par tous les nombres moindres jusques à 22, & qu'il n'en faut passer aucun, & partant si le reste estoit moindre que le nombre par lequel on devroit diviser aprés, le quotient seroit trop grand, partant il le faudroit diminuer de l'unité. Si le quotient estoit 1, & que le reste fust trop petit, il faudroit changer de diviseur, comme en l'éxemple cy-dessous; par éxemple, en ce nombre 21600, je prens 10648 pour diviseur; le quotient est 2, & il reste 304 qui est moindre que 484, partant je prens 1 pour quotient, reste 10952, que je divise par 484, le quotient est 22, & il reste 304 que je divise par 22, le quotient est 13, & il reste 18; de sorte que ce nombre sera *Azot*.

Si on vouloit voir quel rang tient une diction entre celles qui ont mesme nombre de lettres, comme une de trois lettres entre celles de trois lettres, dont il y en a 10648, il faudroit multiplier la premiére lettre à main gauche, sçavoir le rang qu'elle tient dans l'alphabet moins un par 484, qui sont les centaines; puis la seconde lettre aussi moins un par 22, & puis mettre le lieu de la derniére sans en rien oster, comme à ce mot *Asa* la premiére lettre vaut 1, & partant il la faut passer, parce qu'ostant un d'un, il ne reste rien; je viens à *s* qui est la dix-septiéme lettre dont j'oste 1, reste 16 que je multiplie par 22, & au produit j'ajouste 1 à cause de la derniére lettre qui est *a*, ce sera 353. Le rang de ce mot *Vaz* se trouve ainsi; *V* est la dix-neuviéme lettre, partant je multiplie 18 par 484, le produit est 8712; la seconde lettre est *a* qui vaut 1, dont ayant osté 1 il ne reste rien; je viens à *z* qui est la derniére lettre, & qui vaut 22 que j'ajouste à 8712, & je trouve que le rang de ce mot est le 8734 dans le nombre de 10648, & ainsi des autres qui ont plus de lettres; & remarquez que l'*a* au commencement ou au milieu d'une diction n'est conté pour rien, & qu'estant à la fin il vaut 1.

Ayant un nombre donné dire quelle diction tient ce rang dans le nombre total, pourveû qu'on dise de combien elle est de lettres.

Il faut ajouster au nombre donné le nombre des combinaisons des dictions composées de moins de lettres: par éxemple, on me donne 155 contenant le rang d'une diction de trois lettres, j'y ajouste les combinaisons des dictions d'une & de deux lettres, qui sont 484 & 22, la somme se montera à 661, & pour ce nombre j'opére comme si je voulois voir quelle diction tient ce rang dans le nombre total de toutes les dictions; je le divise par 484 le quotient est un, reste 177 que je divise par 22, le quotient est 8, reste 1, partant je prens la premiére lettre, puis la huitiéme, puis la premiére, pour avoir *aha*.

Autrement il faut diviser le nombre par le mesme diviseur que cy-dessus, & au quotient y ajouster 1, & faire ainsi à tous les quotiens: mais au reste qui se trouve aprés la division par 22, il ne faut rien ajouster: par éxemple, on me donne 587, lequel je divise par 484, le quotient est 1, auquel j'ajouste 1, sont 2, reste 103, que je divise par 22; le quotient est 4, auquel j'ajouste 1, sont 5, & reste 15, partant

je prens la deuxiéme lettre, la cinquiéme & la quinziéme, & je fais la diction *Beq*.

Si l'on me donnoit le mesme nombre, & que l'on me dist que ce fust un mot de deux lettres, je dirois qu'il seroit impossible, car il n'y a que 484 dictions de deux lettres: mais si on luy donnoit quatre lettres, il faudroit diviser de la mesme façon, & mettre un *a* devant, s'il avoit cinq lettres il faudroit mettre deux *a*, & ainsi des autres, comme en ce nombre 155 qui tient lieu d'une diction de trois lettres; je le devrois diviser par 484, mais à cause qu'il ne se peut, je mets un *a* comme si c'estoit un zéro, sinon qu'il se peut mettre le premier, & qu'estant le dernier il vaut 1; puis je prends l'autre diviseur 22, par lequel je divise 155, le quotient est 7, & il reste 1, j'ajouste l'unité à 7, parce que *a* n'a point de valeur s'il n'est à la fin, & que *b* vaut 1, *c* 2, *d* 3, &c. si ce n'est quand ils sont à la fin, de sorte que ce mot sera *Aba*: le premier *a* est à cause que le premier diviseur s'est trouvé plus grand que le nombre à diviser; *b* à cause de 7 lequel vaut 8 par l'addition de l'unité, & *h* est la huitiéme lettre, & le dernier *a* à cause de 1 qui reste.

Quand une division manque quelque part au commencement, au milieu, ou à la fin, il faut toûjours mettre un *a*, comme en ce nombre 500, qui tient lieu d'une diction de trois lettres. Je le divise par 484, il vient 1, qui est un *b*, & il reste 16, & partant je ne puis diviser par 22, de sorte qu'aprés le *b* il faut mettre un *a*, & puis la seiziéme lettre qui est *r*, & le mot sera *Bar*. Il faut noter icy que l'*a* ne vaut aucun nombre, sinon à la fin qu'il vaut 1, & toutes les autres aussi valent leur nombre quand elles sont les derniéres, mais estant au commencement ou au milieu elles vallent 1 moins que le rang où elles sont dans l'alphabet, comme qui commenceroit à conter par *b*, *c*, *d*, 1, 2, 3, &c. & ainsi *z* ne vaut que 21, mais à la fin il vaut 22.

Il faut encore remarquer que comme en faisant les opérations d'une division quand le diviseur est plus grand que le nombre qui luy est au dessus, on met un zéro ou deux, & on avance le diviseur d'une ou de deux places: aussi dans l'opération de toutes ces divisions-cy, si le diviseur se trouve plus grand que le dividende, il faut mettre un *a*, & mettre le diviseur d'aprés, lequel, s'il est trop grand, il faut encore mettre un *a*, & changer de diviseur, jusques à ce qu'il se trouve plus petit comme en ce nombre 5157999, qui tient rang d'une diction de six lettres, il le faut diviser par 5153632, qui tient lieu de centaine de mille, le quotient est 1 qui est *B*, & il reste 4367, qu'on ne peut diviser par le diviseur suivant 234256, & partant je mets un *a*; ni par celuy d'aprés aussi qui est 10648, & je mets encore un *a*, puis je le divise par 484, le quotient est 9 qui est *l*, & il reste 11 que je ne puis diviser par 22, & partant je mets un *a*, & le reste est 11, qui estant le dernier est *m*, ce mot donc sera *Baalam*; pour faire *Balaam* il faudroit 5249475.

On pourroit écrire par ce moyen des lettres bien obscures, mais il faudroit mettre devant & aprés chaque nombre un point, & puis un chiffre, qui marqueroit de combien de lettres la diction seroit composée, & on pourroit se servir des deux sortes tout ensemble. L'on peut écrire des airs par le mesme moyen, de la mesme façon que des dictions, en nommant les notes *a*, *b*, *c*, au lieu de *ut*, *re*, *mi*, mais il faudroit écrire les temps à part comme les notes.

Hazars.

C'Est la coustume à Genes d'élire, ou plûtost de tirer au sort tous les ans d'entre les cent Sénateurs cinq personnes qui doivent avoir les principales Charges de la République.

Cela a donné lieu à des paris qui se font tous les ans touchant ceux à qui le sort arrivera. Il se trouve des Banquiers qui promettront jusques à vingt mille pistoles

pistoles pour une qu'on leur donnera si le sort tombe sur 5 qu'on aura nommez ; 5 ou 6 mille, s'il n'y a que 4 des 5 qu'on aura nommez ; & 5 ou 6 cens, s'il y en a 3. Pour l'ordinaire ils ne donnent rien pour un ni pour deux. On demande quels sont les hazars pour le Banquier & pour le Pariant, & quel profit le Banquier peut faire sur ce commerce.

Il faut premiérement arrester ce que doit donner le Banquier, si le sort tombe sur ceux qu'on aura nommez, ou sur quelques-uns d'eux.

Supposons que le Banquier donne 20000 pistoles pour une, si le sort tombe sur les 5 qu'on aura nommez ; 5000 s'il n'y en a que 4 ; 300 s'il y en a 3 ; & 4 s'il n'y en a que 2.

On verra premiérement en combien de maniéres les 5 qu'on doit tirer au sort peuvent venir.

Il faut multiplier 100 par 99, le produit par 98, par 97. & par 96 ; mais parce que le produit de ces 5 nombres contient aussi l'ordre dans lequel ces 5 personnes sont tirées, il le faut diviser par 120, qui est la combinaison de cinq choses ; ou bien multiplier seulement 80 par 97, 98 & 99, ce qui est la mesme chose que de multiplier les cinq nombres l'un par l'autre, & diviser le produit par 120. On aura 75287520, qui sont toutes les façons dont cinq billets peuvent estre tirez ou pris dans 100.

Il faut maintenant voir quels sont les hazars du Pariant.

Les cinq qu'il a nommez ne peuvent arriver qu'en une seule maniére : il n'y aura donc qu'un hazar pour luy, & 75287519 pour le Banquier ; & parce que le Banquier donne 20000 pour 1, il faut multiplier 1 par 20000 ; donc pour 20000 de hazar qu'a le Pariant, le Banquier en a 75287519, qui estant divisez par 20000 donnent 3764 $\frac{1}{4}$, la proportion des hazars est donc comme 1 à 3764 $\frac{1}{4}$.

Pour avoir les hazars de 4, il faut prendre cinq fois 95, qui sont 475, qu'il faut oster de tous les hazars, ou plûtost de ceux qu'a le Banquier sur les hazars de 5. On ostera donc 475 de 75287519, il restera 75287044 pour les hazars du Banquier : mais parce qu'il donne 5000 pour un, il faut diviser 75287044 par 5000, & on aura 15057 $\frac{2}{5}$ peu plus pour les hazars du Banquier, & 475 pour ceux du Pariant ; & divisant l'un par l'autre, il viendra 31 $\frac{3}{4}$ peu moins, pour les hazars du Banquier, & un pour ceux du Pariant.

Pour avoir les hazars de trois personnes dans les cinq qu'on a nommées, on multipliera par 10 le triangle de 94, qui est 4465 ; on aura donc 44650 pour les hazars du Pariant, qui estant ostez des hazars que le Banquier a eû sur quatre, sçavoir de 75287044, il restera 75242394 pour les hazars du Banquier, qu'il faut diviser par 300, parce qu'il donne 300 pour 1, & on aura 250808 peu moins pour les hazars du Banquier, qui estant divisez par 44650, on aura la proportion des hazars du Banquier & du Pariant, comme 5 $\frac{3}{5}$ peu plus à 1.

Reste à voir les hazars de 2. Pour avoir ceux du Pariant, on multipliera le tétraédre de 93, sçavoir 138415 par 10, & on aura 1384150, qu'il faut oster des hazars que le Banquier a eû sur 3, sçavoir de 75242394, il restera 73858244, qu'il faut diviser par 4, à cause que le Banquier donne 4 pour 1, & on aura 18464561 pour les hazars du Banquier, & les divisant par les hazars du Pariant, qui sont 138415 0, on trouvera que les hazars du Banquier & du Pariant sont entre eux comme 13 $\frac{1}{3}$ peu moins à 1.

On peut aussi considérer les hazars de 1, c'est à dire s'il venoit quelqu'un des cinq qu'on a nommé. Il faudra multiplier par 5 le triangle-triangle ou quatriéme puissance triangulaire de 92, qui est 318345, le produit est 1591725, qu'il faut oster des hazars du Banquier sur 2, sçavoir de 73858244, il restera 57940519, qui sont les hazars du Banquier : mais parce qu'il ne donne rien, quand il ne vient qu'un des cinq qu'on a nommez, on divisera 57940519 par 15917725, & le Banquier aura encore 3 $\frac{16}{25}$ de hazard sur 1 qu'aura le Pariant ;

mais ce hazard n'est qu'au profit du Banquier, & le Pariant n'y a rien.

Ayant tous ces hazars, il les faut assembler. Et premiérement si le sort tombe sur les cinq qui ont esté nommez, le Pariant a 20000. S'il en vient quatre, il y a 475 hazars pour le Pariant, qui estant multipliez par 5000 que le Banquier doit donner, s'il arrive quelqu'un des 475 hazars, ce sera 2375000 hazars pour le Pariant.

Si le sort tombe sur trois de ceux qui ont esté nommez, les hazars de trois sont 44650, qui multipliez par 300, que le Banquier doit donner pour chacun de ces hazars, ce sera 13395000 hazars pour le Pariant, s'il en vient trois des cinq qu'il a nommé.

Si le sort ne tombe que sur deux, on a trouvé que les hazars de deux sont 1384150, qui multipliez par quatre donnent 5536600 hazars pour le Pariant. Tous ces hazars ensemble montent à 21326600; & ce sont les hazars du Pariant.

	Hazars
20000	de 5
2375000	de 4
13395000	de 3
5536600	de 2
21326600	Somme des hazars du Pariant.

Pour avoir les hazars du Banquier, il faut assembler tous les hazars du Pariant, qui sont 1, 475, 44650 & 1384150, la somme est 1429276, qui ostée de tous les hazars qui sont en tout 75287520, il restera 73858244 pour les hazars du Banquier; les hazars du Pariant seront donc à ceux du Banquier comme 21326600 à 73858244, ou dans les moindres termes, comme 183850 à 636709, qui est comme 1 à un peu moins de 3 $\frac{1}{2}$, ou justement comme 1 à 3 [illegible].

	Hazars
1384150	de 2
44650	de 3
475	de 4
1	de 5
1429277	Somme des hazars du Banquier.

Ce seroient là les hazars du Banquier & du Pariant, si le Banquier ne recevoit rien de ceux à qui le sort est favorable: mais parce qu'outre l'avantage qu'il a dans les hazars, il a encore une pistole de chacun de ceux à qui les hazars peuvent arriver, il a pour luy tous les hazars de cinq personnes choisies dans 100, sçavoir 75287520: la proportion des hazars du Pariant est donc à ceux du Banquier, comme 2132660 à 75287520, ou comme 533165 à 1882188, c'est à dire comme 1 à un peu plus de 3 $\frac{1}{2}$.

Mais parce que d'ordinaire on ne donne rien pour 2, il faut oster les hazars de 2, qui se montent à 5536600, des hazars du Pariant, le reste sera 15790000, qui sont aux hazars du Banquier, comme 394750 à 1882188, ou comme 1 à un peu plus de 4 [illegible].

Voicy le fondement & les raisons de cette opération.

Premiérement pour sçavoir en combien de maniéres on peut choisir cinq choses dans 100, on multiplie l'un par l'autre les cinq nombres 100, 99, 98, 97, & 96, & on divise le dernier produit par l'ordre de cinq choses.

Si on ne prenoit qu'une chose dans 100, il est certain qu'on ne le pourroit faire qu'en 100 façons. Que si on en prend deux, puis que la premiére se prend en 100 façons, aprés chacune des 100 on peut mettre laquelle on voudra des 99 restantes; mais on voit icy que l'ordre y est compris, parce que chacune des 100 sera dans tous les choix la premiére & la derniére; il faudra donc diviser par deux, sçavoir par l'ordre de deux choses, le produit de 99 par 100.

Si on choisit trois choses dans 100, parce que deux choses se prennent en 9900 maniéres, qui est le produit de 100 par 99, & qu'il en reste 98, on pourra choisir chacune de ces 98 qui restent, & l'ajouster à chacune de 9900 façons dont on a choisi deux choses: le produit de 9900 par 98 contiendra les diverses maniéres de choisir trois choses dans 100, l'ordre compris.

Par la mesme raison pour choisir quatre choses, il faudra multiplier ce dernier

produit, qui est 970200, par 97 qui restent; & pour cinq choses multiplier encore ce dernier produit, qui est 94109400, par 96, & diviser le produit 9034502400 par 120, qui est l'ordre de cinq choses, parce que par cette construction chacune des 100 choses tient alternativement chacun des cinq rangs qui sont dans cinq choses, sçavoir le premier, le deuxiéme, troisiéme, quatriéme & dernier.

Pour les hazars du Pariant on multiplie 95 par 5, pour sçavoir en combien de façons il peut venir quatre des cinq qu'il a nommez; car puis qu'il en manque un, chacun des cinq peut manquer, & en sa place il peut venir l'un des 95, dont il n'a nommé aucun: il faut donc multiplier 95 par 5. Il est vray que les quatre estant ostez de 100, il resteroit 96: on ne multiplie pas pourtant par 96, parce que le cinquiéme des nommez se trouvant au nombre des hazars du Pariant, il seroit compté deux fois au Pariant.

S'il vient trois des cinq qui ont esté nommez, les hazars se trouvent en multipliant par 10 le triangle de 94.

On multiplie par 10, parce que trois choses se peuvent choisir dans cinq en dix maniéres, ainsi qu'il a esté expliqué cy-devant, quand on a fait voir en combien de façons on peut choisir cinq choses dans 100, car on multipliera 5, 4, 3, l'un par l'autre, & on divisera le produit 60 par l'ordre de 3, qui est 6.

On multiplie par le triangle de 94, parce que dans les cinq qu'on tire au hazar, n'y en ayant que trois des cinq que le Pariant a nommez, les deux autres doivent estre des 95 autres. Or dans tous les choix ou hazars, le premier de ces 95 se trouvera avec chacun des 94 autres. Aprés le second de ces mesmes 95 se trouvera avec chacun des 93 autres. Le troisiéme avec chacun des 92; & ainsi de suite jusqu'au 94 qui se trouvera avec le dernier des 95: or ces nombres assemblez font le triangle de 94, parce qu'il faudroit ajouster 94 avec 93, 92, 91, &c. jusqu'à 1.

Par le mesme raisonnement on verra pourquoy pour avoir les hazars de deux, on multiplie par 10 le tétraédre de 93.

Question.

On demande à combien de personnes se montent les ancestres en trente générations, supposant que les mariages ne se soient point faits entre les descendans des premiéres & plus anciennes générations. Il faut prendre la trentiéme puissance de deux, qui est 1073741824, & c'est le nombre des ancestres.

Question.

Au jeu des Eschecs, les huit pions peuvent avancer une ou deux cases au premier coup. On demande en combien de façons on peut joüer ces huit pions, en ne joüant chacun d'eux qu'une seule fois.

S'ils ne pouvoient estre joüez que d'une seule maniére, on auroit 40320 façons de les joüer, sçavoir selon la combinaison de l'ordre de huit choses: mais parce que chacun se peut joüer en deux maniéres, il faudra multiplier 40320 par la huitiéme puissance de deux, sçavoir par 256, & on aura 10321920.

En cette sorte de combinaison où chaque chose se place en deux maniéres, il faut multiplier tous les nombres pairs l'un par l'autre, au lieu qu'en la combinaison simple on ne multiplie que tous ces nombres. Ainsi une chose se prend en deux façons, 2 en 8, 3 en 48, 4 en 384, &c.

2	2	1
4	8	2
6	48	3
8	384	4
10	3840	5
12	46080	6
14	645120	7
16	10321920	8

Si chaque choſe ſe prenoit en trois maniéres, comme ſi les pions pouvoient avancer une, deux ou trois caſes, il faudroit multiplier l'un par l'autre les nombres multiples de 3, ſçavoir 3, 6, 9, 12, &c. & on auroit 18 pour le changement de deux choſes, 162 pour celuy de trois, &c. & ainſi les huit pions ſe joüëroient la premiére fois en 264539520 maniéres.

3	3	1
6	18	2
9	162	3
12	1944	4
15	29160	5
18	524880	6
21	11022480	7
24	264539520	8

F I N.

DIVERS OUVRAGES

DE

M. DE ROBERVAL.

AVERTISSEMENT.

ON a trouvé écrit de la main de M. de Roberval au commencement du Manuſcrit d'où cét Ouvrage a eſté pris, que l'invention en eſt de luy, mais qu'il ne l'a pas mis en l'état qu'il eſt; que ça eſté un Gentilhomme Bourdelois, à qui il avoit donné des leçons en particulier, qui les ayant rédigées par écrit, en a composé ce Traité à ſa maniére. Il eſt vray qu'en 1668. M. de Roberval revit cét Ouvrage avant que de le lire dans l'Académie Royale des Sciences; mais il n'y mit pas la derniére main, s'eſtant contenté d'écrire ſeulement en divers endroits quelques remarques, que l'on trouvera à la marge de ce Livre.

OBSERVA-

OBSERVATIONS
SUR LA COMPOSITION DES MOUVEMENS, ET SUR LE MOYEN DE TROUVER LES TOUCHANTES des lignes courbes.

POUR ne perdre aucune des pensées que nous croirons pouvoir servir à l'intelligence de ce sujet, nous ne nous attacherons à aucun ordre ou suite de propositions déterminées, il faudra mesme le plus souvent ou supposer l'intelligence de quelques définitions & principes que nous n'aurons pas expliquez, ou bien les inserer avec nos propositions.

Définitions.

NOus appellons ligne simple celle qui estant sur un plan, est telle que chacune de ses parties peut convenir avec toutes les autres parties de la mesme ligne. Telle est la ligne droite & la circonférence du cercle.

Ligne composée est celle dont les parties n'ont point cette propriété de s'ajuster & convenir avec chacune des autres parties.

Mouvement uniforme est celuy par lequel un mobile est porté d'une vîtesse toûjours égale à elle-mesme.

Mouvement irrégulier ou difforme, au contraire.

Puissance est une force mouvante.

Impression est l'action de cette puissance.

La ligne de direction de l'impression est celle par laquelle la puissance meut le mobile.

Nous appellons les impressions semblables, ou diverses, suivant que leurs lignes de direction sont entre elles paralleles, ou ne le sont pas, &c.

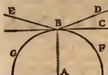
Or il ne faut pas croire que nous appellions une ligne, ligne simple, dautant qu'elle est décrite par un mouvement simple: car, comme nous verrons dans la suite, non-seulement la circonférence du cercle, mais encore la ligne droite peut estre entenduë avoir esté décrite par un mouvement composé de tant de mouvemens qu'on voudra.

Nous avons encore défini la puissance en tant qu'elle nous peut servir considérant les diversitez des mouvemens, ce qui n'empesche pas que dans d'autres speculations, nous n'entendions par le mot de puissance une force capable de soustenir un poids, ou de quelque autre effet.

Généralement en ce Traité nous considérerons deux choses dans les mouvemens, leur direction, & leur vitesse.

Axiomes.

LA direction d'une puissance mouvant un mobile, lequel par son mouvement décrit une circonférence de cercle, est la ligne perpendiculaire à l'extrémité du diamétre, au bout duquel le mobile se trouve.



Soit le mobile B, (qui par son mouvement décrit la circonférence G B F) au point B, à l'extrémité du demi-diamétre A B, auquel soit perpendiculaire la ligne B C. Je pose pour fondement que B C est la ligne de direction par laquelle se meut le mobile B en ce point-là. Et on en peut rendre une raison naturelle, qui est que l'on ne sçauroit prendre quelque autre ligne que ce puisse estre, comme B D, sans tomber dans une absurdité : car puisque la nature ne souffre rien d'indéterminé, & qu'on ne sçauroit prendre la ligne B D, qui fait l'angle oblique D B A, avec le demi-diametre, que par la mesme raison l'on ne fust aussi obligé de prendre de l'autre part la ligne B E qui fait l'angle E B A égal à D B A, (ce qui est absurde) il s'ensuit que la seule ligne qui puisse estre prise pour la direction d'un tel mouvement sera la perpendiculaire B C, qui est la seule qui fasse angles droits avec le mesme demi-diamétre A B.

Ce raisonnement ne peut quadrer qu'à la circonférence d'un cercle.

D'où il s'ensuit que cette direction change à chaque point de la circonférence.

D'où il s'ensuit encore que si un mobile porté de G vers B venoit à se détacher de la circonférence du cercle, comme si le demi-diametre l'ayant porté de G en B, le laschoit au point B, le mobile seroit porté avec cette impression par la ligne B C.

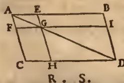
Et d'autant qu'il se rencontre que cette mesme ligne B C est la touchante du cercle au point B, nous prendrons pour principe d'invention qu'en toutes les autres lignes courbes, quelles qu'elles puissent estre, leur touchante, en quelque point que ce soit, est la ligne de direction du mouvement qu'a en ce mesme point le mobile qui les décrit. En sorte que composant des mouvemens en diverses façons, & venant à connoistre la direction du mouvement composé en quelque point que ce soit, d'une ligne courbe, nous connoistrons par mesme moyen sa touchante.

Or nous entendons qu'un mouvement est composé de plusieurs mouvemens, lors que le mobile duquel il est le mouvement, est meû par diverses impressions.

THE'OREME I.

Proposition premiére.

SI un mobile est porté par deux divers mouvemens chacun droit & uniforme, le mouvement composé de ces deux sera un mouvement droit & uniforme différent de chacun d'eux, mais toutefois en mesme plan, en sorte que la ligne droite que décrira le mobile sera le diamétre d'un parallelogramme, lescostez duquel seront entre eux comme les vitesses de ces deux mouvemens; & la vitesse du composé sera à chacun des composans comme le diamétre à chacun des costez.



Soit le mobile A porté par deux divers mouvemens desquels les lignes de direction soient A B, A C, faisant l'angle B A C, & que les mouvemens droits & uniformes soient tels qu'en mesme temps que l'impression A B auroit porté le mobile en B, en mesme temps l'impression A C l'eust portée en C. Je dis que le mobile porté par le mouvement composé de ces deux, sera porté le long du diamétre A D du parallelogramme A D, duquel les deux lignes A B, A C, sont les deux costez, & que le mouvement qu'il aura sur le diamétre A D sera uniforme.

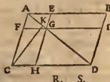
Ce que nous comprendrons, si nous nous imaginons que la ligne A B descendant toûjours uniformement & parallelement à la ligne C D, jusqu'à ce qu'elle ne soit qu'une mesme ligne avec la ligne C D; & la ligne A C se mouvant vers la ligne B D en la mesme façon, nostre mobile A ne fait autre chose que se rencontrer à tout moment en la commune section de ces deux lignes.

Or il est assez clair que les points de cette commune section sont tous dans le diamétre A D; ce que nous démontrerons encore mieux par cette considération. Imaginons-nous que le mobile A se mouvant uniformement sur l'une des lignes A B ou A C, la mesme ligne se meut toûjours parallelement à soy-mesme. En cette sorte si le mobile est meû sur A B de A en B en mesme temps que A B descend jusques en C D; & posons le cas qu'en un certain temps le mobile soit arrivé en E, & qu'en ce mesme temps le costé A B soit descendu en sorte qu'il fasse une mesme ligne avec F I, dans laquelle prenons F G égale à A E (par nostre supposition elle luy est aussi parallele) donc le mobile A sera en G: je dis que le point G est dans le diamétre A D du parallelogramme A B D C. Car par le point G soit tiré la ligne E G H qui achevera le petit parallelogramme A G. Puis donc que les deux mouvemens que nous considérons sont uniformes, comme A B est à A E, ainsi A C est à A F; & en changeant, A E est à A F comme A B à A C, & l'angle B A C est commun; partant les deux parallelogrammes A D & A G sont semblables & à l'entour d'un mesme diamétre; & par consequent le point G est dans le diamétre A D, ce qu'il falloit démontrer. Le reste de nostre proposition n'est qu'un corollaire de ce que nous avons dit; c'est pourquoy nous ne nous y arresterons pas plus long-temps.

Mais nous remarquerons qu'en cette premiére composition de mouvemens & généralement en toutes les autres, nous pouvons considérer six choses. Sçavoir trois directions qui sont les deux simples, & la composée, & trois impressions qui sont les deux simples & la composée.

Or si les trois directions nous sont données, les trois impressions sont aussi données, c'est à dire les proportions des vitesses des trois mouvemens; car A B, A C, & A D, estant données, nous n'aurons qu'à prendre un point D dans A D, ligne de direction du mouvement composé, & par le point D tirer D B & D C paralleles à A B & A C; & le parallelogramme estant ainsi achevé, les proportions des mouvemens seront les mesmes que celles des deux costez & du diamétre du parallelogramme.

Mais les trois impressions estant connuës, ou la proportion des trois lignes A B, A C, A D, nous ne connoistrons aucune des directions, puis que pas une de ces lignes ne nous sera donnée de position, quoy-que les angles qu'elles feront à leur rencontre nous soient donnez en espece. Or en ce cas il faut que deux des puissances quelles qu'elles soient, soient ensemble plus grandes que la troisiéme, puis que les lignes A B, A C, A D, qui sont en mesme raison que les puissances, peuvent estre les costez d'un triangle.



Que si l'on nous donne deux directions, l'une de l'un des mouvemens composans, & l'autre du composé, nous ne connoistrons rien de la troisiéme, ni de la force des impressions, mais seulement nous aurons une raison donnée telle que la raison de l'impression ou de la puissance composante qui nous est donnée à l'autre puissance composante, ne pourra pas estre plus grande: car A C & A D nous estant données, ayant pris dans A C un point comme C, & de C ayant abbaissé C K perpendiculaire sur A D, la raison de A C à A B ne pourra pas estre plus grande que la raison de la ligne A C à cette perpendiculaire C K, puis que cette perpendiculaire est la moindre de toutes les

lignes qui peuvent estre le troisiéme costé d'un triangle, l'un des deux autres estant A C, & le second une portion de la ligne A D.

Que si l'on nous eust donné deux mouvemens entiers, c'est-à-dire leurs directions & leurs vitesses, l'on nous eust aussi donné la direction & la vitesse du troisiéme; car ayant deux costez d'un triangle & l'angle qu'ils contiennent, tout le reste nous est donné.

Pareillement nous estant donné deux directions telles qu'on voudra de deux mouvemens, & la raison de la vitesse du troisiéme à la vitesse de l'un des deux desquels nous avons la direction, nous connoissons les trois mouvemens, comme si l'on nous donne les directions A B, A C, des deux composans, & la raison de la vitesse du composé à A B comme de R à S, prenant dans la direction A B un point comme B, & faisant que comme S est à R, ainsi A B soit à un autre, nous trouverons la ligne A D. Donc si du centre A & de l'intervalle A D nous décrivons un arc de cercle qui rencontre la ligne B I D parallele à A F C en D, nous aurons les vitesses des trois mouvemens A B, A D, B D ou A C, &c. Les choses estant ainsi expliquées, nous énoncerons nostre proposition plus généralement en cette sorte.

Proposition seconde.

UN mouvement composé de tant de mouvemens droits & uniformes qu'on voudra se fera par une ligne droite, & sera uniforme.

Ce qui est encore assez clair par ce que nous venons de dire; car prenant deux de ces mouvemens j'en composeray un seul, puis que par la précédente ces deux se doivent réduire en un, puis de ce composé considéré comme simple (car il n'importe, puis que les deux directions qui le composent ne font pas plus qu'une simple que nous pouvons concevoir) & d'un autre, j'en composeray un second, qui par ce moyen sera composé de trois; & ainsi en continuant je viendray à en composer un seul de tant qu'il me plaira.

D'où il résulte,

Que tout mouvement uniforme & droit peut estre entendu, ou comme simple, ou comme composé de tant d'autres mouvemens qu'on voudra.

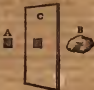
Où il faut remarquer que nous pouvons concevoir ce mouvement comme composé de divers autres, lesquels se feront en des plans différens, en sorte pourtant que le plus composé de tous soit dans le plan des deux que nous considérons comme les derniers qui le composent. Ainsi le mouvement A B peut estre composé des deux A C & A D, dont l'un A C est composé de deux autres A E, A F, l'un desquels, comme A E, sera composé de deux autres A G & A H, & ainsi de tant qu'on voudra; & le second des deux A D, que nous avons dit qui composoient le mouvement A B, peut estre entendu comme composé de deux autres A I, A K, & encore chacun de ceux-là de deux autres, &c. en sorte que le mouvement A B sera composé de tant que l'on voudra, & mesme desquels les impressions seront données : car qui m'empeschera de décrire des parallelogrammes si différens qu'il me plaira, desquels les diagonales soient A B, A D, A C, A E, A H, A G, &c.

Et c'est icy un champ d'une infinité de belles spéculations, comme si ayant supposé que le mouvement A B est composé de cinq autres mouvemens, la vitesse de chacun desquels nous est donnée, l'on nous demande combien il est nécessaire

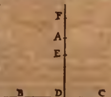
nécessaire de connoistre de leurs directions pour déterminer chacun d'eux & les donner de position, & ainsi d'une infinité d'autres qui pourroient estre telles que la recherche excédant la capacité de nostre esprit, nous n'en pourrions pas donner les solutions.

Mais pour tirer de cette proposition des connoissances encore plus belles, nous allons expliquer par son moyen la nature des réflexions & de la réfraction, ayant premiérement posé pour principe, qu'un mouvement pour composé qu'il soit de diverses impressions, aura le mesme effet qu'un autre causé par une seule impression, de laquelle la direction soit la mesme que de la composée, si l'un est aussi fort que l'autre.

Cecy estant posé, nous considérons dans les corps deux sortes d'impressions qui les peuvent faire mouvoir; l'une qui les chasse d'un lieu vers un autre par violence: telle est celle que la raquette donne à la bale, la corde d'un arc à la fléche, &c. L'autre qui se fait par attraction des corps, soit que cette attraction soit réciproque, ou non; & cette derniére est de telle nature qu'elle ne peut jamais causer de réfléxion, comme si l'aimant B attirant le fer A, le fer s'approchant vient à rencontrer le corps C qui l'empesche de continuer son mouvement de A vers B, il

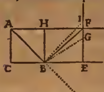


s'arrestera contre le corps C, le pressant continuellement, dautant que l'attraction se faisant au travers de C, la vertu de l'aimant empesche le fer de rejaillir vers A; mais la nature de la premiére sorte d'impression est telle qu'un corps estant meû en cette façon, s'il vient à rencontrer un obstacle auquel il ne puisse pas communiquer son impression, l'obstacle la luy rend, ou pour mieux dire le détermine à retourner vers une autre part; & nous prendrons pour principe, que si un mobile rencontre un obstacle estant meû par une ligne perpendiculaire au mesme obstacle, il retournera vers le lieu duquel il estoit meû. Ainsi A se mouvant vers D par une ligne perpendiculaire à l'obstacle B C, & venant à rencontrer cét obstacle, auquel nous supposons qu'il ne puisse pas communiquer toute ou presque toute l'impression qui l'a fait mouvoir, il sera réfléchi par la mesme ligne D A, par laquelle il s'estoit meû, mais en telle sorte que s'il n'a communiqué rien du tout de son impression à B C, & que B C ne luy en ait pas donné une nouvelle, il retournera avec autant de vitesse qu'il en avoit en D. Que s'il a communiqué une partie de son impression à B C, il ne retournera pas avec autant de vitesse qu'il en avoit en D; & enfin si l'obstacle B C ne luy a pas seulement rendu l'impression qu'il luy vouloit donner, mais encore l'a augmentée, comme si en D il a trouvé un ressort, ou autre chose, alors le mobile retournera de D avec plus de vitesse qu'il n'en avoit, quand il est premiérement parvenu au mesme point D.



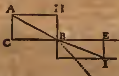
Ce principe estant ainsi expliqué, nous n'aurons point de peine à entendre la nature de la réfléxion. Car si nous pensons qu'une bale estant poussée d'A vers B, rencontre au point B la superficie de la terre que nous supposons parfaitement plate & dure, pour ne nous point embarrasser dans de nouvelles difficultez, laquelle l'empeschant de passer outre est cause qu'elle se détourne, & pour entendre de quel costé, puisque son mouvement peut estre divisé en toutes les parties desquelles l'on peut concevoir qu'il est composé, imaginons-nous qu'il le soit des deux A C & A H, ou C B, desquels le premier fait descendre la bale de A

en C, & le second la porte de la gauche A C vers la droite; & parce que la rencontre de la terre est tout-à-fait contraire à l'un de ces mouvemens A C, & qu'elle n'est point opposée à celuy qui l'a fait aller de la gauche vers la droite, il est certain que si le mobile eust esté meû seulement par son propre poids sur un plan incliné, comme A B, estant arrivé en B, ou il se fust arresté tout court, ou suivant sa figure & les degrez d'impression qu'il auroit, il eust roulé le long de B E: mais parce que le mouvement de la bale est un mouvement violent, & que par nostre principe si elle eust esté portée le long de H B, elle seroit remontée de B en H: au lieu que nous avons composé le mouvement A B des deux C B & H B, puis que le mouvement H B est changé en B H, composons un mouvement de deux, dont l'un soit C B ou B E que nous prenons égal à C B, & l'autre E F; & ayant décrit le parallellogramme H E, tirons la diagonale du point B, où se fait la réfléxion en montant vers F, nous trouverons que la bale remontera en autant de temps par la ligne B F, qu'elle en aura mis à descendre par la ligne A B: en sorte que l'angle de réfléxion sera égal à celuy d'incidence, car supposant que la bale n'ait rien perdu de son impression, & n'en ait point aquis de nouvelle, son mouvement n'a fait que changer de direction: mais si elle eust rencontré un corps qui luy eust cedé, en sorte que luy communiquant de son impression elle en eust tout autant perdu, il eust fallu composer un mouvement de B E, & d'un autre moindre que E F, comme E G: auquel cas l'angle de réfléxion auroit esté moindre que celuy d'incidence. Et posé que la bale eust rencontré un corps capable d'augmenter son impression, comme une raquette, ou un ressort, son mouvement auroit esté composé de B E, & d'un autre comme E I plus grand qu'E F en montant, auquel cas l'angle de réfléxion auroit esté plus grand que celuy d'incidence.



Et ce mesme raisonnement se peut aussi-bien accommoder à l'opinion de ceux qui tiennent que la bale ou tout autre missile ayant communiqué toute son impression à l'obstacle, elle rejaillist ou par la force du ressort qu'elle rencontre dans l'obstacle, ou par celle du ressort qui est en elle-mesme, ou par toutes les deux.

Venons à la réfraction, & supposons que la bale rencontre en B, non plus la superficie de la terre, mais une toile si déliée qu'elle ait la force de la rompre en perdant seulement une partie de son impression; & parce qu'elle ne doit rien perdre de celle qui la fait aller de la gauche vers la droite, dautant que la toile ne luy est point opposée en ce sens-là, supposons qu'elle perd la moitié de l'impression qui la fait descendre, en ce cas il faudra continuer B E égale à C B, & prendre E I égale à la moitié de A C, de sorte que la diagonale B I sera le chemin que suivra le mobile aprés sa réfraction; & pareillement si la vitesse A C eust esté augmentée, par éxemple, de la moitié, comme si le mobile passant de l'air eust entré dans un autre milieu de telle nature qu'il eust pû s'y mouvoir une fois aussi viste, en ce cas nous aurions fait E I double de A C, B E demeurant égale à B C, &c. ce que l'on voit expliqué bien au long dans les Auteurs.



Or il faut remarquer avec soin cette façon de composer, & mesler les mouvemens, puis que nous voyons que des personnes les plus éxercées dans la recherche des veritez Mathématiques se sont trompées en cét endroit: ainsi *M. Des Cartes* pour expliquer la réfléxion, décrit un cercle du centre B, qui

passe par A, & trouve que le point de la circonference auquel le mobile retournera en autant de temps qu'il a mis à aller de A vers B doit estre F; au lieu que d'un raisonnement semblable au nostre il devoit en tirer comme une consequence, que le point F dans cette hypothese se rencontrera dans la circonference du cercle décrit du centre B par A.

Secondement, expliquant la réfraction de la bale dans l'eau, il a confondu les termes d'impression ou vistesse, & de determination, lesquels pourtant il avoit distinguez peu auparavant; car en la page 17. ligne derniere, il dit, *& puis qu'elle ne perd rien du tout de la détermination*, &c. *Discours 2. de la Diopt.*

Troisiémement, il semble qu'il explique mal dans la page 19. la réflexion de la bale sur la superficie de l'eau: car il est vraysemblable que lors que la bale A B entre dans l'eau, & que la réfraction se fait vers I, c'est à cause que la bale entrant dans l'eau au point B, & voulant continuer son chemin vers D, rencontre d'un costé l'angle C B D obtus, & de l'autre costé l'angle E B D aigu, & trouve plus de corps, & partant plus de résistance du costé de l'angle obtus que du costé de l'aigu: ainsi elle se détourne par un chemin un peu courbe vers I, lequel elle ne quitte plus lors qu'elle est assez enfoncée dans l'eau: car bien qu'il y ait toûjours plus d'eau au dessous de B I, que non pas au dessus, néanmoins à cause de son enfoncement, elle trouve la résistance d'une part aussi forte que de l'autre, ce qui fait qu'elle continuë à se mouvoir vers I.



Mais lors qu'elle entre dans l'eau par la ligne A *b* trop inclinée, d'autant qu'avant d'estre parvenuë dans l'eau en un endroit auquel la difference de la résistance des deux parties de l'eau luy fut insensible, il faudroit qu'elle eust (pour ainsi dire) labouré un long sillon d'eau, & agi pendant trop long-temps contre la résistance de l'eau du costé inferieur; de sorte que par cette action elle perd l'impression de s'enfoncer davantage; & sa figure que nous supposons estre ronde, quoy-qu'elle tienne de la nature & des propriétez d'un coin qui fendroit l'eau, la porte vers la partie la plus foible, c'est-à-dire vers la superficie supérieure de l'eau, & quelquefois au dessus de la mesme superficie; ce qui est assez intelligible.

Voyez ce que dit *M. Des Cartes* sur ce sujet dans les pages 21, 22. & les suivantes.

L'on pourroit déduire un grand nombre de belles conclusions de cette proposition du mouvement composé de deux droits: mais puisque dans ce petit Traité nostre but principal est de tirer du mélange des mouvemens une méthode générale pour trouver les touchantes des lignes courbes, nous ne nous arresterons pas davantage à cette proposition.

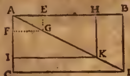
Mais avant que de passer outre, nous remarquerons deux choses: la premiére, que le diamétre A D eust pû estre décrit par un point porté de deux mouvemens droits AB, A C, desquels ni l'un ni l'autre n'eust esté uniforme. Il eust pourtant fallu qu'à mesure que l'un, comme A B, eust esté augmenté ou diminué, la vistesse de l'autre eust esté changée à proportion, comme si le mobile eust esté porté en A B d'un mouvement fort lent depuis A jusques à E, & d'un fort viste depuis E jusques en



H, &c. pour luy faire décrire la ligne A D, il auroit fallu qu'ayant divisé A C en mesme raison qu'A B dans les points F & I, la ligne A B eust descendu fort lentement d'A vers F, & fort viste de F vers I; ce que l'on pourra mieux concevoir, si l'on considere le mobile en G, comme devant en mesme temps estre porté de deux mouvemens uniformes, & desquels les vistesses sont entre elles, comme les lignes G L & G M le long des mesmes lignes G L & G M, &c.

Secondement, il nous sera facile de voir que si le mobile eust esté porté sur les lignes A B, A C par deux mouvemens droits, mais différens l'un de l'autre, en telle sorte que les parties de l'un n'eussent pas eû toûjours mesme raison avec les parties de l'autre, en ce cas le mobile eust décrit une ligne courbe; comme si les deux mouvemens eussent esté difformes ou disproportionnez, lors que le mobile estant en E dans la ligne A B, il eust esté en F dans la ligne A C, & qu'estant en H, il eust aussi esté en I, la ligne décrite par le mouvement meslé de ces deux auroit esté la courbe A G K D, &c.

Mal expliqué, mais facile à entendre.

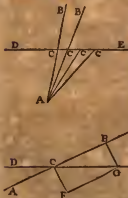


Et cette considération ne sera pas des moins utiles pour la recherche des touchantes des lignes courbes, comme l'usage le fera découvrir.

Proposition troisiéme.

BIEN que ce que nous avons dit jusques icy des mouvemens meslez pût suffire pour nous en faire comprendre la nature, néanmoins puis que leur connoissance est un principe d'invention pour quantité de belles véritez, il sera peut-estre à propos d'en considérer icy divers autres mélanges, quoy-que tout ce que nous en dirons ait une grande étenduë, à cause que ce ne sont icy que les élemens de cette science.

Nous avons expliqué dans les propositions précédentes comment une ligne droite peut estre entenduë décrite par un mouvement uniforme meslé de deux droits & uniformes, ou par un mouvement inégal meslé de deux droits & difformes, &c.



Or la mesme ligne droite peut aussi estre entenduë décrite par une infinité d'autres mouvemens, par éxemple, par un mouvement droit & un circulaire, comme si la droite A C B se mouvant circulairement au tour du centre A, un point, comme C, est porté dans la mesme ligne, en sorte qu'il se trouve toûjours dans la commune section de la mesme ligne A B, & d'une autre D E: nous dirons que la ligne D E est décrite par un mouvement meslé d'un droit qui se fait le long de la ligne A B, & d'un circulaire que la mesme ligne A B communique au mobile qui la décrit par son mouvement droit; & ces deux mouvemens sont tels, quoy-que bien difformes, que si l'on nous donne de position le point A & la ligne D E, quelque point que l'on prenne dans la ligne D E, la proportion de l'un de ces mouvemens à l'autre sera donnée.

Car

Car ayant prolongé la ligne A B pardelà la ligne D E, comme en B si du point C auquel nous voulons connoistre la proportion de ces deux mouvemens, nous tirons C F perpendiculaire à A B, nous aurons la direction du mouvement circulaire qui se fait en C; mais les deux autres directions sont données, A B du mouvement droit simple, & D E du mouvement composé. Donc les trois impressions nous sont données, ou la proportion de chacun des mouvemens aux deux autres.

Nous pouvons encore imaginer que la mesme ligne est décrite par un mouvement meslé de deux, l'un parabolique, l'autre droit, desquels nous pourrons en comprendre, un uniforme, comme si la parabole estant portée par un mouvement droit, en sorte que l'un de ses diamétres soit toûjours sur la ligne A B, un point C se promene de telle sorte dans la parabole, qu'il se maintienne toûjours dans la ligne D E; & en ce cas si la touchante de la parabole en C nous est donnée, nous connoistrons ces trois mouvemens, c'est-à-dire les vitesses de chacun des trois comparé aux deux autres, puisque leurs trois directions nous sont données, où vous remarquerez que la direction du mouvement droit simple est la ligne A B, c'est-à-dire, une ligne L C M parallele à A B.

Ce que nous avons dit de la parabole se doit encore entendre du cercle, de l'hyperbole, de l'ellipse, & généralement de toute autre ligne; de sorte que la ligne D E pouvant estre entenduë décrire par un mouvement composé d'une infinité de mouvemens droits, & chacun de ceux-là d'un droit & d'un circulaire, ou d'un droit & d'un parabolique, &c. vous voyez que la mesme ligne pourra estre décrite par une infinité de mouvemens, chacun different en espéce de tous les autres.

Et pour montrer que nous pouvons dire du cercle, de la parabole, & d'une infinité de lignes courbes, ce que nous avons dit de la droite; soit la circonférence de cercle A B C, le centre du cercle D, & un point E dans le cercle autre que le centre, & soit tirée la ligne E D A: vous voyez donc que si la ligne E D A tourne autour de E, & qu'en mesme temps un point B se promene sur la mesme ligne, en sorte qu'il se maintienne toûjours dans la circonférence A B C, cette circonférence sera décrite par le mélange d'un mouvement droit & d'un circulaire. Et vous voyez encore, que si l'on veut sçavoir la raison de ces deux mouvemens l'un à l'autre, la touchante de la circonférence nous estant donnée en un point, cette raison nous sera donnée en ce mesme point, comme si la touchante A F nous est donnée au point A, & la position de la ligne E D A, nous verrons que cette ligne estant perpendiculaire à A F, elle est la ligne de direction du mouvement circulaire simple, qui se fait à l'entour du point E; mais elle est aussi la direction du mouvement circulaire composé, puis qu'elle touche la circonférence A B C, par laquelle se doit faire ce mesme mouvement composé; d'où il s'ensuit que le mobile qui décrit la circonférence A B C par son

mouvement, n'a au point A qu'un seul mouvement circulaire, duquel la direction est AF.

Mais si l'on donne la touchante BG en un autre point de la circonference, comme en B, le point E estant encore donné, nous menerons la ligne EB, qui sera la direction du mouvement droit, & BH sa perpendiculaire sera la direction du mouvement circulaire simple à l'entour du point E; mais la direction du mouvement composé est aussi donnée, sçavoir la touchante BG, nous connoistrons donc la vitesse de ces trois mouvemens, & nous comparerons chacun d'eux aux deux autres.

Comme au contraire, si l'on nous eust donné les points E & B, & la raison du mouvement droit au mouvement circulaire simple, comme de GH à BH, nous aurions trouvé la touchante du cercle.

Il nous sera aussi facile de concevoir que la mesme circonference peut estre décrite par un mouvement droit & un parabolique, ou par un droit & un hyperbolique, &c. comme nous avons dit de la ligne droite.

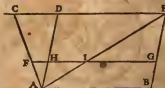
Et pour finir en deux mots cette speculation, nous pourrons dire de la parabole, de l'hyperbole, & des autres lignes courbes, ce que nous avons expliqué du cercle.

Proposition quatriéme.

Toute cette proposition est mal digerée, & il vaut mieux la passer que de s'y arrester.

SI deux lignes droites faisant l'une avec l'autre tel angle qu'on voudra, viennent à se mouvoir parallelement chacune à soy-mesme, en telle sorte qu'elles se puissent toûjours couper l'une l'autre, & que la vitesse de la premiére soit donnée dans la seconde, & la vitesse de la seconde donnée dans une troisiéme, qui fasse tel angle qu'on voudra au point de leur départ: le point qui se rencontrera toûjours dans leur commune section sera porté par trois mouvemens, deux desquels estant réduits à un, l'on trouvera que le mouvement de ce point dans la seconde ligne aura esté hasté, quoy-que toûjours uniformement, en sorte que par le mouvement composé de ces trois, il aura décrit une ligne d'un mouvement uniforme, &c.

Cette proposition seroit extraordinairement longue, c'est pourquoy nous expliquerons le reste cy-aprés.



Supposons que la droite AB comprenant tel angle qu'on voudra en A avec la droite AD, l'une & l'autre de ces deux lignes viennent à se mouvoir parallelement à soy-mesme & uniformement, AB vers D, & AD vers B, & que la vitesse de la ligne DA soit donnée dans AB, & la vitesse de AB soit donnée dans une troisiéme ligne AC, en telle sorte que lors que le point A de la ligne DA sera arrivé en B, en mesme temps le point A de la ligne BA arrivera en C. Je dis que le point qui se rencontre toûjours en la commune section des deux lignes AB, AD sera porté par trois mouvemens droits, l'un par la ligne AD, & les deux autres par la ligne AB, en sorte que ladite ligne AB estant prolongée à l'infini, il parcourra une plus grande ligne sur AB, qu'il n'eust fait si la vitesse du point A de la ligne AB eust esté donnée depuis A jusques en D, & que la ligne qu'il décrira par le mouvement meslé de ces trois sera le diamétre AE du parallellogramme DB, & que son mouvement sur AE sera uniforme.

La premiére partie de cette proposition est assez intelligible de soy-mesme;

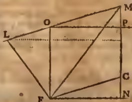
car quand nous ne donnerions point de mouvement à la ligne D A, & que la ligne A B se mouvant, en sorte que son bout A décrivant la ligne A C, un point fust porté le long de A B, commençant son mouvement en A, à telle condition qu'il deust toûjours estre en la commune section des deux A B, A D; il est clair que ce point auroit deux mouvemens sur la ligne A D, l'un A C, par lequel la ligne A B s'efforceroit de le porter d'A vers C, l'autre C D, par lequel il seroit ramené de C vers D, pour décrire la ligne A D. Mais si ces deux mouvemens estant ainsi prouvez, nous faisons encore mouvoir la ligne A D vers B, ce point aura encore un mouvement par lequel il suivra la ligne A D: il est donc vray qu'il a trois mouvemens, &c.

Ce que nous pouvons encore examiner en cette sorte, posé que le point A de A B deust parcourir A D, & que A de A D deust parcourir A B, il est certain que le point qui se rencontreroit toûjours sur leur commune section seroit porté par deux divers mouvemens, comme nous avons démontré en nostre première proposition: mais faisant que le point A de A B décrive A C, au lieu de A D, ce point a encore un mouvement par lequel la ligne A B s'efforce de le porter le long de A C, ainsi pour luy résister il faut qu'il se haste davantage sur A B, en sorte qu'il y décrive une plus grande ligne qu'il n'eust fait, si A de A B eust parcouru A D: donc le point a trois mouvemens, &c.

Or nous démontrerons en cette façon que le mouvement composé de ces trois est droit & uniforme, & le long du diamétre A E. Car ayant tiré la ligne F H I G parallele à A B coupant, &c. lors que le point A de A B sera en F, si la ligne A D n'a pas changé de place, le point de la commune section aura eû deux mouvemens uniformes A F, F H, que nous réduirons à un seul A H, par la première proposition, en sorte que ce point sera en H, de la ligne A H D. Mais en mesme temps le point H de A H D a esté porté en I par un mouvement uniforme H I: donc ce point de commune section a esté porté par deux mouvemens uniforme A H, H I; & partant par la première proposition il a décrit la ligne A I, &c.

Notez qu'il n'estoit pas besoin de tirer F G, & que le mesme argument se pouvoit faire des lignes A C, C D, & les ayant réduites à A D, composer un mouvement des deux A D, & D E.

Cette proposition se doit entendre tres-généralement.



Ainsi si la ligne F C se meut parallelement à soy-mesme & uniformement, en sorte que son point F décrive la ligne F L, & qu'en mesme temps la ligne F O se meuve parallelement à soy-mesme & uniformement, en sorte que son bout F doive décrire la ligne F N, le point de commune section des deux lignes F C, F O, aura decrit la diagonale F M du parallellogramme O C. Quoy-que ce point ait esté porté de quatre divers mouvemens, * car les deux mouvemens qu'il a en F O, l'un par lequel il court de F vers O, l'autre par lequel la ligne F O tâche de le reculer pour luy faire décrire F N, ces deux mouvemens, dis-je, se réduisent à un seul F C, (car F C est le diamétre d'un parallellogramme F N C) & les deux mouvemens qu'il a en F C, l'un par lequel décrivant la ligne F C, il est porté de F vers C, l'autre par lequel la ligne F C tâche de luy faire décrire la ligne F L, ces deux mouvemens, dis-je, se réduisent à un seul droit & uniforme F O. Donc tous ces quatre mouvemens estant réduits aux deux F C, F O par la première proposition, par la mesme proposition le point de commune section des deux lignes F C, F O, aura décrit la ligne F M, qui est ce qu'il falloit démontrer.

* *Je dirois ainsi : Le point* F *en* F C, *se mouvant vers* L M, *a deux mouvemens droits & uniformes ,* F L, L O, *qui composent un mouvement droit* F O.

Semblablement ledit point F *en* F O, *se mouvant vers* N M, *à deux mouvemens* F N, N C, *qui composent* F C.

Donc des deux mouvemens F O, F C, *sera composé un mouvement* F M, *qui sera composé de tous ces quatre, &* F M *est diagonale , &c.*

Nous aurons besoin de cette proposition comme d'un lemme, pour les touchantes de la quadratrice, & peut-estre de quantité d'autres lignes.

PROBLEME I.

Proposition cinquiéme.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens meslez.

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de proprietez specifiques, qui nous fassent connoistre les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'Invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dés qu'on l'aura consideré avec un peu d'attention.

Regle générale.

PAR les proprietez specifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans nostre principe. Et parce qu'elle est tres-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de le répéter.

Vous trouverez dans les exemples suivans les touchantes des sections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monsieur Paschal, de la Roullette de Monsieur Rob. de la Parabole du second genre de Monsieur Desc. &c.

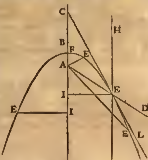
Premier exemple des touchantes de la parabole.

SOIT que l'on nous ait donné la parabole E F E, & le moyen de la décrire par la cinquiéme méthode générale de Monsieur Mydorge livre second, proposition 25. qui est telle.

Le sommet & le foyer de la parabole estant donnez de position, trouver dans le mesme plan tant de points qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.

Soit A le foyer, & F le sommet : soit tirée la ligne A F, & prolongée de F vers B, & soit F B égale à A F, la mesme ligne B F A sera l'axe de la parabole. Prenez dans F A autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à F A ; du centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire,

culaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la Parabole passera par les points E.



Cela posé si l'on demande la touchante de la Parabole au point E, soit tiré la ligne AE prolongée comme en D, & la ligne EI perpendiculaire à AB, & encore la ligne HE parallele à l'axe FAI, alors il est clair par la description cydessus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, est composé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un est la ligne AE, & l'autre est la ligne HE sur laquelle il se meut de mesme vitesse que le point I dans la ligne BA, laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne AE par la construction, puisque AE est toûjours égale à BI. Partant puisque la direction de ces mouvemens égaux est connuë, sçavoir suivant les lignes droites AED, HE données de position, si vous divisez l'angle AEH en deux également par la ligne LEC, qui est le diamétre d'un rhombe autour de l'angle AEH, (& par conséquent la direction du mouvement composé des deux HE, AE,) la ligne LEC sera la touchante.

Avant que de passer outre, remarquez deux choses. La premiére, que nous n'avons pas voulu considérer le point E comme commune section de deux lignes, dont l'une AE infinie se meut circulairement autour du point A; l'autre IE aussi infinie descend parallelement à soy-mesme, ayant toûjours son extrémité I dans la ligne BA, puisqu'il a esté plus facile de considérer les mouvemens AE, HE du point E en chaque endroit de la section de ces lignes. Sécondement, nous avons dit que les mouvemens AE, HE sont égaux l'un à l'autre, ce qui sera vray, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'ensuit pas que tous les mouvemens d'un point E soient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en ayant qu'un réciproque de l'autre costé de la parabole & également éloigné du sommet. Vous entendrez la mesme chose en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que nostre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1. proposition 33, & pour le trouver en quelque façon analitiquement, posons qu'il soit vray que LEC touche la Parabole en E. Si donc nous abaissons l'ordonnée EI, IF sera égale à FC, & ajoûtant FB à IF, & FA à CF, les toutes CA & IB seront égales (car les ajoûtées le sont par la construction) mais IB est égale à AE par nostre construction, donc CA & AE sont égales, & l'angle ACE égal à l'angle AEC; mais par nostre construction nous avons divisé l'angle AEH en deux également, & par conséquent nous avons fait AEC, CEH égaux entr'eux, donc ACE est égal à CEH son alterne, ce qui est vray, car par la construction EH est parallele à CI.

Ou si vous aimez mieux, puisque CI, EH sont paralleles, l'angle ACE est égal à CEH; mais par la construction CEH est égal à AEC, donc ACE & AEC sont égaux, & le triangle ACE isoscéle, donc CA est égale à AE. Mais encore par la construction AE est égale à BI, CA est donc égale à BI, & en ostant les égales AF, BF, CF sera égale à FI, & par conséquent la ligne CE touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

Que si l'on nous eust donné la description de la parabole par un point, comme E se promenant le long de la ligne IE du mouvement uniforme, en mesme temps que la ligne IE descend parallelement à soy-mesme d'un mouve-

ment tres-inégal, mais tel que le quarré de I E est toûjours égal au rectangle sous I F, & une ligne donnée nommée P, qui en ce cas est le costé droit de la Parabole, il auroit fallu démontrer ce problême.

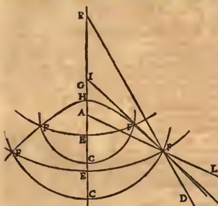
La premiére (comme P) de trois lignes continuellement proportionnelles nous estant donnée, & un mouvement égal dans la seconde I E trouver le mouvement qui se fait dans la troisiéme F I, ce qui est un peu plus long, &c.

L'on pourroit encore proposer le moyen de décrire la Parabole par quelques autres de ses proprietez, ce qui seroit plus difficile.

Second éxemple des touchantes de l'Hyperbole.

NOus la décrirons avec M. Myd. liv. 2. prop. 26. en cette sorte.

Le sommet & les deux foyers ou points de comparaison de l'Hyperbole estant donnez de position, décrire l'Hyperbole par des points dans le mesme plan.



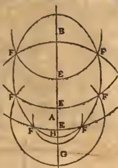
Soient les foyers A B, & H le sommet, donc la ligne droite A B passera par H. Prenons HG égale à H A, & prenons dans H A, prolongée, s'il en est besoin, tant de points que nous voudrons, comme E, par lesquels de B comme centre décrivons des arcs de cercle E F, & du centre A & de l'intervale, dont chaque point E est éloigné de G, décrivons d'autres arcs de cercle C F, qui coupent les premiers, comme en F, l'Hyperbole passera par tous les points F.

Cela posé, si je veux tirer la touchante de l'hyperbole, comme en F, ayant prolongé A F, comme en L, & B F, comme en D, sans m'amuser à considérer que l'hyperbole est décrite par le point F, qui est toûjours la commune section des deux lignes droites B F D, A F L, lesquelles se meuvent circulairement, la premiére autour du centre B, l'autre au tour du centre A, je vois qu'en quel lieu que je prenne le point F, si je le considére décrivant l'hyperbole à commencer du sommet, il a deux mouvemens; l'un, par lequel il s'éloigne d'A, le long de la ligne A L; l'autre, par lequel il s'éloigne de B le long de la ligne B D. Puis donc qu'il s'éloigne également d'A & de B, & que les deux directions sont F L, F D, ayant fait un rhombe duquel l'angle soit D F L, c'est à sçavoir, ayant divisé l'angle D F L en deux parties égales pour avoir le diamétre de ce rhombe, qui sera la direction du mouvement composé, la ligne M F I qui partage cét angle sera la touchante de l'hyperbole.

Apoll. démontre liv. 3. prop. 48. que l'angle I F A est égal à l'angle I F B.

Troisiéme éxemple des touchantes de l'Ellipse.

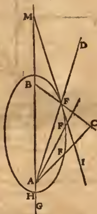
VOicy comme M. Myd. la décrit par sa cinquiéme méthode générale, l. 2. prop. 27.



Les deux foyers, & l'un ou l'autre sommet de l'ellipse estant donnez de position, décrire l'Ellipse par des points trouvez sur le mesme plan.

Soient les foyers ou points de comparaison A & B, & H le sommet.

Donc la droite A B prolongée passera par H, soit pris H G égale à A H, & du centre B de tant & de tels intervales qu'on voudra plus grands, pourtant que A H, & moindres que B H, comme B E, décrivez des arcs de cercle, comme E F, & du centre A & de l'intervale, qui est entre chacun de ces arcs, & le point G décrivez d'autres arcs qui coupent chacun des premiers, comme en F, l'Ellipse passera par les points F F.



L'Ellipse estant ainsi décrite, s'il faut tirer sa touchante comme en F, ayant tiré les lignes B F C & A F D, soit que je considére les deux mouvemens du point F en B C & A D, ou comme s'éloignant de B dans F C, auquel cas il s'approche d'A dans F A, ou comme s'éloignant d'A dans F D, auquel cas il s'approche de B le long de F B, puisque le point F s'éloigne autant de l'un des points A B, qu'il s'approche de l'autre, & que les directions de ces deux mouvemens sont B F C & A F D, je n'ay qu'à diviser l'un des deux angles A F C, ou B F D en deux également par la ligne I F M, elle sera la touchante de l'Ellipse.

Apoll. dans la mesme 48. du troisiéme veut que l'angle A F I soit égal à l'angle B F M, ce qui s'accorde à nostre méthode, car les angles A F C, B F D (au sommet l'un de l'autre) estant égaux, leurs moitiez A F I, B F M le seront aussi, ce qu'il falloit démontrer.

J'oubliois de mettre en deux mots la construction de ces trois exemples, pour servir de régle générale.

Pour tirer les touchantes des sections coniques.

POUR la Parabole, estant donné le sommet & le foyer par le point où vous voulez la touchante, tirez une ligne parallele à l'axe, & une autre ligne jusques au foyer, divisez en deux également des quatre angles que ces deux lignes font, les deux que la Parabole coupe, la ligne qui fera cette division sera la touchante.

Pour l'Hyperbole & l'Ellipse, les deux foyers estant donnez par le point où vous voulez la touchante, tirez deux lignes aux deux foyers, des quatre angles que ces lignes feront en ce point, divisez en deux également les deux opposez que la section conique coupe, la ligne qui fera cette division sera la touchante.

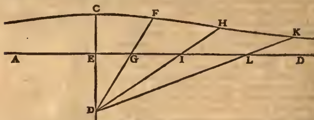
Quatriéme exemple des touchantes de la Conchoïde de dessus, de Nicomede.

BIEN que l'on puisse décrire une infinité de lignes courbes, chacune desquelles sera conchoïde & asymptote à une mesme ligne droite, si est-ce que

nous n'en considérons que de deux sortes ou genres, suivant qu'elles sont décrites, ou entre leur pole & la ligne droite, qui leur sert de base, régle, ou asympote, ce que nous appellons la conchoïde de dessous ; ou que cette ligne droite soit entre le pole & la conchoïde, ce que nous appellons la conchoïde de dessus, ou de Nicomede ; parce que, quoy-que leurs courbures soient toutes différentes les unes des autres, néanmoins la méthode pour en trouver les touchantes n'en considére que ces deux cas.

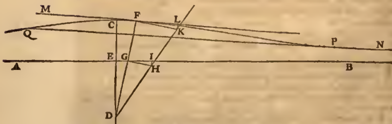
Vous remarquerez que le pole de la conchoïde ne peut pas estre dans la ligne qui sert de régle ou de base à la conchoïde, car la ligne qui seroit décrite de cette sorte seroit un demy-cercle, dont la ligne droite qu'on auroit prise pour base de la conchoïde, seroit le diamétre, &c.

La Conchoïde de dessus se décrit en cette façon.



Soit la droite infinie A D à laquelle il faut tirer une conchoïde, de laquelle le sommet soit C. Du point C tirez C D perpendiculaire à A B coupant A B en E, & dans C D prenez un point comme D, en sorte que la ligne A B soit entre les deux points C & D, puis de D tirez quantité de lignes occultes, comme D G F, D I H, &c. vers la ligne A B qui la rencontrent en G I L &c. puis prenez les lignes G F, I H, L K chacune égale à E C, la Conchoïde passera par les points F H K &c.

Ayant ainsi décrit la Conchoïde, il sera facile d'en tirer les touchantes, par éxemple au point F.



Considérons que la conchoïde est décrite par deux mouvememens du mesme point ; l'un par lequel il monte le long de la ligne D F ; l'autre par lequel la ligne D F se mouvant circulaitement sur le centre D, emporte le mesme point de C par F vers N ; & bien que nous sçachions que les directions de ces deux mouvemens sont l'une la ligne D F pour le mouvement droit, l'autre F K perpendiculaire à D F par nostre principe, pour le mouvement circulaire, si est-ce que nous n'en sçaurions découvrir la raison ne les considérant que dans la conchoïde si nous ne connoissons la touchante de la conchoïde, qui est

est la direction du mouvement composé de ces deux. Cela nous oblige à examiner ou les mesmes mouvemens, ou d'autres qui leur soient proportionnez hors de la conchoïde.

Or il est tres-facile de les examiner dans la ligne droite, qui est la régle ou base de la conchoïde, si nous considerons qu'elle est décrite par un point G, qui monte dans la ligne D G F, autant que fait le point F dans la mesme ligne D G F; car puisque les lignes E C, G F sont égales par la construction, l'excés de la ligne D F sur la ligne D C est le mesme que l'excés de D G sur D E. Donc le point E est autant monté allant de E jusqu'à G, que le point F allant de C jusqu'à F. Et pour le mouvement circulaire de G, non-seulement nous sçaurons la raison qu'il a avec le mouvement droit G, leurs deux directions & celle de leur mouvement composé nous estant données, mais aussi nous sçaurons la raison qu'il a avec le mouvement circulaire F en cette façon.

Tirez G H perpendiculaire à D G; d'un point de D H comme H, tirez H I parallele à D G, qui coupe la regle E G B en I: vous avez donc la raison du mouvement circulaire G au mouvement droit G, comme de G H à H I; & puis que le mouvement droit G est égal au mouvement droit F, reste d'avoir la raison du mouvement circulaire F au mouvement circulaire G; & parce que ces mouvemens sont entr'eux comme les circonférences de leurs cercles, c'est à-dire en mesme raison que leurs demi-diamétres D F, D G, il faut donc faire que comme D G à D F, ainsi G H soit à une ligne prise dans F K. Or la construction en est tres-aisée, car vous n'avez qu'à tirer la ligne D H K rencontrant F K en K, dautant que les triangles D G H, D F K seront semblables. Vous avez donc la raison du mouvement circulaire F au mouvement droit F, comme de F K à K L ou H I. Donc si par K vous tirez K L parallele à D F, & égale à H I; puisque les deux F K, K L sont les directions des deux mouvemens F, & en mesme raison que ces deux mouvemens, la droite L F estant menée, elle sera la direction du mouvement composé de ces deux, c'est-à-dire, la touchante de la Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

En deux mots le Pole D & la régle A B de la Conchoïde estant donnez de position, & un point de la Conchoïde F, tirez D F qui coupe A B en G, sur les points G & F, tirez G H & F K perpendiculaires à D F, faites l'angle F D K aigu *ad libitum*, tirant la ligne D K qui coupe G H en H, & F K en K, tirez H I parallele à D F coupant A B en I, puis tirez K L égale & parallele à H I, le point L sera dans la touchante au point F.

Remarquez que dautant que la Conchoïde change de courbure, le point L se peut rencontrer entre la Conchoïde & sa base ou régle A B, puis qu'en ce cas le convexe estant en dedans, la ligne L F la touche aussi en dedans entre la droite A B.

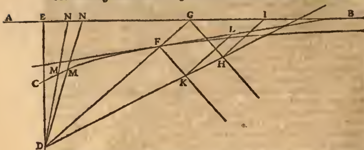
Remarquez encore qu'au lieu que les touchantes du Cercle, de la Parabole, de l'Hyperbole & de quantité d'autres lignes ne rencontrent ces mesmes lignes qu'au point de l'attouchement; en la Conchoïde tout au contraire, la ligne F L estant prolongée vers L coupera la Conchoïde prolongée vers N, & la touchante d'un point du convexe en dedans, comme de P, estant prolongée du costé du sommet C de la Conchoïde, rencontrera la Conchoïde comme en Q, ce qui est évident, puis que ces touchantes (excepté celle du sommet C) n'estant point paralleles à la ligne A B, rencontrent nécessairement la mesme ligne; & partant, puis que l'inclinaison de la touchante F L est vers L, & que la Conchoïde passe entre L & A B, elle rencontrera nécessairement la Conchoïde, & la coupera vers L comme en N, ce que la touchante du point P ne poutra pas faire, quoy-qu'elle ait son inclinaison sur A B, de mesme costé que L: dautant que vers cét endroit elle est plus proche de A B que n'est pas la Conchoïde, mais elle rencontrera la Conchoïde vers le sommet C, ou au-

delà, comme en Q, dautant qu'elle s'éloigne de AB vers ce costé-là, où au contraire la Conchoïde commence en C de s'en approcher.

Cinquiéme exemple des touchantes de la Conchoïde de dessous.

NOus nous servirons mot à mot de la régle de l'exemple précédent; & pour en faire l'application, il ne faut que sçavoir décrire cette ligne.

Soit en la figure suivante la ligne droite & infinie AB, que nous prenons



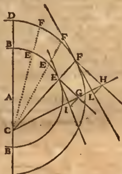
pour la régle ou base de nostre Conchoïde de dessous, & d'un point de la mesme ligne comme E, soit la perpendiculaire ED à la mesme ligne, dans laquelle perpendiculaire prenons deux points C & D, le plus proche C pour le sommet de nostre Conchoïde, & le plus éloigné D pour son Pole: alors ayant tiré au point D quantité de lignes occultes DMN, qui coupent AB en N, si en chacune de ces lignes DMN de son point N, nous prenons NM égale à CE, nous aurons dans chacune de ces lignes un point M, par lequel nostre Conchoïde est décrite.

Cela posé, puis que la seule différence, que nous remarquons entre les deux mouvemens du point qui décrit cette ligne, & les deux qui décrivent sa base, d'une part; & les mouvemens semblables qui décrivent la premiére Conchoïde, & sa base n'est autre, sinon qu'en celle-cy le mouvement circulaire de la ligne est moindre que le mouvement circulaire de sa base, au lieu qu'en l'autre le mouvement circulaire qui décrivoit la ligne estoit le plus grand, & qu'en l'une & en l'autre le mouvement droit de la ligne est égal au mouvement droit qui en décrit la base, & qu'encore en l'une & en l'autre l'on peut comparer le mouvement circulaire de F au circulaire G par le moyen d'une ligne DKH, qui fait un angle aigu GDH arbitraire avec la ligne GD, & laquelle ligne DKH coupe les lignes GH, FK perpendiculaires à la ligne DG aux points H & K: voulant tirer la touchante de cette ligne en un point, comme en F, je tire la ligne DF, que je prolonge jusques à ce qu'elle rencontre la régle AB en G, & sur icelle des points F & G je tire deux perpendiculaires FK, GH, qu'une ligne arbitraire DH coupe en K & en H; du point H je tire HI parallele à DG coupant AB en I. J'ay donc, comme nous avons déja dit au précédent exemple, la raison du mouvement circulaire du point G de la ligne DG (posé que ce point doive décrire la régle AB) au mouvement droit du mesme point, comme GH à HI; mais ce mouvement estant GH, le mouvement circulaire du point F de la ligne DFG décrivant la Conchoïde sera FK, & le mouvement droit du point F est égal au mouvement droit du point G: je tire donc KL égale & parallele à HI; & puis que la Conchoïde, & par con-

séquent sa touchante est décrite par un mouvement meslé des deux F K, K L, la ligne L F sera sa touchante au point F; ce qu'il falloit faire.

Sixiéme exemple de quelques autres Conchoïdes.

L'ON peut décrire des Conchoïdes aux lignes courbes aussi-bien qu'à la ligne droite; & pour en trouver les touchantes, il faut premiérement connoistre la touchante de la ligne courbe, qui est comme la régle ou base de la Conchoïde: or nous n'avons pas eû besoin d'une touchante de la régle ou base aux deux éxemples précédens, parce qu'à proprement parler il n'y a que les lignes courbes qui ayent des touchantes; l'on peut néanmoins dire que la ligne droite n'ayant point d'autre touchante, elle peut estre considérée comme se touchant soy-mesme, & que c'est en cette façon que nous l'avons considérée aux deux éxemples précédens.



Pour donner un éxemple de ces Conchoïdes, soit proposé un cercle duquel le rayon est A B, le centre A, & soit pris un point dans A B, prolongée, ou non, comme C, lequel nous prendrons pour le Pole de nostre Conchoïde; puis ayant prolongé C A B hors le cercle, comme en D, soit pris B D arbitraire pour l'intervale de nostre Conchoïde; enfin du Pole C tirons quantité de lignes occultes C E F coupant le cercle en E, & prenons du point E dans lesdites lignes les intervales E F égaux à B D, & d'une mesme part que B D, c'est-à-dire, en dehors du cercle si nous avons pris D en dehors dans le diamétre prolongé, ou en dedans si le point D a esté pris en dedans, cette Conchoïde passera par les points F F F &c.

Or il est fort facile de tirer la touchante de cette ligne si nous considérons qu'elle est décrite par un mouvement meslé d'un droit & d'un circulaire, desquels la direction nous estant donnée, il est tres-facile de trouver la raison de l'un à l'autre; car si nous voulons tirer une touchante de cette ligne en un point comme F, ayant tiré la ligne C F qui coupe la circonférence du cercle en E, & des points F E ayant tiré les perpendiculaires F H, E G sur la ligne C F; il est aisé de remarquer que la ligne C B D ayant tourné sur le centre C, & ayant changé la position par laquelle elle n'estoit qu'une mesme ligne avec C E F, son point B est descendu en E, pour décrire le cercle, & son point D est descendu en F, pour décrire la Conchoïde du cercle, & qu'il s'ensuit que la ligne C E F est la direction du mouvement droit de chacun de ces points & de celuy qui décrit le cercle, & de celuy qui en décrit la Conchoïde, & les lignes E G, F H sont les directions des mouvemens circulaires. Or les mouvemens droits sont égaux, puis que la différence des lignes C D & C F est égale à celle des lignes C B & C E, de sorte qu'il ne reste qu'à connoistre la quantité de l'un de ces mouvemens droits, & la raison des mouvemens circulaires entr'eux. Pour cét effet tirez E I touchante du cercle, & C H qui fasse un angle aigu avec C F (comme nous avons fait en la Conchoïde cy-dessus) & qui coupe E G, F H en G H, les directions des trois mouvemens E C, E G, E I estant données trouvez-en les proportions, ce que vous ferez tirant G I parallele à C F, le mouvement droit du point E sera G I, & son mouvement circulaire sera E G: mais le mouvement circulaire estant E G, le mouvement circulaire du point F est

FH (à cause que ces deux mouvemens sont entr'eux, à sçavoir E G à F H, comme le demidiamétre C E est à C F) vous n'avez donc qu'à prendre H L égale & parallele à G I, pour le mouvement droit du point F, & tirer la ligne de direction L F de celuy que les deux F H & H L composent, & vous aurez la touchante de cette Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

Dans la figure de cét éxemple nous avons pris le point C au dedans du cercle, & le point D en dehors: nous eussions pu les prendre ou tous deux en dedans, ou tous deux en dehors, ou le Pole en dehors, & le point de l'intervale en dedans. De plus nous pouvions prendre l'intervale plus grand ou plus petit, de sorte que nostre Conchoïde eust fort approché de la figure d'une Ellipse. Enfin de quel intervale que nous eussions décrit nostre Conchoïde, si nous eussions pris pour son Pole le point A centre du cercle, il est évident que nostre ligne eust aussi esté un cercle: mais ces choses estant tres-faciles, la méthode d'en tirer les touchantes n'ayant en toutes ces lignes qu'une mesme application, nous ne nous y arresterons pas davantage.

Mais nous remarquerons en passant, que l'on peut tirer des Conchoïdes par cette mesme méthode, & en tous ces divers cas à l'Ellipse & aux autres sections coniques, & généralement à toutes les lignes courbes, mesme aux Conchoïdes &c. & en tout ces cas l'application de nostre méthode de tirer les touchantes sera toûjours la mesme, si nous supposons qu'on nous ait donné la touchante de la ligne principale, dont nous éxaminons la conchoïde, ou des propriétez spécifiques pour la trouver.

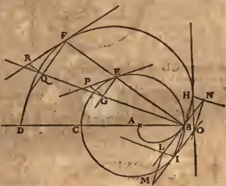
Septiéme éxemple, du Limaçon de M. P.

C'est encore une espéce de Conchoïde de cercle, de laquelle voicy la description.

Cette proposition est vraye, mais elle est expliquée en ce lieu avec beaucoup de confusion.

SOIT proposé le cercle C G B E, duquel le centre est A, le diamétre B C prolongé autant qu'il sera besoin, comme en D soit pris B pour le Pole de nostre Limaçon, & C D pour l'intervale duquel on se doit servir pour le décrire, moindre que le diamétre. De B tirez quantité de lignes occultes B E F, qui coupent la circonférence du cercle en E, & prenez E F en chacune de ces lignes égale à C D, & de mesme costé, le Limaçon passera par tous ces points F F. Or il faut remarquer que l'on prend autant d'intervales que l'on peut à commencer de la partie convexe du cercle, qui est d'un mesme costé que le Limaçon au regard de la ligne D C B, & que voulant continuër cette ligne il faut prendre les points E dans l'autre demi-circonférence, qui a sa concavité tournée vers le Limaçon, ainsi le point B du Limaçon est le réciproque du point G de la circonférence du cercle lors que B G est égale à C D; & le dernier point du limaçon que nous avons marqué d'une petite * est le réciproque du point C, & les points du Limaçon d'entre B & * sont les réciproques des points de la circonférence

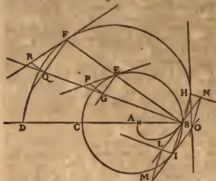
conférence G C, comme les points les plus proches de B audessus du diamétre C B dans le mesme Limaçon, sont les réciproques des points de la circonféren-ce G B, ainsi H est le réciproque du point I jusqu'au point K qui est le réciproque du point B, & vous voyez par là la vérité de ce que nous avions remarqué que l'intervale C D ne doit pas estre plus grand que le diamétre C B, car autrement l'on ne pourroit pas décrire la portion * B du Limaçon, mesme selon les divers intervales que l'on auroit pris, on n'auroit pas pû décrire la portion du mesme Limaçon la plus proche de B audessus du diamétre C B. Il est vray que pour ce qui est de cette méthode des touchantes, il ne nous importe point que cette ligne soit grande ou petite, entiére & terminée en un point du demi-diamétre A B, ou tronquée &c. parce que les mouvemens de la description de l'une & de l'autre de ces lignes estant par tout les mesmes, l'on en donne les touchantes de la mesme façon. Mais voulant éxaminer un autre moyen de décrire cette ligne, & dire quelque chose de son usage, ce que nous ferons cy-aprés, il y a fallu ajoûter cette restriction.



Il est aussi facile de tirer les touchantes de cette ligne que des Conchoïdes précédentes, la méthode en est la mesme, & les deux mouvemens, l'un droit, l'autre circulaire, qui décrivent cette ligne, se doivent éxaminer de la mesme façon : car il faut considérer que la ligne B E F se mouvant circulairement autour du Pole B jusqu'à ce qu'elle ait la position de B C D, les deux points E & F s'éloignant de B, montent dans la ligne vers D ; or puisque E F est égale à C D, la différence des lignes B E, B C est égale à la différence des lignes B F, B D ; d'où il suit que le point E qui décrit le cercle a le mesme mouvement droit dans la ligne B E F, que le point F qui décrit le Limaçon ; de sorte que connoissant le mouvement droit du point E nous connoistrons aussi le mouvement droit du point F : il reste donc à éxaminer les mouvemens circulaires de ces deux points, desquels les directions sont perpendiculaires à la ligne B E F. Tirez donc les perpendiculaires E G & F Q, & prenez dans E G sa partie E G *ad libitum*, pour la quantité du mouvement circulaire du point E, tirez encore la ligne B G Q, puis faites que comme le demi-diamétre B E est au demi-diamétre B F, ainsi E G soit à Q F (ce qui se fera par le moyen de la ligne B G Q, faisant un angle aigu *ad libitum* avec B F, & coupant E G en G, & F Q en Q) supposé donc que le mouvement circulaire E soit E G, la quantité du mouvement circulaire F fera F Q, mais supposé E G pour la quantité du mouvement E, l'on trouve que le mouvement droit E est égal à G P (ce qui se fait, ayant tiré la touchante du cercle P E, par le moyen de la ligne G P parallele à B E, & coupant la touchante en P) comme nous avons remarqué, & le mouvement droit de F est égal à celuy de E, comme nous l'avons expliqué cy-devant. Supposé donc F Q pour la quantité du mouvement circulaire F, le mouvement droit fera G P, c'est-à-dire Q R égale & parallele à G P ; le point R est donc donné,

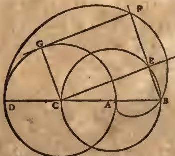
& par mesme moyen R F pour la direction & la quantité du mouvement meslé des deux F Q, Q R, c'est-à-dire, nostre touchante; ce qu'il falloit faire.

Remarquez qu'on doit toûjours examiner les deux mouvemens dans le cercle au point réciproque de celuy de la Conchoïde, pour lequel nous cherchons la touchante; comme par éxemple, si l'on vouloit tirer la touchante du Limaçon au point H assez proche de B, ayant tiré la ligne H B, & l'ayant prolongée jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en I, qui sera dans le cercle le point réciproque du point H, comme C est réciproque de D, car par la construction H I



est égale à C D, il faudra éxaminer les deux mouvemens du point I, & en ayant trouvé la raison, chercher la raison de son mouvement circulaire au mouvement circulaire de H &c. En deux mots imaginant que la ligne H I tourne sur le point B, & que la partie B I est portée en dedans du cercle vers C, ayant tiré la perpendiculaire I L vers le costé de C, & par conséquent la perpendiculaire H N vers l'autre costé, pour les deux directions circulaires; puis ayant trouvé la raison des deux mouvemens I, comme de I L à L M (par le moyen de M I touchante du cercle B I C) &c. il faudra faire que comme B I est à B H, ainsi I L soit à H N, puis ayant pris N O égale & parallele à L M, la ligne O H menée par les points O & H, sera la touchante de nostre Limaçon.

L'on peut dire que cette ligne est décrite par le moyen d'une double équerre C E F B, de laquelle les costez C E, E B sont prolongez autant qu'il est besoin. Or il n'est pas besoin que chacun d'eux soit plus grand que le diamétre C A B du cercle C E B, & l'autre costé E F est toûjours égal à l'intervale que l'on prend de chaque point du cercle jusqu'à son réciproque dans le Limaçon; de sorte que faisant tourner l'angle droit C E B, en sorte que son point E décrive le demi-cercle C E B, ce qui se fait luy donnant diverses positions, & toutes dans un mesme plan,



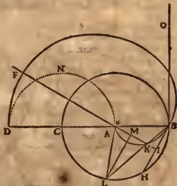
& à condition que la ligne C A B doive estre toûjours l'hypotenuse des triangles rectangles qu'elle fera avec les parties de C E & E B, l'on n'a qu'à marquer dans le mesme plan tous les points que le point F de la double équerre aura décrit.

Or sur cette supposition l'on trouvera les touchantes de cette ligne de la mes-

me façon que nous avons déja fait, parce qu'encore qu'on ne considére pas le point F, comme se promenant le long de la ligne B E F, & mesme que cette ligne tourne circulairement sur le Pole B, l'on ne laisse pas de connoistre les deux mouvemens que luy donne la ligne B E F, qui en cette seconde supposition tournant sur le point B, s'éleve en mesme temps peu à peu pour conduire l'angle droit B E C de B en C sur la circonférence du demi-cercle B E C.

Mais voicy une des belles spéculations qui se puisse sur la description de cette ligne, & par le moyen de laquelle elle a esté trouvée par le sieur de Roberval.

Soit proposé le cercle C E B, & l'intervale C D comme aux figures précédentes; du point C & de l'intervale C D soit décrit le cercle D G *; je dis que si ce dernier cercle D G * est la base d'un Cone scalene du sommet duquel, que nous appellerons S, la perpendiculaire S B tombe en B sur le plan du cercle D G *; ayant tiré des touchantes G F à ce cercle, & du point S tiré des lignes S F perpendiculaires à ces touchantes, que chacun des points F sera dans nostre Limaçon, ou si vous aimez mieux que la ligne qui passe par tous ces points F F est la mesme que le Limaçon du cercle C E B, dont le Pole est B, & l'intervale est C D. Car si du point B vous joignez la ligne B F, il est certain par un coroll. de la 6. du 11. qu'elle sera perpendiculaire à G F. Du centre C tirez C E paralléle à G F, & qui coupe B F en E; G E sera donc un parallélogramme réctangle, & la ligne E F sera égale à C G, c'est à-dire à C D; mais l'angle C E B estant aussi droit, il est dans un demi-cercle décrit sur le diamétre C B. Il s'ensuit donc que nous trouverons toûjours un mesme point F, soit ayant décrit le cercle D G *, & ayant tiré sa touchante G F, & de S sommet du Cone ayant mené la ligne S F, soit ayant décrit un cercle C E B, & tiré la ligne B E F coupant le cercle en E, & pris E F égale à D C demi-diamétre du premier cercle: mais nous avons montré que trouvant des points F par cette seconde méthode, nous décrivons le Limaçon du cercle C E B, & partant trouvant les points F de la premiére façon, puisque ces points sont les mesmes, nous décrirons aussi nostre Limaçon; ce qu'il falloit démontrer.



Je diray en passant une propriété de la petite portion de cette ligne, qui est telle que si l'on prend l'intervale D C égale au demi-diamétre C A, du cercle auquel on décrit le Limaçon, & que de cét intervale l'on décrive le Limaçon, sa petite portion * B servira à couper un angle réctiligne proposé en trois parties égales. Cette propriété est du sieur Pascal.

Car soit proposé l'angle D B H, dans l'une des deux lignes, qui le contient, comme D B, je prends le point *, duquel j'abaisse * I perpendiculaire sur l'autre ligne B H, & qui coupe la partie * K B du Limaçon (décrit du Pole B au cercle dont le centre est *, le rayon * B & l'intervale du mesme Limaçon C D est égal à * B) en K, je tire la ligne B K L, je dis qu'elle fait avec la ligne B H l'angle K B H $\frac{1}{3}$ de l'angle proposé C B H.

Pour le prouver soit décrit le cercle du Limaçon & la ligne B K prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence dudit cercle en L, tirez L *, & ayant divisé * K *bifariam* en M, joignez L M, laquelle sera perpendiculaire sur

* K ; car à cause du Limaçon, le triangle * L K a les costez L *, & L K égaux; estant égaux à un mesme C D. Puis donc que les triangles L M K, B I K sont réctangles, & ont les angles opposez égaux, ils sont semblables, & l'angle M L K égal à I B K, mais M L K n'est que la moitié de l'angle * L K (parce que le triangle * L K est isoscele, & sa base * K divisée *bif.* &c.) c'est-à-dire, de * B L, (car le triangle * L B est encore isoscele) & partant l'angle K B H n'est que $\frac{1}{3}$ de l'angle * B L, & partant $\frac{1}{3}$ du tout * B H ; ce qu'il falloit démontrer.

Nota si l'on eust proposé l'angle obtus H B O en ayant osté l'angle droit D B O, & pris H B K $\frac{1}{3}$ du restant, il ne faut que luy ajoûter un angle de 30. degrez qui est $\frac{1}{3}$ de l'angle droit, pour avoir le tiers du total proposé D B O.

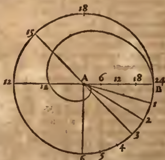
Monsieur de Roberval démontre que l'espace contenu sous la ligne droite D C * (soit que D C soit égale ou non à C *) & sous la courbe * K B F F D est égal à l'aggregé du cercle B H C, duquel la ligne * K B F D est le Limaçon, & du demi-cercle duquel l'intervale de cette mesme ligne C D est le demi-diamétre, de sorte que si du centre C & de l'intervale C D l'on décrit le demi-cercle D N * l'espace curviligne contenu entre cette demi-circonférence, & le Limaçon est égal au cercle B H C, dont cette ligne est la Conchoïde.

Si l'on continuoit cette ligne de l'autre costé du cercle, elle représenteroit une sorte de figure en cœur divisé en deux superficies curvilignes, desquelles l'on pourroit faire un semblable examen, les comparant à des portions de cercle &c.

De la Spirale ou Hélice.

LA premiére définition du Livre des Spirales d'Archiméde nous apprend le moyen de décrire cette ligne ; voicy les termes d'Archiméde.

Si recta linea in plano, manente altero termino, aequè velociter circunducta rursùs restituatur in eum locum à quo primùm cœpit moveri ; & unà cum lineâ circumductâ, punctum feratur aequè velociter ipsum sibi ipsi, in eadem linea, incipiens à termino manente ; ejusmodi punctum spiralem lineam in plano describet.

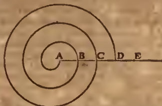


Soit proposé la ligne A B égale à l'intervale duquel on veut décrire la Spirale du centre A & de l'intervale A B décrivez le cercle B 3, 6, 12, 18, 24, divisez-en la circonférence en autant de parties égales que vous pourrez commodément, à commencer en B, & divisez la ligne A B en tout autant de parties égales ; tirez les rayons A 1, A 2, A 3 &c. du point A sur le rayon A 1 prenez une des parties aliquotes du rayon A B ; sur le rayon A 2 prenez deux des mesmes parties ; 3 sur A 3, 12 sur A 12, 15 sur A 15, & ainsi des autres, les points que vous aurez marquez sur les demi-diamétres seront dans la Spirale que vous voulez décrire.

Que si dans la mesme ligne A B vous prenez B C, C D, D E &c. tant que vous voudrez, chacune égale à A B, & que cependant qu'A B fera une seconde révolution du mouvement uniforme, le point qui estoit venu en B s'avance du mouvement uniforme sur la ligne A B C D jusques en C, ce point décrira l'Hélice

l'Hélice de la seconde révolution à commencer en B & finir en C, & ainsi de suite pour les autres révolutions.

D'où il s'ensuit que la méthode est la mesme pour les autres révolutions que pour la premiére; car voulant décrire la seconde révolution, il faudra décrire du centre A de l'intervale A C une circonférence de cercle, & l'ayant divisée en autant de parties que la premiére circonférence du rayon A B, à quoy les mesmes rayons tirez du centre A aux points de la premiére



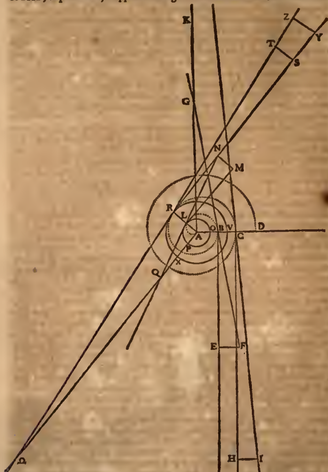
circonférence serviront s'ils sont prolongez, & chacun pris égal à A C 1 sur le rayon A 1 de cette seconde circonférence, vous prendrez depuis le centre A une ligne égale à A B + 1 de ses parties aliquotes, sur A 2 vous prendrez une ligne égale à A B + 2 de ses parties aliquotes &c. & ainsi les points que vous aurez marquez sur les demi-diamétres de ce second cercle seront ceux par lesquels il faudra décrire la seconde révolution de l'Hélice.

Cecy posé, il faut considérer que le point qui décrit la Spirale, en quelque part qu'il se trouve, a toûjours le mesme mouvement droit sur la ligne A B C D E; & ce mouvement est tel par la nature de cette ligne, qu'en mesme temps que la ligne A B a fait une révolution, ce point doit en mesme temps avoir parcouru une ligne égale à A B, mais en chaque endroit il change de mouvement circulaire; de sorte que la vitesse de son mouvement circulaire s'augmente toûjours à mesure qu'il s'éloigne du centre A; car son mouvement circulaire est tel que ce point décriroit la circonférence dont la portion de la ligne A B C D E, depuis A jusqu'où ce point se rencontre, est le demi-diamétre pendant le temps d'une révolution, c'est à sçavoir en autant de temps qu'il en employe à parcourir par son mouvement droit la ligne A B depuis A jusques en B, ou de B en C, de sorte que puis qu'en B son mouvement est tel que s'il en eust toûjours eû un circulaire égal depuis A jusques en B, il auroit décrit une circonférence dont A B est le rayon pendant le temps d'une révolution, & que le mouvement circulaire qu'il a en C est tel que pendant le temps d'une révolution (ou s'il faut ainsi dire d'une circulation de la ligne droite, car le terme de révolution s'attribuë plus ordinairement à la Spirale mesme) il auroit décrit une circonférence dont le rayon est A C, double de A B, il s'ensuit que le mouvement circulaire qu'il a en C est double de celuy qu'il a en B, & que celuy qu'il a en D est triple de celuy qu'il a en B &c. & ainsi des autres.

Et parce que le mouvement circulaire de ce point est tel, comme nous avons dit, que pendant le temps d'une circulation de la ligne A B C D, il doit décrire une circonférence de cercle dont la ligne depuis le commencement A de la Spirale jusqu'à l'endroit de la Spirale où ce point se trouve, est le demi-diamétre: & de plus le mesme point doit décrire par son mouvement droit pendant le mesme temps d'une circulation, une ligne égale au rayon A B du cercle de la premiére circulation; il s'ensuit que, quelque point de la Spirale que nous prenions, nous aurons la raison du mouvement circulaire du point qui la décrit au mouvement droit du mesme point, comme de ladite circonférence à la ligne A B, mais aussi les deux directions de ces mouvemens sont données (le commencement de la Spirale & le point où l'on veut la touchante estant donnez) car la direction du mouvement droit est la ligne droite tirée de A jusqu'audit point, & la direction du mouvement circulaire est la perpendiculaire à cette ligne; ces deux mouvemens sont donc tout-à-fait con-

nus, & par conséquent le mouvement meslé de ces deux & sa direction, c'est-à-dire, la touchante de l'Hélice en ce point est aussi donnée; ce qu'il falloit faire.

Ainsi pour tirer la touchante en B, je joins A B, & je tire B E perpendiculaire à AB, laquelle B E je suppose estre égale à la circonférence, dont A B est le



rayon; puis ayant mené E F parallele & égale à A B, la ligne F B touchera l'Hélice au point B. Et quand bien l'on auroit quelque difficulté à concevoir cette méthode, il nous sera toûjours facile de montrer qu'elle s'accorde avec les démonstrations des Anciens. Nous avons ainsi démontré que cette façon

de trouver les touchantes des sections coniques s'accorde avec celle d'Apollonius, & nous démontrerons icy que nostre construction s'accorde avec les propositions d'Archiméde : car soit A G perpendiculaire à A B, il est évident que F B prolongée la rencontrera en un point comme G, puis qu'elle rencontre B E sa parallele par la construction, & partant l'angle A G B sera égal à l'angle E B F, & ces triangles semblables ; mais le costé A B est égal au costé E F, & partant A G sera égal à B E, c'est-à-dire, à la circonférence du premier cercle de la Spirale, ce qui est vray par la 18. du livre des Spirales.

De mesme pour le point C, qui est la fin de la seconde révolution, tirant C H perpendiculaire à A C, & égale à la circonférence dont A C est le rayon, puis tirant H I égale & parallele à A B, & joignant I C ce sera la touchante : nous démontrerons qu'estant prolongée, elle coupera A G K, prolongée comme en K, & que les triangles I H C, C A K seront semblables : donc comme A C est à H I, ainsi A K sera à C H, c'est-à-dire le double de C H à C H, & partant A K est le double de la circonférence dont A C est le rayon ; ce qui est vray par la 19. des Spirales.

Pareillement pour avoir la touchante en un autre point de la premiére révolution, comme en L, je tire A L & je décris la circonférence L O P L coupant A B en O, je prends L M perpendiculaire à A L, & égale à ladite circonférence ; par M je tire M N parallele à A L, & égale à A B rayon de la premiére révolution, N L est la touchante, car soit tirée A P Q perpendiculaire à A L, par la mesme raison N L prolongée la rencontrera en un point, comme en Q, & comme A L ou A O est à M N on A B, ainsi sera A Q à L M, c'est-à-dire à toute la circonférence O P L : mais par la nature & par la description de l'Hélice, comme A O est à A B, ainsi la portion O P L de ladite circonférence est à toute la circonférence, donc la ligne A P Q est égale à la portion O P L de la circonférence O P L ; ce qui est aussi démontré dans la 20. propos. des Spirales d'Archiméde.

Semblablement pour avoir la touchante en un autre point de la seconde révolution, comme en R, je tire A R & je décris la circonférence R V X R coupant A B C en V ; je prends R S perpendiculaire à A R & égale à cette circonférence, & je tire S T parallelle à A R, & égale à A B ; T R est la touchante : car par la mesme raison ayant tiré A Q Ω perpendiculaire à R A, la ligne T R prolongée la rencontrera comme en Ω, & comme A R ou A V sera à T S ou A B, ainsi A Ω sera à S R, c'est-à-dire à la circonférence R V X R ; mais par la nature de la Spirale, comme A V est à A B, ainsi la circonférence R V X R estant jointe à la circonférence V X R, est à la mesme circonférence R V X R ; & partant A Ω est à la circonférence R V X R, comme la mesme circonférence R V X R jointe à la circonférence V X R est à R V X R, donc la ligne A Ω est égale à l'aggrégé des deux circonférences R V X R & V X R, ce qui est vray par la 20. du livre des Spirales d'Archiméde.

L'on pouvoit dire d'abord tirez A R, & A X Ω qui luy soit perpendiculaire & égale à l'aggrégé de la circonférence R V X R & de V X R, on aura la touchante Ω R ; ou bien ayant tiré A R & ayant décrit la circonférence du centre A & de l'intervale A R, & semblablement R Y perpendiculaire à A R, faites que comme A B est à A R, ainsi cette circonférence du cercle soit à R Y perpendiculaire, vous aurez le point Y ; tirez Y Z égale & parallelle à A R, vous aurez le point Z, & Z R sera la touchante.

Mais il a semblé plus clair & plus facile de réduire ces mouvemens à la droite A B & à la circonférence, dont A R est le demi-diamétre, & ainsi des autres.

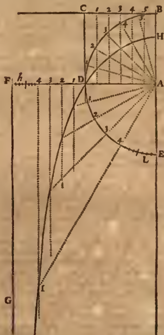
Nous avons supposé qu'on nous donne des lignes droites égales à des circonférences de cercle, ou pour le moins qu'on en entende d'égales, ce qui

estant posé nous avons par cette méthode les touchantes de ces lignes, ou pour mieux dire nous démontrons, que concevant une ligne droite égale à une circonférence de cercle, l'on peut par la connoissance des mouvemens composez concevoir quelle sera la ligne droite qui touchera l'Hélice en un point proposé : nous ferons la mesme supposition pour la quadratrice.

Exemple neuviéme de la Quadratrice.

Cette proposition est trop longue & fort embrouillée.

SOIT proposé le quarré ABCD avec son quart de cercle ABD qui luy est inscrit, duquel le centre est A, & le rayon est AB, l'un & l'autre plus grand ou plus petit, suivant que l'on veut décrire la Quadratrice grande ou petite. Soit divisé l'un des costez du quarré CB ou AD (perpendiculaire à AB rayon du quart) en autant de parties égales qu'on voudra 1 2 3 4 5. &c. & par ces points soit tiré des paralleles à AB jusques au costé opposé ; divisez le quart de cercle en autant de parties égales 1 2 3 4 5. &c. à condition que si aux divisions de la ligne BC, vous avez commencé à compter 1, proche de B, vous commencerez aussi à compter au quart de cercle 1, proche de B ; mais, si vous aviez commencé en C, vous commencerez en D sur le quart de cercle ; tirez du centre A des demi-diamétres jusqu'aux points de ces divisions du quart de cercle A 1, A 2, A 3, &c. là où A 1 coupera la premiére des paralleles, A 2 la seconde, A 3 la troisiéme, A 4 la quatriéme &c. vous aurez les points par où doit passer la portion DH de la Quadratrice de laquelle le sommet H est dans la ligne AB.



Nota que *Viete Respons. lib. 8. cap. 8.* appelle le point H *finis Quadratariæ* ; mais il n'en considere que la portion H D pour la quadrature du cercle.

Pour prolonger cette ligne audessous du diamétre AD, ayant achevé le demi-cercle BDE du centre A, dans la droite AD prolongée vers D, je prends DF égale à AD, laquelle je divise en autant de parties égales que je juge à propos 1 2 3 4. &c. à commencer proche de D, & par ces points je tire des paralleles au diamétre du cercle BAE, lesquelles je prolonge audessous de DF, autant qu'il est nécessaire ; puis je divise le quart de cercle DE, en autant de parties égales que j'ay divisé la ligne DF, à commencer aussi en D ; par ces points & par le centre A je tire des lignes A 1, A 2, A 3, &c. jusqu'à ce qu'elles rencontrent chacune sa parallele réciproque, c'est-à-dire A 1 la premiére, A 2 la seconde &c. & par ces divisions je décris la portion DI de la mesme quadratrice prolongée. Or

Or il est manifeste que cerre portion peut estre prolongée à l'infini, car ayant pris une tres-petite portion F*h* de la ligne F D, & une partie proportionelle E L du quart du cercle, l'une & l'autre estanr divisées par la moitié, & ayant tiré les lignes, comme nous avons dir, nous trouverons un point de la quadratrice : mais de rechef l'on pourra diviser la moirié, puis le $\frac{1}{4}$, puis la $\frac{1}{8}$ &c. partie plus proche de F de la ligne F*h*, & la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis la $\frac{1}{8}$ partie plus proche de E de la circonference L E, & tirer de nouveau des lignes paralleles, & des demi-diamétres prolongez qui se coupent, pour avoir de nouveaux poinrs de la quadratrice ; & puis que l'on peur conrinuer ces divisions sans fin, l'on trouvera aussi sans fin des points de la quadratrice audessous de D & de I ; car pour la finir, il faudroit que la derniére ligne rirée du poinr F de la ligne A D F parallele à A E renconrrast son demi-diamétre réciproque, c'est à sçavoir le dernier du quarr de cercle D E, c'est-à-dire que F G perpendiculaire à D F en F rencontrast le diamérre B A E prolongé, auquel elle est parallele ; ce qui est impossible.

Et par là vous voyez qu'aucun point de la quadratrice ne se rencontrera dans F G, puisque le demi-diamétre réciproque à F G ne la sçauroit jamais rencontrer : elle ne la coupera donc pas quoy-qu'elle soit prolongée à l'infini, & néanmoins elle s'en approche toûjours de plus en plus, car les poinrs de la Quadratrice sonr trouvez dans les paralleles à F G que l'on tire par des points toûjours plus proches de F que leurs précédentes, & partant la ligne F G est Asymptote de la quadratrice.

L'on peut achever le cercle entier, & continuër la quadratrice de l'autre costé du diamétre B E, avec son Asymptote &c.

Je ne dis tien ni du nom de la Quadratrice ni de son usage pour la quadrature du cercle au defaut de Dinostrate ou de Nicoméde, qui ne se trouvent point. *Voyez Pappus lib. 4. Collect. M. ou Viete lib. 8. resp. cap. 8. & Clavius Geom. pract. lib. 7. in appendice.*

Pour tirer par cette méthode les touchantes à la Quadratrice, il faut éxaminer les mouvemens qui la décrivent. On voit d'abord que le demi-diamétre A D du cercle B D E estant prolongé & tournant circulairement sur le centre A, & la ligne C D se mouvant en mesme temps parallelement à soy-mesme, soit qu'elle s'approche de B A, ou qu'elle s'en éloigne suivant que nous faisons tourner le demi-diamétre, ou de D vers B, ou du mesme D vers E, car tout revient au mesme, que le point, dis-je, qui décrit la Quadratrice a pour le moins deux mouvemens, l'un droit que la ligne C D luy communique, l'autre circulaire à cause du mouvement du demi-diamétre A D ; mais outre ces mouvemens il a encore celuy qui l'oblige à se renconrrer dans la commune section des deux lignes A D, C D, ce que nous avons expliqué à la fin de la quatriéme proposirion de ce Traité où vous trouverez une figure tres-semblable à celle-cy. En voicy pourtanr l'application le plus intelligiblement qu'il m'est possible.

Soit proposé la quadrarrice H D F, de laquelle le demi-cercle primitif, donnez-moy ce mot, soit B D E & le centre du demi-cercle soit A, & que l'on demande la rouchante de la Quadratrice en un point, comme en F. Je prolonge le diamérre B H A E de part & d'aurre, puis je tire la ligne A F, qui est celle qui communique le mouvement circulaire au poinr F ; je tire encore par F une paralleleau diamétre B E, c'est celle qui communique à nostre point le mouvemenr droir duquel la direction est F K parallele à D A & perpendiculaire à A E. Par F je tire F R perpendiculaire à A F pour la direction du mouvemenr circulaire. Et ayant supposé que la ligne A F tourne circulairemenr de D vers B ou de F vers G, du centre A je décris la portion de la circonférence F C G comprise entre les lignes A F & A B G. Cecy posé je suis

obligé d'imaginer que la ligne tirée de F parallele à A B G se meut de F vers ladite A B G, & par la nature de cette ligne, puisque cette parallele doit s'ajuster & ne faire qu'une ligne avec A B lors que la ligne A F ayant tourné de F vers L G aura la mesme position. Si je conçois deux points, l'un F à l'extrémité de ladite parallele F I, l'autre F au bout de la ligne A F, & que l'un & l'autre de ces points n'ait que le mouvement, le premier de la ligne I F le long de F K, l'autre celuy qui luy fait décrire la circonférence F C G; ou pour mieux dire, puisque la direction de ce mouvement circulaire est F R, je suis asseûré que pendant que le premier point aura décrit F K, le second estant porté par la ligne A F que nous imaginons se mouvoir parallelement à soy-mesme, & partit du point F (comme nous avons pû faire cy-devant comme en la Spirale &c.) puisque la direction du mouvment circulaire est F R, que ce point, dis-je, aura décrit dans F R prolongée une ligne F R égale à la circonférence F C G.

Mais dautant que ces deux mouvemens ne sont pas les seuls qu'a le point qui décrit la quadratrice, je ne tire pas du point R une ligne parallele & égale à F K, pour avoir à son autre bout un point de la touchante, mais j'examine plûtost tous les mouvemens du point F qui décrit la Quadratrice en cette sorte.

Je remarque donc premiérement ce que je viens d'expliquer, que le point F doit décrire la ligne F R égale à la circonférence F C G en autant de temps que la ligne F I se mouvant parallelement à soy-mesme & uniformement en emploira jusqu'à ce qu'elle ait la position de la ligne A B G.

Secondement. Faisant donc mouvoir la ligne A F parallelement & uniformement (puisque F R est la direction du mouvement circulaire du point F, comme nous avons dit) sans considérer le mouvement de la ligne I F, & partant considérant ladite ligne immobile, il est certain que, si nous gardons la condition des mouvemens qui décrivent la quadratrice, qui est que le point F doit toûjours estre en la commune section des lignes A F, F I, quand l'extrémité immobile de la ligne A F sera en R, le point mobile F se doit rencontrer là où A F prolongée tant qu'il sera nécessaire, coupe la ligne F I; tirez donc par R la ligne R I M parallele à A F & coupant F I en I & le diamétre E B M prolongé en M, vous voyez que le point mobile F se doit rencontrer en I.

Troisiémement. Mais outre ces mouvemens il faut encore considérer que la ligne F I emporte ce point de I vers L où il se devra trouver (ayant tiré I L parallele à F K, & coupant A B G prolongée en L) lors que la ligne I F sera une mesme avec la ligne A B G, c'est à sçavoir lors que son extrémité immobile F aura décrit la ligne F K, & son point immobile I, la ligne I L. Il est

donc certain que si aux mouvemens précédens l'on ajoûte celuy du point mobile F ou I le long de I L, sans considérer que ce point mobile doit toûjours estre dans la commune section des lignes A F, I F, le point mobile F se doit trouver en L.

Enfin il faut encore considérer que ce point F a toûjours deû estre la commune section des lignes A F, F I, & qu'ayant fait mouvoir A F jusqu'à ce que son extrémité immobile ait décrit F R, on luy a donné la position R I, à laquelle elle s'arreste, posé que I F ne doive se mouvoir que sur F K, & que par cette condition le point estant porté de I vers L, doit décrire la ligne I M au lieu de I L & se rencontrer en M au lieu de L; & partant tous les mouvemens de ce point estant examinez, l'on trouve que pendant que A F s'est promenée le long de F R, & I F le long de F K, le point de leur commune section est arrivé en M; & partant si vous tirez la ligne M F, vous aurez la touchante de la Quadratrice en F; ce qu'il falloit faire.

En deux mots, ayant tiré comme cy-dessus la ligne F R égale à la circonférence F G G & les lignes F I, R I M, puisque nous considérons un seul mouvement circulaire du point qui décrit la Quadratrice, sçavoir celuy qu'il a en F, nous le considérons par nostre principe, ce que nous avons pratiqué aux lignes précédentes, mesme en la Spirale le long de la touchante F R, ce point doit donc monter de F vers R, mais il doit encore estre porté vers la ligne A B, à cause du mouvement de la ligne F I, & outre ces deux mouvemens il doit toûjours estre la commune section des lignes A F, F I, en quelque lieu que nous tirions ces deux lignes, il sera donc dans leur commune section lors que A F sera en R I M, & I F en A B M, & partant il sera en M. Voicy en deux mots une régle générale Quadrat.

Un point F de la Quadratrice estant donné, & le demi-cercle B D E, par le moyen duquel elle est décrite. Si du centre A de ce demi-cercle & de l'intervale A F, vous décrivez une circonférence F C G depuis F jusques en un point G du diamétre A B, dans lequel se rencontre le sommet H de la quadratrice vers la partie de ce sommet; & si à cette portion de circonférence vous tirez une touchante en F, dans laquelle vous prenez une ligne F R égale à ladite portion de circonférence (d'où il suit que pour tirer la touchante en D, il ne faut que prendre dans A B prolongée depuis A une ligne égale au quart de cercle B D) la commune section du diamétre A B prolongé vers B, & d'une ligne R M tirée par R parallele à A F, sera dans la touchante de la quadratrice.

Ou sa converse à la façon d'Archiméde au livre des Hélices.

Si quadratricem linea recta contingat, producaturque donec occurrat semidiametro circuli quadratricis, in qua reperitur quadratricis vertex, etiamsi fuerit opus ad partes verticis productâ, & ab ejusmodi puncto sectionis recta linea ducatur parallela ei qua à centro circuli quadratricis ad punctum contactûs in quadratrice ducitur; à puncto verò contactûs in quadratrice circunferentia circuli circulo quadratricis homocentri portio describatur ad partes verticis quadratricis donec eidem semidiametro etiam producta occurrat, eique circunferentia portioni tangens ducatur ad punctum quod est communis sectio ipsius & quadratricis, occurret ejusmodi tangens circuli ei qua à communi sectione tangentis Quadratricis & diametri producta ducta fuerat parallela, eritque linea circulum tangentis portio inter punctum (quod est communis sectio ipsius & producta parallela) & quadratricem intercepta aequalis prædicta portioni circunferentia circuli.

Nota, l'on peut rendre la régle plus générale, faisant comme la circonférence F C G est à F K; ainsi une ligne prise dans F R, mesme prolongée, plus grande ou plus petite que F R, soit à une ligne plus grande ou plus petite que

F K prise dans F K, mesme prolongée; mais ne la prenant pas égale, la construction en est plus difficile.

Remarquez deux ou trois choses avant de passer outre. La premiére, pour plus grande intelligence l'on peut déduire l'application de la seconde partie de la quatriéme proposition de ce traité en cette façon.

La vitesse du mouvement de la ligne I F, & partant de son extrémité mobile F estant donnée dans F K, elle sera aussi donnée dans F A; & parce que le point mobile F doit estre la commune section des deux I F, F A, la ligne I F ayant la position K A B coupera F A, c'est-à-dire en A; ce point a donc eû deux mouvemens, l'un de la gauche vers la droite égal à F K, l'autre en montant égal à K A, & ces deux se réduisent à un seul F A: pareillement la vitesse de la ligne A F estant donnée dans F R, son point mobile F devant estre la commune section de A F & F I se trouvera en I, & partant il a eû les deux mouvemens F R, R I, qui se réduisent à un seul F I, qui est le troisiéme costé du triangle F R I.

Ces quatre mouvemens (car nous avons divisé en deux parties celuy qui fait que le point mobile F doit estre la commune section des deux lignes A F, I F) estant réduits aux deux I F, F A achevez-en le parallelogramme I F A M, la diagonale F M sera la direction du mouvement meslé de ces deux.

Cecy avoit déja esté expliqué plus briévement, mais il y a plaisir de considérer une chose par divers biais & en differentes façons.

La seconde; si l'on demandoit la touchante de la quadratrice au point D, où la ligne A D est d'abord perpendiculaire à D C, que puisque le mouvement de A D est donné dans D C, ou bien A B, & celuy de D C est donné aussi d'abord dans D A, & la raison de ces deux mouvemens est comme de la ligne D A au quart de cercle D B, il ne faut que prendre dans A B prolongée autant qu'il le faut une ligne A E, à commencer en A, égale au quart de cercle, & du point E l'on tirera la touchante E D.

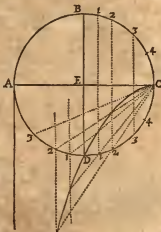
L'on eust pû faire trois divers cas pour les touchantes de cette ligne, mais le discours est tout le mesme voulant tirer la touchante au dessus de D entre D & H, que lors qu'on la tire en un point plus éloigné de H & au dessous de D, comme au premier exemple.

La troisiéme, que *Viete loc. cit.* appelle le point H *finis quadratariæ*, & le point D *principium*; mais il ne considére que la portion D H, qui luy sert pour la quadrature du cercle, & puis il s'arreste à la façon de décrire la quadratrice, & il est manifeste que le point D se trouve d'abord, & que décrivant la quadratrice D H à l'ordinaire, le point H se trouve aprés les autres qui sont entre D & H: mais nous pouvons concevoir le point H tout le premier; & parce que considérant la Quadratrice prolongée des deux costez, chacun des autres points en a un réciproque de l'autre costé également éloigné de H, & que le point H est le seul qui n'a point de réciproque, nous l'avons appellé le sommet de la Quadratrice.

Dixiéme

Dixiéme exemple de la Cissoïde.

SOIT proposé le cercle ABCD, plus grand ou plus petit, suivant qu'on veut décrire la Cissoïde, avec ses deux diamétres à angles droits AC, BD : du point D prenez de part & d'autre des points également distans D 1 & D 1 sur les quarts de cercle DA, DC, puis D 2, D 2, puis D 3, D 3 &c. tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DC des lignes paralleles au diamétre BD, puis du point C joignant les lignes C 1, C 2, C 3, C 4 &c. aux points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DA, là où C 1 coupera la parallele 1 1, & C 2 la parallele 2 2, & C 3 la parallele 3 3, & C 4 la parallele 4 4, vous aurez des points par lesquels la Cissoïde est décrite.



Que si vous voulez prolonger la Cissoïde CD en dehors du cercle, tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart du cercle DA des lignes paralleles au diamétre BD, & prolongez-les tant qu'il faudra en dehors du cercle du costé de D, puis par les points réciproques 1, 2, 3, 4 du quart de cercle DC, tirez du point C d'autres lignes occultes C 1, C 2, C 3, C 4, & prolongez-les autant qu'il le faudra hors le cercle, les points où chacune de ces lignes coupera sa réciproque, sçavoir C 1, la parallele 1 1; C 2 la parallele 2 2 &c. ces points seront dans la Cissoïde prolongée.

Par un discours semblable à celuy dont nous nous sommes servis pour la quadratrice, l'on montrera que cette ligne peut estre prolongée infiniment, & qu'elle ne rencontrera jamais une ligne droite infinie tirée du point A parallele au diamétre BD, ou si vous aimez mieux la touchante du cercle de la Cissoïde au point A.

Et parce que la Cissoïde peut estre continuée de l'autre costé par le moyen d'un autre cercle égal à ABCD, & décrit sur son diamétre AC prolongé vers C, en sorte que ces deux cercles se touchent en C, il nous sera permis d'appeller le point C, le sommet de la Cissoïde, puisque c'est l'unique dans la Cissoïde, qui n'en a point de réciproque, ou si vous voulez de semblable : car les points de la Cissoïde prolongée plus loin que D, à l'égard de C peuvent estre appellez réciproques des points de la portion DC de la Cissoïde. Ce qui est assez clair par la méthode de trouver ces points.

Cecy posé, il faut examiner les mouvemens particuliers du point qui décrit la Cissoïde, pour en donner les touchantes.

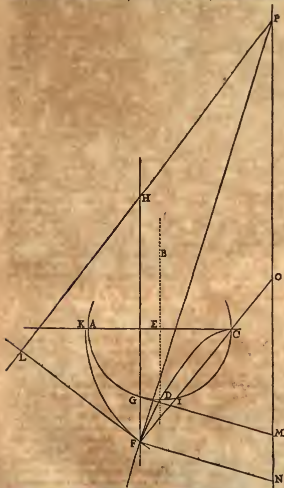
Il faut donc remarquer d'abord, que si vous faites tourner la ligne CD circulairement autour du point C, en sorte qu'elle passe successivement par C 1, C 2, C 3 &c. de D vers A, prenant les points 1 2 3 4 dans le quart de cercle DA, & qu'en mesme temps le diamétre BD soit porté parallelement à soy-mesme vers C, mais en montant de telle façon que son extrémité D décri-

ve le quart de cercle D C d'un mouvement égal & uniforme, & que lors que la ligne C D aura la position C A, le diamétre B D ait la position de la touchante du cercle en C, c'est-à-dire de l'axe de la Cissoïde, le point qui aura toûjours esté dans la commune section de ces deux lignes aura décrit la portion D C de la Cissoïde. Cecy posé.

Soit proposé le point F de la Cissoïde lequel soit pris dans cette figure entre les points C & D; mais dans la suivante il sera plus éloigné du sommet, & au dessous de D à l'égard de C, tirez la ligne F G parallele au diamétre B D, coupant le cercle en G en sa partie inférieure dans le quart de cercle D C en cette premiére figure, & prolongez-la du costé de F vers H, puis tirez la ligne C F, & prolongez-la jusqu'à la circonférence du cercle en I, (dans la seconde figure elle coupe le cercle avant que d'arriver en F) vous voyez donc que la ligne C F I en tournant autour du centre C jusqu'à ce qu'elle ait passé par toutes les positions des lignes tirées du point C à tous les points de la circonférence I A jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position C A, dans ce mesme temps la ligne F G s'estant meûë, comme nous avons expliqué, parallelement à soy-mesme vers C, en sorte que son point G ait décrit la circonférence G C du cercle de la Cissoïde, sera arrivée en C, & aura la position de la touchante du cercle de la Cissoïde au point C.

Mais pendant le mouvement circulaire de la ligne C F vers A, si vous décrivez du centre C & de l'intervalle C F un arc de cercle F K compris entre C F & C A & coupant C A en K, il se trouve que le point F de la ligne C F porté par le seul mouvement de la ligne C F, ce point, dis-je, a décrit l'arc F K, il a donc décrit l'arc F K en mesme temps que le point G porté par le mouvement que nous avons expliqué de la ligne F G, a décrit la circonférence G C, mais chaque point de la ligne F G décrit une ligne égale & semblable à celle que décrit le point G, & partant le point F de la ligne F G porté par cette ligne décrit une circonférence égale à G C: vous voyez donc que ne considérant que les deux mouvemens du point F, que les deux lignes C F, F G luy donnent sans considérer que ce point doit toûjours estre en leur commune section par le mouvement de la ligne C F, il aura décrit la circonférence F K en mesme temps que la ligne F G luy aura fait décrire une circonférence égale & parallele à G C, & partant que ces deux mouvemens sont proportionnez, comme les circonférences F K & G C, mais les directions de ces deux mouvemens sont l'une F L touchante de l'arc F K, & perpendiculaire à C F; l'autre est F N parallele à G M, qui touche le cercle de la Cissoïde en G (car puis que la circonférence que le point F décrit est parallele à celle que décrit le point G, & puisque les points G F sont dans la mesme ligne

droite, les touchantes sont paralleles) & partant si vous faites que comme l'arc F K est à l'arc G C, ou comme le demi-diamétre C F de l'arc F K, au diamétre entier C A de l'arc G C, ainsi F L soit à F N, vous aurez les raisons de ces



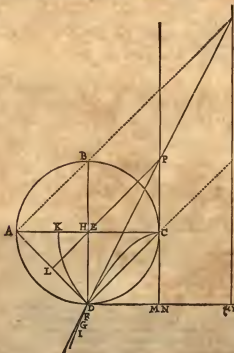
mouvemens dans leurs lignes de direction: cecy posé vous ne composez pas un mouvement des deux seuls F L, F N, car vous vous souvenez qu'outre ces deux mouvemens le point mobile F doit encore estre tousjours la commune section des lignes C F, F G H. Voicy cette construction d'une autre façon.

Estant donné le cercle de la Cissoïde A B C D, son centre E, la Cissoïde

CDF &c. comme nous avons expliqué, & qu'il faille en trouver la touchante en un point comme F. Par le point F tirez FGH ou GFH parallele au diamétre BD, coupant le demi-cercle ADC en G, & prolongez-la vers le costé du diamétre AC, comme en H; du sommet C de la Cissoïde tirez la ligne CFI en la premiére figure ou CIF en la seconde coupant le demi-cercle ADC en I; du centre C & de l'intervale CF décrivez l'arc de cercle FK vers le diamétre CA coupant ledit diamétre mesme prolongé vers A s'il en est besoin en K, tirez FL touchante de cette circonférence vers le diamétre AC, du point G tirez aussi GM touchante du cercle de la Cissoïde, & par le point F menez FN parallele à GM, & prolongez-la vers le costé de C à l'égard du point A, faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, c'est à-dire comme la ligne CF est à CA, ainsi FL dans la premiére touchante, & prise si vous voulez *ad libitum*, soit à FN; par L tirez LHP parallele à FC, & prolongez-la vers le costé de C à l'égard de F, puis par N tirez NOP parallele au diamétre BD, & prolongez-la jusqu'à ce qu'elle rencontre LHP, comme en P, de ce point tirez la ligne PF, ce sera la touchante de la Cissoïde.

Dans cette construction nous ne faisons point mention des points H & O, ni du parallelogramme HFOP, quoy-qu'il eust esté besoin d'en parler auparavant pour examiner tous les mouvemens du point F de la Cissoïde: l'on eust pû faire le mesme dans la quadratrice, où la seule intersection des lignes RIM & ABM, nous eust donné le point M, sans considérer le parallelogramme IFAM &c.

Voyez la figure de la Quadratrice.



L'on pourroit ajoûter des démonstrations Géométriques à ces constructions, pour prouver tous ces points de rencontre, mais cela seroit un peu long.

L'on peut encore considérer ces mouvemens de tous les biais que nous les avons considérez dans la quadratrice, & énoncer ce Théoreme, que si d'un point P de la touchante FP, l'on tire PL parallele à CF coupant FL en L, & PN parallele

parallele à BD coupant FN en N, & dire que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à FN, ce qui est facile.

Il suffira avant de passer outre, de dire quelque chose de la touchante de la Cissoïde au point D, dont voicy la figure sur laquelle je remarque:

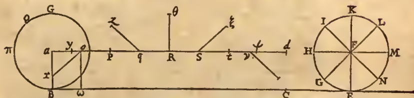
Premiérement, que faisant trois cas pour les touchantes de cette ligne, l'un pour le point D, le second pour les points d'entre C & D, & le troisiéme pour les points audessous de D (car la touchante au point C est le diamétre AC; & généralement en toutes les lignes courbes qui ont un axe, leurs touchantes au sommet sont perpendiculaires à cét axe;) l'on auroit pû mettre celuy-cy le premier, n'eust esté qu'il falloit expliquer plus généralement & sans confusion les mouvemens du point F: or en cette figure les points DFGI ne sont qu'un mesme, le point H peut estre le mesme que le point E ou que le point B, comme en la seconde construction de cette figure, que nous avons marquée par des lignes ponctuées & avec des lettres Greques, & les points MN, ou μ ν sont un mesme point.

Secondement, sans supposer dans FL ou GM des lignes égales aux arcs FK & GC, l'on fait par une construction Géométrique, que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à GM en cette façon.

Puisque l'angle ACD est à la circonférence de l'arc AD, & au centre de l'arc FK, il s'ensuit que l'arc AD ou DC est double en ressemblance à FK, & partant que comme le demi-diamétre EC est au demi-diamétre CD ou DA, ainsi l'arc DC est au double de l'arc DK, & par conséquent que comme EC est à la moitié de DC ou de DA, ainsi l'arc CD est à l'arc FK: prenant donc DM égale à EC, & FL égale à la moitié de FA ou de DA, l'on aura fait cette construction Géométrique. & la parallele à CF passera de L par le centre E; ou encore prenez d'un costé la toute DA, & de l'autre Gμ double de DM, la parallele à CF sera AB &c.

Onziéme exemple, de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval.

SOIT proposé le cercle duquel le centre est a, le demi-diamétre aB, & sa touchante BC au point B prolongée en C, l'on imagine que le cercle



aB faisant une révolution sur la ligne BC, soit que BC soit égale à la circonférence du cercle, soit qu'elle soit plus grande ou plus petite (ce que je suppose indifférent, & facile à démontrer) le point B de ce cercle estant porté par les deux mouvemens, l'un droit qui le porte de B vers C, l'autre circulaire à cause de la révolution du cercle; que ce point, dis-je, décrit la Roulette ou Trochoïde; ou si vous voulez, ayant tiré par le centre a la ligne ad égale & parallele à BC vers le mesme costé, l'on imagine que le cercle glissant de B vers C sans tourner à l'entour de son axe, en sorte que le centre a décrive la ligne ad par un mouvement uniforme, en mesme temps le point B décrive la circonférence de son cercle passant de B par π QGB d'un

mouvement uniforme, & que le centre *a* estant arrivé en *d*, ce point se retrouve en C, où la ligne B C touche le cercle, & qu'enfin ces deux mouvemens, l'un circulaire, par le moyen duquel le point B parcourt une fois la circonférence de son cercle, l'autre droit, par lequel il est emporté vers C, meslez comme nous avons dit, estant tous deux uniformes, font décrire la Roulette à ce point B.

D'où vous voyez que ces deux mouvemens estant uniformes, le point B peut décrire trois diverses sortes de Roulettes, suivant que son mouvement circulaire sera proportionné à son mouvement droit, ou si vous voulez suivant la raison de la circonférence de son cercle à la ligne *a d*, que le centre décrit, puisque cette circonférence peut estre ou égale à la ligne *a d*, ou plus grande ou plus petite.

Nous ne nous arrestons pas à considérer les lignes qui peuvent estre décrites, posé que l'un ou l'autre de ces mouvemens, ou mesme posé que ni l'un ni l'autre ne fust uniforme.

Cecy posé, pour décrire aisément cette ligne, soit prolongée la ligne B C, comme en E; du point E soit tiré E F égale & parallele à *a* B; du centre F décrivez le cercle E G H I K L M N, qui sera égal au premier, divisez sa circonférence en tant de parties égales que vous voudrez par les points G H I K L M N, & tirez par ces points les demi-diamétres du cercle. Divisez la ligne *a d* en autant de parties égales que vous avez divisé la circonférence G H I &c. aux points *o* P *q* R S *t u*, par le point *o* tirez *o x* égale & parallele au rayon F G, par P tirez P *y* égale & parallele à F H, puis *q z* égale & parallele à F I, & ainsi des autres, vous aurez les points B *x y* ζ θ ξ ψ C, par lesquels la Roulette doit estre décrite.

La raison de cette description est manifeste, car prenez dans la ligne *a d* un des points de sa division comme par exemple le premier *o*, & tirez *o ω* perpendiculaire sur B C, & par conséquent parallele aux rayons *a* B, F E, mais par la description *o x* est parallele à F G, & partant l'angle *x o ω* est égale à l'angle G F E, & décrivant du centre *o* & de l'intervale *o x*, l'arc *x ω*, cét arc est égal à l'arc G E: mais posé que le centre *a* ait décrit la ligne *a o*, & soit en *o*, le point B doit avoir décrit un arc égal à F G; car par l'hypothese E G est à sa circonférence totale, comme *a o* est à *a d*, & les mouvemens sont uniformes; donc le point B a décrit l'arc *ω x*, il est donc en *x*, & par conséquent le point *x* est un point de la Roulette; ce qu'il falloit démontrer. L'on démontrera la mesme chose de tous les autres points.

Il s'ensuit de cette démonstration, que décrivant le cercle G H I K L M N d'un autre centre pris dans la ligne *a d*, comme du centre *o*, P, R &c. & faisant le reste de la construction, l'on trouvera les mesmes points de la Roulette.

Ces connoissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvemens composez; car ayant pris un point de la Roulette, & ayant trouvé les deux directions de son mouvement droit & de son mouvement circulaire; si l'on entend dans ces lignes de direction deux lignes qui soient entre elles comme la ligne B C ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes estant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante.

Car soit proposé la Roulette A B C de laquelle la base est A D C, le sommet B & l'axe B D, & que l'on en demande la touchante au point E. Décrivez le cercle B F D de la Roulette, soit autour de l'axe B D, soit sur quelque diamétre perpendiculaire à la ligne A D C; du point E tirez la ligne E F parallele à A C, & coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E, si le point E estant pris entre A & B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, sinon au contraire &c.)

tirez F G touchante du cercle, puis faites que comme A C est à la circonférence du cercle, ainsi E F soit à F H, prenant le point H dans la touchante F G, du point H tirez H E, ce sera la touchante de la Roulette.

Mr de F. tire cette touchante en cette façon. Tirez la ligne E F, comme cy-dessus. Tirez encore une ligne F B, & par le point E tirez E H parallele à F B, la ligne E H sera la touchante.

Or il est facile de démontrer que cette méthode s'accorde avec la premiére, mais elle n'est pas si générale n'estant proposée qu'au cas que la Roulette, soit du premier genre, c'est-à-dire que sa base A C soit égale à la circonférence de son cercle, ce que vous remarquerez dans cette démonstration que nous chercherons analytiquement, comme il s'ensuit.

Il faut démontrer qu'ayant tiré comme cy-dessus la ligne E F & F G touchante du cercle au point F, & ayant pris F H dans F G égale à E F; si l'on tire deux lignes l'une H E, l'autre F B, elles seront paralleles.

Pour le prouver, tirez I K parallele à F H jusqu'à ce qu'elle rencontre au point K la ligne F B K prolongée vers B; prolongez encore la ligne E F I L jusqu'à l'autre costé du cercle en L, & tirez la ligne B L, & supposons que les lignes F B, E H sont paralleles, donc l'angle E H F est égal à l'angle F K I: mais par la construction l'angle H E F est égal à l'angle E H F, parce que nous avons pris F H égale à E F; il faut donc montrer que l'angle K F I est égal à l'angle F K I: mais l'angle F K I est égal à G F K par la construction, ayant tiré I K parallele à F G, il faut donc prouver que l'angle K F I est égal à l'angle G F K, mais G F K est égal à l'angle B L F, dans la section alterne; il faut donc prouver que K F I est égal à B L F; ce qui est certain.

En retournant, l'angle K F I est égal à B L F, mais B L F dans la section alterne est égal à l'angle G F K, donc K F I est égal à l'angle G F K: mais à cause des paralleles F G, I K, l'angle G F K est égal à F K I, donc K F I & F K I sont égaux, & le triangle F I K est isoscele; mais le triangle E F H est aussi isoscele par la construction le triangle E F H est donc semblable à F I K, & l'angle H E F est égal à l'angle K F I, d'où il s'ensuit que la ligne E H est parallele à F B K; ce qu'il falloit démontrer.

Dans la figure précédente ayant fait décrire le cercle de la Roulette autour de son axe, & tiré la touchante F H, ç'a esté toute la mesme chose, comme si ayant fait tirer le cercle de la Roulette en la position qu'il doit estre lors que le point A du cercle est arrivé en E, nous luy eussions tiré sa

touchante par le point E, car ces poſitions de cercles eſtant paralleles, & le point E eſtant auſſi élevé ſur la baſe A C, que le point F, les touchantes des cercles ſont paralleles, & partant l'une peut ſervir auſſi-bien que l'autre, pour en meſler un mouvement droit, puiſque l'une & l'autre rencontre la ligne EF, qui eſt la direction de ce mouvement droit. C'eſt pourquoy ſi l'on vouloit décrire le cercle de la Roulette en la poſition qu'il eſt lors que le point qui la décrit eſt arrivé en E, ayant premiérement décrit le cercle B F D autour de l'axe B D, & tiré la ligne E F I parallele à A D C, prenez E M dans E F I égale à F I, qui eſt compriſe entre la circonférence & le diamétre du cercle qui eſt perpendiculaire à la baſe A C, vous aurez le point M par où doit paſſer ce diamétre perpendiculaire. Et partant ſi vous tirez M N perpendiculaire à A C, & ſi vous la prolongez vers M en O en ſorte que N M O ſoit égale au diamétre du cercle de la Roulette, vous aurez le diamétre dudit cercle en la poſition requiſe ; ce qui eſt facile.

Je ne vous diray rien des propriétez de la Roulette, comme que la ligne droite E F eſt à l'arc F B, en meſme raiſon que la baſe A C à toute la circonférence du cercle &c. M. de Roberval ne m'a pas encore fait voir le Traité qu'il en a fait, où aprés en avoir démontré cette propriété & un grand nombre d'autres, il compare ces lignes les unes aux autres, les ſemblables, celles de divers genres, les égales, les inégales, leurs ordonnées, leurs eſpaces &c. ce qu'il a expliqué dans un ſi bel ordre, qu'il m'a dit que ſon Traité eſtoit auſſi limé comme s'il euſt eſté ſur le point de le faire imprimer.

Douziéme exemple, de la compagne de la Roulette.

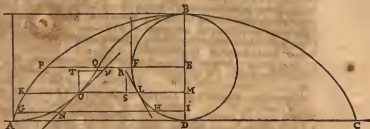
C'EST ainſi que l'a voulu nommer M. de Roberval qui l'a inventée, & qui en a imaginé l'hipotheſe & la deſcription en cette ſorte.

Soit propoſé la Roulette A B C de laquelle la baſe eſt A C l'axe B D, le centre du cercle dans l'axe eſt E, & le cercle de la Roulette B F D à l'entour de l'axe. Entendez que la Roulette eſt décrite par la ſeconde façon qui en a eſté donnée dans l'exemple précédent ; c'eſt à ſçavoir que pendant que le cercle de la Roulette gliſſe depuis A juſques en C, en ſorte que ſon centre E décrit d'un mouvement uniforme une ligne parallele & égale à A C, en meſme temps le point mobile A parcourt par un mouvement uniforme la circonférence de ce cercle, & décrit la Roulette par le mouvement compoſé de ces deux ; imaginez maintenant que pendant que ce point parcourt ainſi la circonférence D F B, un autre point A ou D mobile dans le diamétre du cercle, qui eſt toûjours perpendiculaire à A C, monte le long de ce diamétre de D vers B d'un mouvement inégal, en ſorte qu'il ſoit toûjours également élevé ſur la baſe A C, comme eſt le point qui décrit la Roulette, c'eſt-à-dire

qu'ayant

qu'ayant tiré du point de la Roulette comme G, la ligne G H I coupant la circonférence du cercle en H & l'axe en I, lors que le point mobile qui décrit la Roulette se rencontre en G dans la Roulette, c'est-à-dire en H, dans le cercle, le point qui décrit cette compagne se rencontre en I dans l'axe.

De mesme tirant par un autre point K la parallele à la base K L M, qui coupe la circonférence B L H D en L & le diamétre B D en M, lors que le point de la Roulette est en K, c'est-à-dire dans le cercle en tel endroit qu'en L, le point de la compagne de la Roulette est dans B D en tel endroit que M, & ainsi des autres.



D'où il s'ensuit, que pour décrire cette ligne, ayant tiré des points de la Roulette des lignes paralleles à A C, si dans chacune de ces lignes, à commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la mesme ligne comprise entre la demi-circonférence du cercle & son axe, l'on aura les points par lesquels cette ligne est décrite. Ainsi tirant comme nous avons dit, la ligne G H I, si dans la mesme ligne vous prenez G N égale à H I, vous aurez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoïde; de mesme prenant dans K L M la ligne K O égale à L M, vous aurez un autre point O de la mesme ligne. Et si par le centre E vous tirez E F perpendiculaire à B D, & si vous la prolongez en P jusqu'à la Roulette; ayant pris de P vers F la ligne P Q égale à E F, dans la mesme ligne P F vous aurez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-cy, & auquel elle change de courbure, comme vous remarquerez mieux cy-aprés. Or ç'a esté la mesme chose de décrire le cercle autour de l'axe de la Roulette, que de luy donner toutes les diverses positions qu'il a en glissant sur la ligne A C, ce qui a déja esté remarqué dans la Roulette.

Cecy posé vous voyez que le point qui décrit cette ligne-cy est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre inégal, & desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se prenant dans les lignes A D, B D ou dans leurs paralleles.

Et parce que le point qui décrit cette ligne-cy monte de la mesme façon que celuy qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, & composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvemens droits, l'un parallele à A D & l'autre à B D, l'on aura dans la ligne parallele à B D la quantité du mouvement qui fait monter ce point; & sçachant la raison de la base A C à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme & égal à A C, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme & égal à ladite circonférence, si l'on fait que comme la circonférence du cercle est à A C, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du

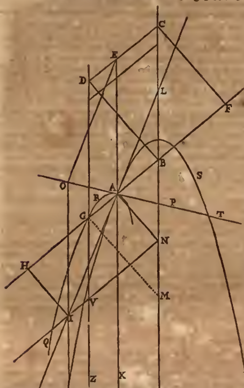
mouvement parallele à A C du point de cette ligne-cy qui est réciproque à celuy du cercle auquel l'on a tiré la touchante.

Par éxemple, soit en la derniére figure cy-dessus la Roulette A B C du premier genre, c'est-à-dire que sa base A C soit égale à la circonférence de son cercle & le reste, comme il a esté dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L réciproque du point O, la touchante du cercle L R, & je compose le mouvement L R de deux R S, S L, dont l'un R S est parallele à B D; puis comparant les mouvemens du point O à ceux du point L, puisque par la supposition le point O monte autant que le point L, je tire O T parallele & égale à R S, ce sera la direction & la quantité de ce premier mouvement du point O; puis aprés parce que le point O a dans une ligne parallele à A C un mouvement égal à celuy du point L le long de la circonférence de son cercle, c'est-à-dire un mouvement égal à celuy du point L le long de la touchante L R, ayant tiré T V parallele à A C, & égale à L R, j'auray les directions & la raison des deux mouvemens du point O, & partant la ligne O V sera la touchante de cette ligne au point O; ce qu'il falloit faire.

Treiziéme éxemple, de la Parabole de M. des Cartes.

MONSIEUR des Cartes nous apprend le moyen de décrire en deux façons cette ligne courbe, qui est une espece de Parabole : la premiére par sa régle composée qui est en la 318. page de sa Méthode, & la deuxiéme en la page 405. de la mesme méthode, ou bien 337. qui est en faisant mouvoir une Parabole ordinaire avec son plan le long de son diamétre M C, & prenant un point fixe comme G hors le mesme diamétre, mais dans un autre plan fixe sur lequel le plan de la Parabole se meuve en coulant, ces deux plans convenans toûjours l'un à l'autre pendant le mouvement de celuy de la Parabole : puis dans le diamétre B C soit marqué un point B, qui ne se puisse mouvoir qu'au mouvement de la Parabole, demeurant toûjours à pareille distance du sommet; & soit entendu une ligne droite G B indéfinie, qui tourne à l'entour du point fixe G comme centre, & qui passe toûjours par B pendant que la Parabole se meut, cette ligne G B coupant la Parabole mobile continuellement en de nouveaux points, la ligne courbe qui passera par tous ces points sera la Parabole de M. des Cartes, laquelle à proprement parler est une Conchoïde de Parabole, & peut-estre double, car la ligne G B peut couper la Parabole proposée en deux points.

Pour avoir la tangente de ladite ligne courbe, par éxemple en A, tirons premiérement deux lignes paralleles au diamétre de la Parabole T S V, que nous faisons mouvoir sur la ligne droite M C, desquelles paralleles l'une D G Z passe au point G, qui est comme le Pole, & l'autre parallele E A X passe au point A auquel nous voulons la touchante; en suite éxaminons premiérement le mouvement du mobile au point B, ledit mobile estant porté sur la ligne G B F, laquelle se meut circulairement sur le point fixe G en tirant vers les points D C, duquel mobile au point B nous avons la direction, à sçavoir B C, parce que par la description de la ligne courbe Q R A, ledit mobile se maintient toûjours dans la ligne M C : nous avons aussi les deux autres directions desquelles est composée B C, l'une la circulaire D B, la ligne D B estant perpendiculaire sur G B, & l'autre direction la ligne droite B F, nous aurons donc ces directions, & les raisons des vîtesses dudit mobile au point B: or les points qui sont dans la Parabole mobile montant tous également, si nous menons du point C une parallele à B G, sçavoir C D, les lignes D G, E A & B C seront égales, & par conséquent E A & D G seront



les mesmes directions que B C; ensuite examinons le mouvement du point A, auquel nous voulons avoit la touchante; & considérons le point B comme estant fixe & arresté, autour duquel se meuve circulairement la mesme ligne BG vers V M T, car c'est le mesme mouvement circulaire que le précédent; donc l'une de ces directions, à sçavoir la circulaire, sera AN; & les angles D G B & G B M estant égaux, en mesme temps que le point B ira en D, aussi le point G ira en M, & A en N, les lignes G M & A N estant paralleles à B D, donc la direction circulaire du point A sera A N: mais le mesme point A se maintenant tousjours dans la Parabole T S V, sa direction sera la touchante de la mesme Parabole T S V. Soit donc menée cette touchante, à sçavoir I L, & achevé le parallelogramme A H I N, nous avons donc A I pour direction de ce point A se mouvant circulairement, & se maintenant aussi dans la Parabole S T V, nous avons aussi la direction du mesme point A se maintenant dans M G, à sçavoir A E égale à B C, & par conséquent le parallelogramme E O I A estant achevé, la ligne droite O A diagonale du parallelogramme sera la direction du point A, & par conséquent la touchante de la ligne courbe Q G R A audit point A; ce qu'il falloit faire.

PROJET
D'UN LIVRE DE MECHANIQUE
traitant des Mouvemens composez.

PAR un mouvement composé j'entens celuy qui se fait de deux ou plusieurs mouvemens differens entre eux, soit par leurs directions ou leurs vitesses, ou par toutes les deux, lors que tous ces mouvemens sont communiquez à un mesme mobile, ou en mesme temps, ou successivement, soit que la communication s'en fasse en un instant, ou avec du temps.

On peut considérer le mouvement composé en trois états differens; sçavoir, ou dans ses causes, ou en soy-mesme pendant sa durée, ou dans ses effets.

Les causes d'un mouvement en tant que composé sont les mouvemens particuliers qui le composent, qui sont ou simples, ou composez eux-mesmes.

Icy on discourra des causes des mouvemens simples qui sont les principes actifs de la nature dans ses corps differens, soit qu'ils agissent par des causes ordinaires & réglées comme par la pesanteur, ou légereté, & par de pareilles qui nous paroissent uniformes ou à peu prés, soit que ces causes, quoy-qu'ordinaires, ne soient pas réglées, comme l'action du feu, celle des ressorts, celle des animaux &c. Ce qu'on amplifiera par les éxemples des feux artificiels, par la poudre à canon, ou autrement par les arcs, les arquebuses à vent, & les autres actions de l'ait. On y ajoûtera les mouvemens particuliers du soleil & des étoiles: on y fera entrer l'artifice des hommes, qui par leurs propres forces, & par celles tant des animaux que des autres corps naturels, peuvent faire des mouvemens composez, d'autant plus diversifiez qu'ils ont de connoissance & d'industrie.

La nature en général possede les principes des mouvemens simples, dont il s'en compose une infinité d'autres dans les animaux, vegetaux, mineraux &c.

Quoy-qu'on connoisse les mouvemens simples qui en font un composé, il n'est pas toûjours facile de connoistre ce composé, ni les lignes qu'il décrit par sa composition, particuliérement quand elles sont courbes, comme il arrive d'ordinaire. Delà vient cette science spéculative qui tient beaucoup de la Géometrie, & qui traite des lignes & des figures décrites par les mouvemens composez; de leurs tangentes & de leurs autres propriétez.

Le mouvement composé considéré en soy n'est point different d'un mouvement simple; & on le peut considérer comme simple, quand il est connu, de mesme que s'il estoit produit dans la nature par sa simplicité; mesme on peut considérer non-seulement un mouvement composé; mais aussi un mouvement simple droit ou courbe, comme estant composé de plusieurs autres tant simples que composez; ce qui sert souvent pour la découverte de plusieurs belles véritez touchant la nature & les propriétez des lignes & des figures, qu'on ne découvriroit pas si facilement sans cette considération, quoy-que souvent elle ne soit qu'une fiction, mais pourtant une fiction d'une chose possible.

Il est remarquable que quand un mouvement composé se présenteroit à nous, si nous ne sçavons point qui sont ceux qui l'ont composé, quand mesme

nous

nous sçaurions qu'il n'est pas simple, nous ne sçaurions pourtant découvrir avec certitude qui sont les composans. La principale raison de ce defaut vient de ce que tout mouvement peut estre composé de plusieurs sortes, & mesme d'une infinité de sortes, entre lesquelles il seroit difficile, pour ne pas dire impossible, de rencontrer la véritable.

Touchant les effets du mouvement composé, ils ne sont remarquables qu'au mesme temps qu'il se compose; car aprés qu'il est composé, ses effets ne sont plus différens de ceux d'un mouvement simple.

En général ces effets sont de changer de vitesse, ou de direction, ou de toutes les deux, sans compter que de deux ou de plusieurs mouvemens actuels il se peut composer un repos.

Mais en particulier, ou ils font des lignes différentes, ou des figures différentes, ou ils changent des temps égaux en des inégaux, ou au contraire, & partant quelquefois ils réglent, quelquefois ils déréglent; ils établissent, ils détruisent, & ainsi d'une infinité d'actions causées dans toute la nature par une telle composition.

Mais il ne sera pas hors de propos d'apporter icy pour exemple quelques-uns de ces effets particuliers, pour porter les esprits à la considération d'une infinité d'autres.

Les carosses courant viste, & voulant tourner trop court, versent. Il en est de mesme de ceux qui sautent hors d'un carosse qui court.

De l'effet des lances, qui rompent, qui faussent, ou qui glissent sur les cuirasses.

Des balles de mousquet, de pistolet &c. sur des corps mobiles, tant sur ceux qui les repoussent que sur ceux qui les laissent entrer plus ou moins, ou qui écrasent la bale; du coup oblique qui est une espéce de mouvement composé, mesme sur un corps immobile. On tirera les sillons des balles & des boulets sur la terre & sur l'eau, & on examinera si la réfraction ne feroit pas un pareil effet.

Les montres & les horloges se déreglent dans le transport, & les pendules y sont des plus sujettes.

Les pierres & quelques boulets de fer rougis au feu s'en vont en piéces au sortir des canons.

Le choc de l'air, de l'eau & des corps terrestres font des compositions de mouvemens surprenans & souvent dangereux tant sur la terre que sur la mer.



DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

ÆQUATIONEM recognoscere, est statum illius examinare, eo fine ut innotescat ejus constitutio hinc ab origine ejusdem, usque ad ultimam ordinationem: atque ut nota fiat laterum datorum, ad ea quæ quæruntur habitudo; item ut dignosci possit, an de unico latere ignoto explicabilis sit ipsa æquatio, an vero de pluribus, & quot; atque utrum aliqua ex ipsis sint æqualia, an vero omnia inæqualia. Rursus sintne latera quæsita positiva, seu realia, seu etiam possibilia: an contra, ficta, seu nulla, seu etiam impossibilia. Quæ omnia ut melius intelligi possint, præmittenda sunt quædam, tum circa vocabulorum ac notarum, seu signorum explicationem, tum etiam circa ordinem, quem in ordinando hoc opere sequi decrevimus.

Ac primum, quod ad vocabula, notas, seu signa spectat, sive de lateribus sit quæstio, sive de potentiis eorumdem laterum, quædam agnoscimus quæ suâ naturâ aliquid indicant supra nihilum; quædam verò quæ suâ naturâ aliquid indicant infra, dicantur omnia tum hæc, tum illa positiva; priora quidem positiva supra, posteriora autem positiva infra.

Rursùs tam positiva supra, quam positiva infra, vel affirmativa sunt, vel negativa; sed affirmativa supra æquivalent negativis infra, & è contrario. Et quidem, signum affirmationis tam supra quàm infra, est hoc vulgò receptum $+$. Signum negationis tam supra quàm infra, est hoc aliud vulgò quoque receptum $-$. Signum differentiæ inter duas magnitudines, est ejusmodi $=$. Quo ambiguum relinquitur quænam ex duabus magnitudinibus propositis, inter quas tale signum intercedit, major est aut minor. Signum æqualitatis tale est ∞; quo significatur magnitudines inter quas illud intercedit, esse æquales; sive una magnitudo uni magnitudini æquetur; sive una pluribus; sive plures uni; sive denique plures pluribus.

Operæprerium fuisset si quæ suâ naturâ habentur infra magnitudines, certo aliquo signo ab aliis distincto notatæ essent: verùm quia passim, immò ferè semper accidit ut in eadem quæstione, sub iisdem terminis, magnitudines quæsitæ sint supra, vel infra, ex natura ipsius quæstionis, ac vi æquationis ad ipsam pertinentis; ideò talis distinctio commodè fieri non potuit fiet tamen ut notâ ejusmodi æquationis constitutione, innotescat etiam natura ipsorum laterum, & quicquid ad numerum eorumdem determinandum requiritur, ut magis patebit in sequentibus.

Præterea omnis multiplicator nihilo æquivalens multiplicans quodvis multiplicatum (seu illud multiplicatum nihilo æquivaleat, seu aliquid supra, aut infra indicet) producit aliquid nihilo æquivalens. Idem accidit, sive multiplicator nihilo æquivaleat, sive aliquid indicet supra aut infra, dummodo multiplicatum æquivaleat nihilo.

Idem prorsus intelligendum de divisione, quod de multiplicatione; divisor enim hic gerit vices multiplicatoris, quotiens multiplicati, & divisum producti; quandoquidem multiplicatio restituit divisionem, & divisio multiplicationem. Hæc de notis seu signis, nunc de ordine dicamus.

Multis quidem modis ordinari potest æquatio, præcipuè si multipliciter

affecta sit; & revera à diversis authoribus diversimodè constitutus est ordo ipse, nobis accommodatissimus ille videtur qui omnia quibus æquatio constat homogenea ex una parte constituit; sic ut omnia simul nihilo æquivaleant, quod quidem nullo negotio semper efficitur; illud autem vel unico exemplo planum fiet. Proponatur methodo Vietæ hæc æquatio $A^3 - BA^2 + C^2A \propto Z^{f.}$ manifestum est per anthitesim oriri hanc æquationem $Z^{f} - C^2A + BA^2 - A^3 \propto O$, vel hanc $A^3 - BA^2 + C^2A - Z^{sol.} \propto O$. Etsi vero utraque formula nostro instituto accommodari possit, priorem tamen eligimus, eam scilicet in qua magnitudo omninò data $Z^{sol.}$ afficitur semper affirmatè, ac secundum eam intelligi debent quæcumque postea dicturi sumus.

De constitutione æquationum quadraticarum.

CAPUT UNICUM.

Propositio prima.

SI $Zp - RA + A^2 \propto O$.

Sunt duo latera, ambo supra, quorum summa est R; rectangulum vero sub ipsis est Zp & sit A alterutrum ex istis.

Intelligatur enim $A - B \propto O$ sic ut $+A$ æquetur ipsi $+B$ vel $A - C \propto O$ sic ut $+A$ æquetur isti $+C$; unde si ducatur $A - B$ in $A - C$ quod inde orietur æquabitur nihilo. Productum autem illud est $BC \begin{smallmatrix}-BA\\-CA\end{smallmatrix} + A^2$, proinde hoc æquatur nihilo, quod semper accidet. Sive enim A æquetur ipsi B ita ut $A - B \propto O$, quicquid valeat $A - C$, si $A - B$ ducatur in $A - C$, hoc est si nihilum per quodvis multiplicetur, producitur nihilum; sive A æquetur ipsi C, ita ut $A - C \propto O$, quicquid valeat $A - B$, si $A - C$ ducatur in $A - B$, hoc est si nihilum per quodvis multiplicetur, producitur nihilum.

Jam BC vocetur ex hipothesi Zp; & $B + C$ vocetur R; fietque id quod proponitur nempe $Zp - RA + A^2 \propto O$ qua in æquatione A potest explicari tam de ipso B quam de ipso C à quibus producitur BC sive Zp.

Pro determinatione.

DETERMINATIO alicujus æquationis est constitutio illa in qua vel omnia, vel quædam ex lateribus de quibus explicabilis est æquatio inter se æqualia sunt; unde cum de duobus tantum lateribus explicari potest æquatio, quales sunt quadraticæ, unica tantum potest esse determinatio, cum scilicet duo latera sunt æqualia. Cum autem de tribus lateribus æquatio explicabilis est, quales sunt cubicæ; tunc duplex esse potest determinatio, altera quidem major, cum omnia tria latera æqualia sunt, altera vero minor, cum duo tantum æqualia sunt. Atque ita quo plura erunt latera in aliqua æquatione, id est quo potentia illius altior erit, eo plures erunt illius determinationes.

Jam in proposita æquatione unica esse potest determinatio in qua duo latera de quibus A est explicabile erunt æqualia; cum scilicet Zp æquatur $\div R^2$: tunc enim unumquodque ex ipsis lateribus A æquale est $\div$ ipsius R.

Nam in prædicta formula $BC \begin{smallmatrix}-BA\\-CA\end{smallmatrix} + A^2 \propto O$ in casu determinationis B intelligitur æquari ipsi C; unde illa æquatio æquivalet huic $B^2 - 2BA +$

$A^2 \infty O$, sive etiam huic per interpretationem $Zp - RA + A^2 \infty O$ ut proponitur, ubi quoniam $R \infty 2B$ manifestum est Zp esse quadratum ipsius B, sive dimidii ipsius R, sive etiam Zp esse quartam partem quadrati ipsius R, & A quod æquatur ipsi B vel C, esse dimidium ipsius R.

Propositio secunda.

SI $Zp + RA - A^2 \infty O$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum, idemque majus est supra, alterum minus est infra, differentia amborum est R, & rectangulum sub ipsis Zp & fit A, alterutrum ex ipsis, (intelligatur enim $B - A \infty O$ sic ut A dum erit supra, æquetur ipsi B; vel $C + A \infty O$ sic ut A dum erit infra, æquetur ipsi C. Atque ex hypothesi sit B majus quàm C.) Si igitur $B - A$ ducatur in $C + A$, quod inde orietur æquabitur nihilo.

Productum autem id est $BC\begin{array}{l}+BA\\-CA\end{array} - A^2$ æquatur nihilo. Quo pacto æquatio explicabilis est de A supra, æquali ipsi B. Ubi tamen æquatio hanc interpretationem accipere debet ut $BC \infty Zp$ & $B - C \infty R$. Quod si quis singulas æquationis partes conferre velit, ut noscat qua ratione ipsæ se invicem tollant, is reperiet $+BC$ & $-CA$ sese tollere, item $+BA$ & $-A^2$ se tollere quoque. Unde fit ut omnia homogenea simul nihilo æquivaleant.

Jam si C intelligatur æquari ipsi A, atque $+C + A$ multiplicetur per $+B - A$, productum erit rursus $BC\begin{array}{l}+BA\\-CA\end{array} - A^2$, quæ æquatio est eadem quæ supra, unde illa explicabilis quoque est de A dum ipsum æquatur ipsi C, ita tamen ut ipsum sit infra ut indicat $C + A \infty O$, vide notas post æquationes cubicas. Hic autem $+BC + BA$ se invicem tollunt sicuti $-CA - A^2$; ut rursus omnia nihilo æquentur; atque æquatio eandem quam supra accipere debet interpretationem.

Propositio tertia.

SI $Zp - RA - A^2 \infty O$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum idemque minus est supra, alterum majus est infra, differentia amborum R, & rectangulum sub lateribus ipsis Zp: A autem explicabile est de alterutro ex iisdem.

Intelligatur enim ut supra $B - A \infty O$ item $C + A \infty O$ & B minus sit quam C; fiet ergo productum $BC\begin{array}{l}+BA\\-CA\end{array} - A^2 \infty O$ quod quidem si hanc interpretationem accipiat ut $BC \infty Zp$, & $C - B$ fit R, habebimus æquationem propositam: cætera se habent ut supra.

Nec ulla est in duabus prædictis propositionibus determinatio, quia in utraque duo latera, de quibus A explicabile est, sunt semper inæqualia.

Item nulla alia est inter duas hasce æquationes differentia, nisi quod in priori latus quod est supra majus est eo quod est infra, in posteriori autem illud quod est supra, minus est eo quod est infra.

Propositio quarta.

SI $Zp - A^2 \infty O$.

Sunt duo latera æqualia, quorum alterum est supra, alterum infra, rectangulum sub ipsis est Zp & fit A alterutrum ex iisdem.

Intelligatur

Intelligatur enim $B - A \infty O$ ſic ut $+A \infty +B$ ſupra. Item $C + A \infty O$, ſic ut A ex ſe æquetur ipſi C infra; ponaturque B æquari eidem C: itaque ſi fiat multiplicatio ut in antecedentibus, productum erit $BC \begin{smallmatrix} +BA \\ -CA \end{smallmatrix} - A^2 \infty O$. Quod ſi hanc interpretationem accipiat ut $BC \infty Z^p$, quia tollunt ſe invicem $\begin{smallmatrix} +B \\ -C \end{smallmatrix}$ habebimus æquationem propoſitam $Z^p - A^2 \infty O$, quæ explicabilis eſt tam de A ſupra æquali ipſi B, quam de A infra æquali ipſi C.

Propoſitio quinta.

SI $Z^p + A^2 \infty O$.

Nullum propriè loquendo eſt latus, ſed unicum planum æquale ipſi Z^p de quo quidem eſt explicabile ipſum A^2.

Ejuſmodi autem æquatio irregularis eſt, nec poteſt ipſa oriri ex multiplicatione, ut factum eſt in antecedentibus.

Nota ergo æquationes quaſdam de planis tantum explicabiles eſſe, quod etiam ad ſolida & ultra in infinitum extendi, quivis ſatis doctus reperiet.

De conſtitutione æquationum cubicarum.

CAPUT PRIMUM.

SI $Z^s - S^pA + RA^2 - A^3 \infty O$.

Sunt tria latera poſitiva ſupra, quorum ſumma eſt R, ſumma trium rectangulorum ex ipſis binis ac binis ſumptis eſt S^p, ſolidum autem ſub iiſdem contentum eſt Z^s, & ſit A quodvis ex ipſis tribus. *Vide poſtea propoſitionem ſpecialem.*

Intelligamus enim $\begin{matrix} B - A \infty O \\ C - A \infty O \\ D - A \infty O. \end{matrix}$ & per quodvis ex iſtis tribus binomiis, per illud ſcilicet quod nihilo æquari intelligitur, multiplicetur productum ex aliis duobus, quicquid illa duo valeant, & quicquid valeat eorumdem productum, fiet productum ex omnibus tribus æquale nihilo illud autem eſt.

$$BCD \begin{matrix} -BCA + BA^2 \\ -BDA + CA^2 \\ -CDA + DA^2 \end{matrix} - A^3 \infty O$$

Omnia autem hanc interpretationem accipiunt ut $BCD \infty Z^s$

Item $\begin{matrix} -BC \\ -BD \\ -CD \end{matrix} \infty S^p$ & $\begin{matrix} +B \\ +C \\ +D \end{matrix} \infty R$

Quo pacto habebimus æquationem propoſitam $Z^s - S^pA + RA^2 - A^3 \infty O$.

Quia vero in multiplicatione binomiorum, ipſum A triplicem valorem induere potuit, puta vel ipſius B, vel C, vel D, ſic ut in eandem formulam ſemper incidamus, nec ullo modo mutetur æquatio, patet ipſam de eodem triplici A explicabilem eſſe, ſub ipſo triplici valore.

Determinatio præcedentis æquationis.

HUjus æquationis determinatio duplex est, altera major, in qua omnia tria latera sunt æqualia; altera minor, in qua duo tantum æqualia sunt.

Major determinatio ejusmodi sortitur constitutionem ut Z^{s} æquale sit cubo tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum $Z^{s} \propto \frac{1}{27} R^{3}$, & Sp æquale sit triplo quadrati ejusdem tertiæ partis longitudinis R, sive ut ipsum $Sp \propto \frac{1}{3} R^{2}$, patet hoc ex eo quod ex constitutione præcedenti, si B, C, D, intelligantur tria latera æqualia, erit solidum B C D, sive Z^{s} æquale ipsi B^{3}.

Item plana $\begin{matrix} BC \\ BD \\ CD \end{matrix}$ simul, sive $Sp \propto 3 B^{2}$; & tandem latera $\begin{matrix} B \\ C \\ D \end{matrix}$ simul, sive R æqualia 3 B.

Minor determinatio longiori eget apparatu, pro quo ponamus duo latera æqualia esse ea quæ in constitutione præcedenti referebantur per B & C, quo pacto sic æquatio explicari poterit, ut $B^{2} D \propto Z^{s}$;

Item $B^{2} + 2BD \propto Sp$ & $2B + D \propto R$.

$$\text{Atque ita } B^{2}D - B^{2}A + 2BA^{2} - A^{3} \propto O \\ - 2BDA + DA^{2}.$$

Jam quia B est A & $2B + D$ est R, ideo $R - 2A$ est D. Hanc ergo speciem induat D in posterum, ut sit $R - 2A$.

Item B^{2} est A^{2}, quod ductum in D id est in $R - 2A$, producit $RA^{2} - 2A^{3}$ quæ species proinde æqualis est Z^{s}, & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{2} Z^{s} - \tfrac{1}{2} RA^{2} + A^{3} \propto O.$$

Rursus B^{2} est A^{2}: & $2BD$ est $2RA - 4A^{2}$ quæ ambas species simul constituunt, $2RA - 3A^{2}$ ambæ autem constituunt Sp. Itaque $2RA - 3A^{2} \propto Sp$, & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{3} Sp - \tfrac{2}{3} RA + A^{2} \propto O.$$

Hic nisi ambigua esset hæc æquatio plana, ac de duobus lateribus supra, explicabilis, jam haberetur valor ipsius A; sed quia duplex est valor ille, nempe, vel latus $(\tfrac{1}{9} R^{2} - \tfrac{1}{3} Sp) + \tfrac{1}{3} R$, vel $\tfrac{1}{3} R$ — latere $(\tfrac{1}{9} R^{2} - \tfrac{1}{3} Sp)$ estque ex illis, alter quidem utilis, alter inutilis, atque etiam si utilem agnoscere non sit difficile, tamen quia ex comparatione quarumdem aliarum æquationum ad simplicem lateralem, ac de unico eoque vero latere explicabilem devenire possumus, ideo sic progrediemur.

Sed supra etiam $\tfrac{1}{2} Z^{s} - \tfrac{1}{2} RA^{2} + A^{3} \propto O$.

Ascendat per A depressior harum æquationum nempe hæc:

$$\tfrac{1}{3} Sp - \tfrac{2}{3} RA + A^{2} \propto O.$$

Atque ita fiet hæc $\tfrac{1}{3} SpA - \tfrac{2}{3} RA^{2} + A^{3} \propto O$.

Huic ergo æqualis est $\tfrac{1}{2} Z^{s} - \tfrac{1}{2} RA^{2} + A^{3} \propto O$.

Sublatoque communi A^{3} & addito $\tfrac{2}{3} RA^{2}$ puta per anthitesim fiet hæc æquatio.

$$\tfrac{1}{2} Z^{s} \propto \tfrac{1}{3} SpA - \tfrac{1}{6} RA^{2}.$$

Et communi divisore $\tfrac{1}{6}$ R adhibito $\frac{3 Z^{s}}{R} \propto \frac{2 SpA}{R} - A^{2}$.

Atque omnibus ordinatis $\frac{3\,Z^{s}}{R} - \frac{2\,S^{p}A}{R} + A^{2} \infty O$.

Sed rursus ut supra $\frac{1}{3}S^{p} - \frac{2}{3}R\,A + A^{2} \infty O$.

Ergo hæ duæ æquationes invicem æquales sunt, unde sublato communi A^{2} & per antithesim fiet hæc æquatio $\frac{3\,Z^{s}}{R} = \frac{1}{3}S^{p} = \frac{2\,S^{p}A}{R} = \frac{2}{3}R\,A$.

Itaque $\frac{3\,Z^{s}}{R} = \frac{1}{3}S^{p}$

$\overline{\frac{2\,S^{p}}{R} = \frac{2}{3}R}$ est valor ipsius A

Si ergo accidat aliquam ex præmissis differentiis vel utramque esse æqualem nihilo, vel alteram esse nihilo minorem, alteram verò nihilo majorem, nulla erit ejusmodi determinatio; sed æquatio explicari poterit de tribus lateribus supra, at de uno tantum. Aliquo tamen casu fieri poterit, ut sub proposita initio æquationis formula unicum inveniatur latus supra, & unicum infra, quod proprie latus non est, sed planum, tunc autem propositio specialis est cujus explicandæ hic est locus.

Propositio secunda specialis.

SI $Z^{s} - S^{p}A + R\,A^{2} - A^{3} \infty O$.

Sit autem $\frac{Z^{s}}{R} \infty S^{p}$.

Sunt duo latera, alterum suprà æquale ipsi R, alterum infrà non proprie latus, sed planum æquale ipsi S^{p}, & A explicari potest de quolibet ipsorum. Fingatur enim $B^{p} + A^{2} \infty O$ quæ æquatio explicabilis est de unico plano infra æquali ipsi B^{p} ut notatum est prop. 5ª Æquat. quadraticarum. Item $C - A \infty O$ tum fiat multiplicatio ut consuevimus.

Orietur ergo $B^{p}C - B^{p}A + C\,A^{2} - A^{3} \infty O$.

Hæc æquatio eam accipiat interpretationem ut $B^{p}C \infty Z^{s}$ & $B^{p} \infty S^{p}$, atque $C \infty R$.

Quo pacto incidemus in æquationem propositam, ubi manifestum est ex generatione $\frac{Z^{s}}{R} \infty S^{p}$, & A esse æquale vel ipsi C, hoc est R supra, vel A^{2} est æquale ipsi B^{p}, hoc est S^{p} infra.

CAPUT SECUNDUM.

Propositio prima.

SI $Z^{s} - S^{p}A + R\,A^{2} + A^{3} \infty O$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt supra, & tertium infra, idemque majus duobus reliquis simul sumptis, differentia seu excessus tertii, supra summam duorum priorum est R: at S^{p} est differentia seu excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, supra id, quod sub primo & secundo, solidum autem Z^{s} quod fit sub tribus, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Intelligantur enim $B - A$
$C - A$
$D + A$

Quorum D ſit majus ambobus B & C ſimul ſumptis; ſit autem quævis ex illis tribus ſpeciebus nihilo æqualis, & fiat multiplicatio ſolito modo orieturque,

$$\begin{array}{l} \quad\;\; -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ \quad\;\; + BCA - CA^2 \end{array}$$

& quia D majus ponitur quam B & C ſimul, manifeſtum eſt B C multo minus eſſe quam B D & C D ſimul ſumpta. Itaque omnia hanc interpretationem recipiant ut $+D - B - C$ ſit $+R$, item $-BD - CD + BC$ ſit $-Sp$ & BCD ſit Z^{s} quo pacto incidemus in æquationem propoſitam

$$Z^{s} - SpA + RA^2 + A^3 \propto O.$$

Patet autem ex formula, A explicabile eſſe tam de B aut C ſupra quàm de D infra, quia in multiplicatione binomiorum ipſum triplicem hunc valorem induere potuit.

Determinatio præcedentis æquationis.

DETERMINATIO unica eſt, nempe minor, cum ſcilicet duo latera ſupra ſunt æqualia; aliter enim æqualia eſſe non poſſunt: ſiquidem illud quod eſt infra, duobus reliquis ſimul majus eſt.

Poſito ergo quod B & C ſunt æqualia, explicari poterit formula æquationis hoc modo.

$$\begin{array}{l} B^2D - 2BDA + DA^2 \\ \quad + B^2A - 2BA^2 + A^3 \propto O. \end{array}$$

Quoniam autem B eſt A & $D - 2B$ eſt R, ergo $D - 2A$ eſt R & per antitheſim $R + 2A$ eſt D, hanc ergo ſpeciem induat D in poſterum ut ſit $R + 2A$.

Item B^2 eſt A^2, quod ductum in D, id eſt in $R + 2A$ producit $RA^2 + 2A^3$, quæ ſpecies proinde æqualis eſt Z^{s} & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{2}Z^{s} - \tfrac{1}{2}RA^2 - A^3 \propto O.$$

Rurſus B^2 eſt A^2, & $2BD$ eſt $2RA + 4A^2$. Quarum ambarum ſpecierum differentia eſt $2RA + 3A^2$, hæc idcirco æqualis eſt Sp & omnibus ordinatis.

$$\tfrac{1}{3}Sp - \tfrac{2}{3}RA - A^2 \propto O.$$

Aſcendat hæc æquatio per A gradum, atque ita rurſus

$$\tfrac{1}{3}SpA - \tfrac{2}{3}RA^2 - A^3 \propto O.$$

Ergo huic æquationi æquatur hæc

$$\tfrac{1}{2}Z^{s} - \tfrac{1}{2}RA^2 - A^3 \propto O.$$

Additiſque communibus A^3, & $\tfrac{1}{2}RA^2$ fiet hæc

$$\tfrac{1}{3}SpA - \tfrac{1}{6}RA^2 \propto \tfrac{1}{2}Z^{s}$$

Et communi diviſore adhibito $\tfrac{1}{6}R$, erit $\frac{2SpA}{R} - A^2 \propto \frac{3Z^{s}}{R}$

Et omnibus ordinatis $\frac{3Z^{s}}{R} - \frac{2SpA}{R} + A^2 \propto O.$

Mutatiſque

Mutatisque omnibus signis $-\frac{3\,Z^{s}}{R} + \frac{2\,S^{p}A}{R} - A^{3} \propto O$.

Sed rursus supra $\frac{1}{3}S^{p} - \frac{2}{3}RA - A^{2} \propto O$.

Itaque addito communi A^{2} & per antithesim fiet hæc æquatio

$$\frac{3\,Z^{s}}{R} + \frac{1}{3}S^{p} \propto \frac{2\,S^{p}A}{R} + \frac{2}{3}RA.$$

Itaque

$$\frac{\frac{3\,Z^{s}}{R} + \frac{1}{3}S^{p}}{\frac{2\,S^{p}}{R} + \frac{2}{3}R}$$

est valor ipsius A.

Propositio secunda.

SI $Z^{s} - S^{p}A + A^{3} \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque æquale duobus prioribus simul sumptis.

S^{p} est excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, supra id quod sub primo & secundo.

Z^{s} autem est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus: ponantur enim eædem species quæ supra, nisi quod D intelligi debet æquale duobus B & C simul, fietque rursus eadem æquatio.

$$\begin{array}{l} \quad -BDA + DA^{2} \\ BCD - CDA - BA^{2} + A^{3} \propto O \\ \quad + BCA - CA^{2} \end{array}$$

Quoniam autem D, ponitur æquale duobus B & C simul, ideo evanescet affectio sub A^{2} quia $-BA^{2} - CA^{2}$ tollunt DA^{2}, superest ergo tantum.

$$\begin{array}{l} \quad -BDA + \\ BCD - CDA + A^{3} \propto O \\ \quad + BCA \end{array}$$

Ubi rectangula BD & CD simul majora sunt quam BC.

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut BCD æquetur Z^{s}

& $-BD$

$-CD$ æquetur $-S^{p}$,

$+BC$

Incidemus in æquationem propositam $Z^{s} - S^{p}A + A^{3} \propto O$.

Ubi manifestum est ipsum A explicabile esse tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio rursus unica est, nempe minor, cum duo latera suprà sunt æqualia, neque enim aliter æqualia esse possunt, cum illud quod est infrà duobus reliquis simul sumptis sit æquale.

Invenietur ergo hæc determinatio sic.

Positis B & C æqualibus, æquatio talis esse poterit,

$B^{2}D - 3B^{2}A + A^{3} \propto O$ unde $S^{p} \propto 3B^{2}$. *

Posito ergo, quod B sit A ex hypothesi determinationis, tunc $S^{p} \propto 3A^{2}$.

Itaque $\frac{1}{3}S^{p}$ est valor ipsius A^{2} & $Z^{s} \propto 2A^{3}$.

* *Quoniam D æquatur B & C simul; ac B & C simul in D æquales sunt $4B^{2}$, ex quibus sublato BC quod est B^{2} restat $3B^{2}$.*

Propositio tertia.

SI $Z^s - SpA - RA^2 + A^3 \infty O$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque minus duobus prioribus simul sumptis, excessus summæ duorum priorum supra tertium est R, at rursus ut in duabus præcedentibus propositionibus summa duorum rectangulorum, ejus scilicet, quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio excedit id quod sub primo & secundo, & excessus est Sp; Z^s autem est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus.

Ponantur enim eædem species quæ suprà, ea tamen lege ut D intelligatur minus quàm B & C simul, & rectangula B D & C D simul majora quàm B C, fietque rursus hæc æquatio ut suprà, nempe

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \infty O \\ \quad\;\; + BCA - CA^2 \end{array}$$

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut excessus B & C simul suprà D, sit R; at excessus rectangulorum B C & C D simul suprà B C, sit Sp; item solidum B C D sit Z^s, incidemus in æquationem propositam

$$Z^s - SpA - RA^2 + A^3 \infty O.$$

Ubi manifestum est A explicari posse tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio præcedentis æquationis.

HUjus propositionis determinatio triplex esse potest, prima major, cùm omnia tria latera sunt æqualia; secunda, cùm duo latera suprà tantùm sunt æqualia; & tertia, cùm alterum eorum laterum, quæ sunt suprà, æquale est ei quod est infrà. Utraque autem harum posteriorum minor est, quàm idcirco hic accidit esse duplicem.

Et quidem major determinatio facillima est.

Positis enim B, C, D æqualibus, factaque binomiorum multiplicatione, & sublatis quæ se invicem destruunt, manifestum est superesse

$BCD - BDA - BA^2 + A^3 \infty O$.

Sive quod idem est $B^3 - B^2A - BA^2 + A^3 \infty O$.

Itaque Z^s est B^3 sive A^3.

Sp est B^2 sive A^2 & R, est B sive A.

Prior autem duarum minorum determinationum, cùm scilicet duo latera suprà sunt æqualia, instituitur modo præmisso, tam in prima propositione primi capitis æquationum cubicarum, quàm in prima secundi capitis: positis enim lateribus B & C æqualibus, & argumentando ut suprà in prædictis propositionibus, præcipuè vero ut in prima secundi capitis, nisi quod hic D invenietur esse $2A - R$, reperiemus tandem valorem ipsius A esse

$$\frac{\dfrac{3Z^s}{R} - \frac{2}{1}Sp}{\dfrac{2Sp}{R} + \frac{2}{1}R}$$

Tandem altera duarum minorum determinationum, cùm scilicet alterum laterum suprà æquale est ei quod est infra, facilis est: posito enim quod B sit æquale ipsi D in formula præmissa, ac sublatis iis quæ se invicem tollunt, remanebit hæc æquatio, $B^2C - B^2A - CA^2 + A^3 \propto O$.

Itaque in æquatione proposita $Z^s \propto B^2C$, $S^p \propto B^2$ & $R \propto C$:

At C est unum ex duobus lateribus suprà, itaque ipsum R est unum ex lateribus suprà.

Item eadem ratione B^2 sive S^p est quadratum alterius lateris suprà, idemque quadratum ejus quod est infrà: ergo A explicabile est, tam de R suprà, quàm de S suprà & infrà.

Propositio quarta.

SI $Z^s - RA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque minus quovis duorum priorum, excessus summæ duorum priorum supra tertium, est R. At summa duorum rectangulorum ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, æqualis est ei quod sub primo & secundo. Z^s autem est id quod sub tribus continetur & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus.

Resumatur enim formula hujus capitis.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ \quad\;\; + BCA - CA^2 \end{array}$$

Intelligaturque D minus esse quàm B & C simul, & singula: at rectangulum BC æquale sit ambobus simul BD & CD, itaque tollunt se invicem ipsa rectangula, & sic evanescit affectio sub latere A, quia B & C simul superant D; differentia esto R, & solidum BCD vocetur a solidum, quo pacto incidemus in æquationem propositam, nempe

$$Z^s - RA^2 + A^3 \propto O.$$

Ubi palam est A explicari posse, tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio.

HUjus propositionis unica est determinatio, eaque minor, cùm scilicet duo latera suprà sunt æqualia: neque enim aliter æqualia esse possunt, quia unumquodque eorum quæ sunt suprà, majus est eo quod est infrà.

Ponantur ergo æqualia B & C, unde in formula præmissa, sublatis quæ se invicem tollunt, talis erit æquatio.

$$\begin{array}{l} B^2D + DA^2 \\ \quad\;\; - 2BA^2 + A^3 \propto O. \end{array}$$

Jam quia B est A & $2B - D$ est R, ideò $2A - R$ est D. Item quia BD & CD simul æqualia sunt BC, ideò si loco tam B quàm C sumatur A, & loco ipsius D sumatur $2A - R$ fiet hæc æquatio.

$$4A^2 - 2RA \propto A^2 \text{ hoc est } 3A^2 - 2RA \propto O.$$

Et communi divisore 3 A fiet $A - \frac{2}{3}R \propto O$.

Quapropter $\frac{2}{3}R$ est valor ipsius A.

Propositio quinta.

SI $Z^s + SpA - RA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque minus quovis duorum priorum, ita ut excessus summæ duorum priorum, suprà tertium sit R; at summa duorum rectangulorum, cjus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, minor est eo rectangulo, quod fit ex primo & secundo; differentia autem est Sp; Z^s autem est id quod sub tribus lateribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus lateribus.

In formula præcedentium quam hic resumimus

$$\begin{array}{c} -BDA-BA^2 \\ BCD-CDA-CA^2+A^3 \propto O \\ +BCA+DA^2 \end{array}$$

Intelligantur latera B & C tam simul quàm sigillatim, majora esse quàm D, & rectangulum B C majus quàm duo simul B D & C D. Quo posito & adhibita hac interpretatione ut excessus summæ laterum B & C suprà D sit R; item excessus rectanguli B C suprà summam reliquorum B D & C D sit Sp, at solidum B C D sit Z^s manifestum est nos incidere in æquationem propositam, & A explicabile esse tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio.

HUjus æquationis determinatio unica est eaque minor, tum scilicet duo latera suprà æqualia sunt, neque alia reperiri potest laterum æqualitas, cum unumquodque ex duobus prioribus majus sit quàm tertium.

Posito ergo quod B sit æquale ipsi C in formula præmissa, & augmentando ut in prima propositione primi capitis, aut prima secundi æquationum cubicarum, inveniemus D esse $2A - R$, & Sp esse $2RA - 3A^2$, unde tandem deducetur valor ipsius A,

$$\frac{\frac{3Z^s + \frac{1}{3}Sp}{R}}{\frac{1}{3}R - \frac{2Sp}{R}}$$

Propositio sexta irregularis.

SI $Z^s + SpA + A^3 \propto O$.

In hac æquatione A est explicabile de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium, vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua ipsa oriri possit. Potest tamen constitutio illius deduci, ex quatuor proportionalibus, hac ratione ut differentia extremarum sit $\frac{Z^s}{\frac{1}{3}Sp}$, rectangulum autem sub extremis vel mediis sit $\frac{1}{3}Sp$, & A sit differentia mediarum.

Sed neque hæc, neque aliæ similes quæ de solis lateribus infrà explicari possunt æquationes ad usum cummunem revocari possunt, nisi per transmutationem aliarum æquationum, quod etiam rarò aut nunquam accidit.

Propositio

Propoſitio ſeptima irregularis.

Si $Z^{s} + RA^{2} + A^{3} \propto O$

Rurſus in hac æquatione A explicabile eſt de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua illa oriri poſſit. Facile tamen hæc æquatio tranſmutabitur in aliam ſimilem ei, quæ habetur propoſitione 6ª ſeu præcedenti, unde conſtitutio ejus ex quatuor proportionalibus deducetur ut ſuprà; ſed neque alia eſſe poteſt, quàm præcedentis, utilitas.

Propoſitio octava irregularis.

Si $Z^{s} + A^{3} \propto O$.

Unicum etiam eſt latus infrà, idemque æquale lateri cubico ipſius Z^{s}.

CAPUT TERTIUM.

Hoc caput tot propoſitiones habet, quot præcedens, atque has illarum ſigillatim inverſas, hac ratione, ut quæ illic ſuprà erant latera, hic ſint infrà, & è contrario. Determinationes autem in utroque capite ſunt penitus eædem: itaque expoſita formula univerſali, quinque priorum propoſitionum regularium, enumeratiſque breviter ſingulis octo propoſitionibus, reliqua ad idem caput præcedens remittemus.

Pro formula igitur univerſali, intelligantur duo latera infrà, & unum ſuprà hac ratione

$$B + A \propto O$$
$$C + A \propto O$$
$$D - A \propto O$$

fiatque multiplicatio qualem conſuevimus habita ratione ſignorum, atque ita reperiemus.

$$\begin{array}{rl} & + BDA - BA^{2} \\ BCD & + CDA - CA^{2} - A^{3} \propto O \\ & - BCA + DA^{2} \end{array}$$

Qua ratione duo latera infrà intelliguntur æqualia ipſis B & C; illud autem quod eſt ſuprà, intelligitur æquale ipſi D.

Jam differentia inter ſummam laterum B & C & unicum D, eſto R; differentia autem inter ſummam rectangulorum BD & CD atque unicum BC, eſto S^{p}: item ſolidum BCD eſto Z^{s}. Hoc pacto prout exceſſus erit penes hæc vel illud, vel etiam aliquando nullus, orientur quinque propoſitiones regulares.

Propoſitio prima.

Si $Z^{s} + S^{p}A + RA^{2} - A^{3} \propto O$.

Sunt tria latera, duo quidem infrà, & unum ſuprà, idemque majus ſumma duorum priorum, & differentia eſt R; rectangulum autem ſub ſumma priorum & tertio excedit rectangulum ſub duobus prioribus, & exceſſus eſt S^{p}. At Z^{s} eſt id quod ſub tribus continetur, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis.

Determinatio.

PRo determinatione, positis duobus lateribus quæ sunt infrà, inter se æqualibus, recurremus ad primam propositionem secundi capitis, mutatis tamen iis quæ hic sunt infrà, in ea quæ ibi erant suprà, reperiemus valorem ipsius A infrà, æquale esse.

$$\frac{\frac{3Z^s}{R} + \frac{1}{4}S^p}{\frac{2S^p}{R} + \frac{2}{9}R}$$

Propositio secunda.

SI $Z^s + S^p A - A^3 \propto O$.
Vide secundam propositionem 2^i capitis, mutatis tamen suprà & infrà, ut jam diximus, neque etiam determinatione differunt.

Propositio tertia.

SI $Z^s + S^p A - R A^2 - A^3 \propto O$.
Vide tertiam secundi capitis, mutatione facta ut diximus, determinatio eadem erit.

Propositio quarta.

SI $Z^s - R A^2 - A^3 \propto O$.
Vide iisdem mutatis, quartam secundi capitis ejusque determinationem.

Propositio quinta.

SI $Z^s - S^p A - R A^2 - A^3 \propto O$.
Vide iisdem mutatis quintam propositionem 2^i capitis ejusque determinationem.

Propositio sexta irregularis.

SI $Z^s - S^p A - A^3 \propto O$.
Unicum est latus suprà, pro quo vide sextam propositionem secundi capitis. Notabis tamen hanc utilem esse posse.

Propositio septima irregularis.

SI $Z^s + R A^2 - A^3 \propto O$.
Unicum est latus suprà pro quo vide sextam propositionem 2^i capitis. Notabis tamen hanc utilem esse posse.

Propositio octava irregularis.

SI $Z^s - A^3 \propto O$.
Unicum est latus suprà, æquale lateri cubico Z^s.

CAPUT QUARTUM.

HOc etiam caput inversum est primi cubicorum; differunt enim in eo tantum quòd quæ illic erant latera suprà, hic sunt infrà, idque in prima propositione, quæ prorsus regularis est: at in secunda, quæ aliquo pacto est irregularis, ambo latera remanent infrà, etiamsi illic alterum esset suprà, alterum infrà, nec etiam in ambabus formula est eadem, quapropter utramque hic apponemus etiamsi utraque sit inutilis, nisi ex transmutatione aliunde oriatur, quod etiam rarò, aut nunquam accidere potest.

Propositio prima.

SI $Z^{s} + S^{p}A + RA^{2} + A^{3} \propto O$.
Et $\frac{Z^{s}}{R}$ non sit æquale ipsi S^{p}.

Sunt tria latera positiva infrà, quorum summa est R, tria rectangula sub ipsis, binis ac binis sumptis simul, constituunt S^{p}: at Z^{s} est quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Statuantur enim tria latera positiva infrà, in binomiis ut consuevimus hoc pacto

$$B + A \propto O$$
$$C + A \propto O$$
$$D + A \propto O$$

& fiat multiplicatio ut in superioribus, orietur que

$$\begin{matrix} & + BDA + BA^{2} & \\ BCD + & CDA + CA^{2} & + A^{3} \propto O \\ & + BCA + DA^{2} & \end{matrix}$$

quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut $B + C + D$ sit R; & $BD + CD + BC$ sit S^{p}, item BCD sit $Z^{sol.}$, incidemus in æquationem propositam, ubi manifestum est A explicabile esse tam de B, quàm de C, & de D, infrà.

Determinatio eadem prorsus est, quæ in prima propositione primi capitis cubicarum, atque id tam in majori quàm in minori determinationum ibi expositarum.

Propositio secunda.

SI $Z^{s} + S^{p}A + RA^{2} + A^{3} \propto O$.
Sit autem $\frac{Z^{s}}{R} \propto S^{p}$.

Sunt duo latera ambo infrà, alterum quidem æquale longitudine ipsi R, alterum autem non proprie latus, sed planum æquale S^{p}, & Z^{s} est id quod continetur sub primo latere in planum, quod secundi locum obtinet sive $S^{p}R$, & A explicabile est de quolibet.

Statuatur enim $R + A \propto O$
& $S^{p} + A^{2} \propto O$
ut sint latus & planum, ambo positiva infrà, fiatque multiplicatio; atque ita orietur hæc æquatio.

$$RS^{p} + S^{p}A + RA^{2} + A^{3} \propto O.$$

Jam R Sp esto $Z^{c.}$, qua ascita interpretatione incidemus in æquationem propositam, quæ proinde explicabilis est, tam de A æquali, ipsi R, quàm de A æquali potentiæ ipsi Spo, ut est propositum.

Notæ circa æquationes præmissas, & circa eas, quæ ad altiores gradus aut potentias pertinere possunt.

Prima.

OMNIS affectio sub latere positivo suprà, sequitur naturam sui signi, censetur enim affirmativa vel negativa suprà, prout illa afficitur signo affirmationis vel negationis. Idem intellige de affectionibus sub omnibus gradibus, atque etiam de omnibus potentiis ejusdem lateris positivi suprà.

Secunda.

UT autem innotescat etiam quid censendum sit de affectionibus sub latere positivo infrà ejusque gradibus, & potentiis, præmittendum est primum id quod jam notavimus, nempe affirmativum infrà æquivalere negativo suprà, & è contrario.

Deinde circa latera suprà, ideo + multiplicatum per + producere +, quia multiplicator affirmativus affirmat affirmationem multiplicati. Ideo autem — per — producere +, quia multiplicator negationis negat negationem multiplicati, atque ita constituit affirmationem. At + per — vel — per +, ideo producere —, quia multiplicator affirmativus affirmat negationem multiplicati, vel multiplicator negativus negat affirmationem multiplicati, atque ita constituit negationem.

Hinc igitur, quia latus affirmativum infrà, æquivalet negativo suprà, omnis affectio sub latere positivo infrà, sequitur contrariam sui signi naturam, ita ut si sit affirmativum infrà, æquivaleat negativo suprà & è contrario. Contra verò quadratum lateris positivi infrà, æquivalet quadrato lateris positivi suprà, quia fit ex + A in + A, vel ex — A in — A, unde quovis modo fit + A^2 suprà, vel æquivalens. Itaque omnis affectio sub quadrato lateris positivi infrà, sequitur naturam sui signi affirmativi vel negativi; in altioribus verò gradibus, simili argumento concludemus idem accidere affectioni sub cubo, quod sub suo latere: & quadratoquadrato, quod suo quadrato, atque ita continuè per gradus altiores, ut illi qui statuuntur in locis imparibus, imitentur latus ipsum; qui autem statuuntur in locis paribus, imitentur quadratum.

Insuper omnis affectio, quæ retinet naturam sui signi, ducta in affectionem, quæ itidem naturam sui signi retineat, producit aliam, quæ etiam naturam sui signi retinet. Sed & affectio quæ sequitur contrariam sui signi naturam, ducta in affectionem quæ contrariam sui signi naturam sequatur, producit aliam, quæ sequitur eandem sui signi naturam.

Contrarium autem accidit dum ducuntur inter se duæ affectiones, quarum una sui signi naturam sequatur, altera contrariam, quæ enim inde fit affectio, sequitur contrariam sui signi naturam.

Tertia.

EX duabus notis præmissis non difficile erit explicare, cùm ex multiplicatione binomiorum in omnibus capitibus jam expositis, circa

quadratas

quadratas & cubicas affectiones, producatur tandem æquatio quæ nihilo æquivaleat, id autem uno aut altero exemplo illustrabimus.

Proponatur primum, ut in propositione secunda quadraticarum, hæc æquatio

$$\begin{array}{l} \quad\;\; +BA \\ BC - CA - A^2 \propto O. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio orta est ex ductu affectionum B — A & C + A in se invicem, intelligatur ergo primo casu, B suprà æquari ipsi A suprà; unde B — A æquatur nihilo; quia tam B quàm A, cùm sint suprà, sequuntur naturam sui signi, quæ signa cùm sint contraria, manifestum est B & A tollere se invicem.

Jam C + A cujuscumque valoris sit ducatur in B — A, fit rursus manifestò

$$\begin{array}{l} \quad\;\; +BA \\ BC - CA - A^2 \propto O. \end{array}$$

Ubi omnes affectiones sequuntur naturam sui signi, quia quæ ipsas produxerunt, sui signi naturam sequebantur, & quia B æquatur A, ideo BC æquatur CA, quare propter signa contraria tollunt se invicem + BC — CA.

Item BA æquatur A^2, quare propter signa contraria tollunt se invicem + BA — A^2, atque ita omnes affectiones simul nihilo æquivalent, dum scilicet B æquatur ipsi A suprà.

Sed secundo casu, esto C suprà æquale ipsi A infrà: unde C + A æquatur nihilo, quia ipsum + A infrà sequitur contrariam sui signi naturam, æquivaletque ipsi — A suprà, sicque tollunt se invicem + C + A.

Jam B — A cujuscumque valoris sit, ducatur in C + A, fit manifestò

$$\begin{array}{l} \quad\;\; +BA \\ BC - CA - A^2. \end{array}$$

Ubi duæ affectiones sub latere A, scilicet $\begin{array}{l} +BA, \\ -CA \end{array}$ sequuntur contrariam sui signi naturam; at — A^2 & + BC sui ipsius signi naturam sequuntur; & quia C æquatur A, ideo BC æquatur BA, & CA æquatur A^2, quare tollunt se invicem + BC + BA, quia BC eandem, BA vero contrariam sui signi sequitur naturam. Eadem ratione tollunt se invicem — CA — A^2 quia CA contrariam, A^2 vero eandem sui signi naturam sequitur: atque ita rursus omnes affectiones simul nihilo æquivalent, cùm ipsum C suprà æquetur ipsi A infrà.

Cùm vero sic interpretamur æquationem ut BC sit Zp, at $\begin{array}{l} +B \\ -C \end{array}$ sit R, ut sic Zp + RA — $A^2 \propto O$. Patet ipsum R, esse differentiam inter B majus & C minus, quia illæ affectiones + BA & — CA habent signa diversa, & præterea vel ambæ eandem, vel ambæ contrariam sui signi naturam sequuntur, impediunt ergo signa diversa ne simul jungi debeant.

Item in hac æquatione Zp + RA — $A^2 \propto O$.

Dum A intelligitur esse suprà, omnes affectiones sunt suprà, sequunturque naturam sui signi, & sic sola affectio A^2 æquatur reliquis duabus simul.

E contrario vero cum A intelligitur esse infrà, tum Zp & A^2 sequuntur naturam sui signi, RA vero contrariam, sicque + RA infrà æquivalet — RA suprà. Unde + RA — A^2 simul æquivalent ipsi Zp.

Kk

Jam in secundo exemplo proponatur æquatio propositionis primæ secundi capitis cubiearum

$$Z^{c} - S^{p}A + RA^{2} + A^{3} \propto O.$$

Cujus constitutionem deduximus ex multiplicatione sive ductu harum trium affectionum, $B - A$
$C - A$
$D + A$

Ex quo oritur hæc æquatio, posito tamen quod D majus sit quàm B & C simul.

$$\begin{array}{c} -BDA + DA^{2} \\ BCD - CDA - BA^{2} + A^{3} \propto O \\ +BCA - CA^{2} \end{array}$$

Quam quidem æquationem legitimam esse, sive B suprà æquetur A suprà, sive C suprà æquetur A suprà, sive tandem D suprà æquetur A infrà, sic ostendimus.

Ponamus primo casu B suprà æquari A suprà, unde $B - A \propto O$.

Jam sub ipso valore A, quiequid valeat tam $C - A$, quàm $D + A$, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{array}{c} +CA \\ CD - DA - A^{2}; \end{array}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia tam A, quàm B, C, D ex quibus ortæ sunt, sunt suprà. Hoc autem totum productum quicquid valeat ducatur in $B - A$, atque ita tandem orietur

$$\begin{array}{c} -BDA + DA^{2} \\ BCD - CDA - BA^{2} + A^{3} \\ +BCA - CA^{2} \end{array}$$

Cujus omnes affectiones sequuntur sui signi naturam, propter rationem jam allatam. Quoniam ergo B ponitur æquale ipsi A, ideo BCD æquatur CDA, atque ita tollunt se invicem $+BCD - CDA$; eadem ratione tollunt se invicem $-BDA + DA^{2}$; item $+BCA - CA^{2}$, ac tandem $-BA^{2} + A^{3}$, unde patet omnes affectiones simul, nihilo æquivalere, dum B æquatur ipsi A.

Secundo casu C suprà æquetur ipsi A suprà; unde $C - A \propto O$.

Jam sub ipso valore A quiequid valeat tam $B - A$, quàm $D + A$, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque manifestò

$$\begin{array}{c} +BA \\ BD - DA - A^{2} \end{array}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia A, B, C, D ponuntur esse suprà. Hoc autem totum productum, quicquid valeat, ducatur in $C - A$, orietur rursus ut in primo casu

$$\begin{array}{c} -BDA + DA^{2} \\ BCD - CDA - BA^{2} + A^{3} \propto O \\ +BCA - CA^{2} \end{array}$$

Ubi etiam omnes affectiones sequuntur naturam sui signi propter eandem rationem. Quoniam ergo C ponitur æquari ipsi A, ideo BCD æquatur ipsi BDA, atque ita tollunt se invicem $+BCD - BDA$: eadem ratione tollunt se $-CDA + DA^{2}$; item $+BCA - BA^{2}$: ac tan-

dem — $CA^2 + A^3$. Unde patet quod existente C æquali ipsi A, omnes affectiones simul nihilo æquivalent.

Tertio & ultimo casu, intelligatur D suprà æquari A infrà. Quo pacto $D + A \infty O$.

Jam sub ipso valore A, quicquid valeat tam $B - A$, quàm $C - A$, ducantur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{array}{c} -BA \\ BC - CA + A^2, \end{array}$$

Ubi, quia tam B, quàm C sunt suprà, A autem infrà, duæ affectiones BC & A^2 sequuntur naturam sui signi, duæ verò reliquæ $\begin{array}{c}BA\\CA\end{array}$ contrariam. Hoc autem totum productum quicquid valeat, ducatur in $D + A$, orieturque idem omnino quod primo & secundo casu, nempe

$$\begin{array}{c} -BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \\ + BCA - CA^2 \end{array}$$

Hic verò omnes affectiones sub latere A, atque etiam cubi A^3 sequuntur contrariam sui signi naturam per regulas præmissas, quia oriuntur ex multiplicatione affectionum, BD, CD, BC, & A^2, quæ omnes sequuntur naturam sui signi in A quod sequitur contrariam.

Quoniam ergo D suprà ponitur æquale A infrà, ideo B C D æquatur B C A, unde tollunt se invicem + B C D + B C A: nam etiam si signa sint eadem, tamen natura est contraria. Eadem ratione tollunt se invicem — B D A — BA^2, item — C D A — CA^2, & denique + DA^2 + A^3.

Unde patet quod existente D supra æquali ipsi A infrà, omnes affectiones simul nihilo æquivalent. Sive ergo B vel C suprà æquetur ipsi A suprà, sive D suprà æquetur A infrà semper stabit æquatio, & omnes affectiones simul nihilo æquivalebunt.

Itaque in æquatione proposita $Z^s - SPA + RA^2 + A^3 \infty O$.

SP intelligitur esse differentia inter summam duorum planorum B D, C D, & planum B C: at longitudo R est differentia inter summam laterum B, C, & latus D, quæ sunt æqualia tribus illis de quibus potest explicari A, in æquatione. Rursus cùm in eadem æquatione A intelligatur esse suprà, tunc omnes affectiones sequuntur naturam sui signi, unde sola affectio S P A æquatur tribus reliquis simul sumptis. Contrà verò cùm A intelligitur esse infrà, tunc affectiones sub latere A & ipsius cubo A^3 sequuntur naturam contrariam sui signi, duæ autem reliquæ eandem, unde — SPA infrà æquivalet + SPA suprà, & + A^3 infrà æquivalet — A^3 suprà, sicque sola affectio A^3 æquatur tribus reliquis simul sumptis.

His duobus exemplis rite perceptis, non erit difficile idem in omnibus æquationibus extendere, quæ ex duobus, tribus vel etiam pluribus lateribus efformabuntur.

Quarta.

CUM autem planum aliquod ex se ponitur sequi naturam contrariam sui signi, tunc occurrere posset difficultas circa affectiones lateris quod potentiâ æquale intelligitur eidem plano, & circa affectiones aliorum graduum ejusdem lateris, quæ difficultas etiamsi non difficilè solvi possit, speciatim in omnibus affectionibus oblatis, quia tamen prolixa esset solutio, præcipuè quia extendi deberet non ad planum tantùm, sed etiam ad

gradus altiores, ideò nos solutionem afferemus in universum, quæ ad quascumque æquationes, etiam eas de quibus jam egimus, extendi potest, eamque aliquo exemplo illustrabimus.

Intelligatur ergo Bp suprà $+ A^2$ infrà $\propto O$. Ubi manifesto A^2 quod planum est, sequitur naturam sui signi contrariam. Sit autem quævis æquatio, quæ orta sit ex multiplicatione hujus affectionis $Bp + A^2$ in aliam quamcumque affectionem, in qua æquatione A sit explicabile de latere A, quod potentiâ æquale sit ipsi Bp. Ut ostendamus omnes affectiones æquationis simul nihilo æquavalere sic ratiocinabimur. Quia affectio $Bp + A^2$ in aliam quamcumque affectionem ducitur, certum est in ipsam duci primum separatim Bp quod sequitur naturam sui signi, deinde in eandem duci separatim A^2 quod sequitur contrariam: quicquid ergo producat Bp, id omne simul, æquale est ei, quod producitur ab A^2 propter æqualitatem Bp & A^2; sed & singula producta singulis productis sunt æqualia propter eandem rationem, & in singulis æqualibus signa erunt eadem, quia Bp & A^2 habent idem signum. At propter contrariam naturam Bp & A^2 singula producta æqualia contrariæ erunt naturæ, atque idcircò tollent se invicem, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo sit æqualis, ut proponitur.

Ut autem in omnibus æquationibus idem locum habere manifestum sit, intelligatur $Bp - A^2 \propto O$, sintque tam Bp quàm A^2 suprà, & utrumque sequatur naturam sui signi. Tunc facta multiplicatione, ut dictum est, singula producta singulis sunt æqualia & ejusdem naturæ; sed signa erunt contraria, quia Bp & A^2 habent contraria, atque ita rursus tollent se invicem omnes affectiones, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo sit æqualis, ut proponitur.

In exemplo proponatur, ut in secunda propositione primi capitis cubicarum, $Bp + A^2 \propto O$. Ita ut Bp sit suprà, at A^2 infrà, & ambo æqualia, ducatur autem hæc affectio in hanc aliam, cujuscumque sit valoris $C - A$ orietur manifestò $BpC - BpA + CA^2 - A^3$, sed ita ut $+ BpC - BpA$ fiat speciatim ex ductu Bp in $C - A$; at $+ CA^2 - A^3$ fiat ex A^2 in $C - A$. Quia ergo $+ Bp$ ducitur in $+ C$ & producit BpC, & $+ A^2$ ducitur in idem C & producit CA^2, sunt autem æqualia Bp & A^2, atque idem possident signum, erunt æqualia producta BpC, idemque signum possidebunt: at quia diversæ sunt naturæ Bp & A^2, illud scilicet Bp sequitur eandem sui signi naturam, hoc verò A^2 contrariam; idem ergo eorum productis accidet, ut alterum eandem sui signi naturam, alterum verò contrariam sequatur: tollent igitur se invicem $+ BpC$ & $+ CA^2$. Eadem ratione quia Bp & A^2 æqualia sub eodem signo, sed diversæ naturæ ducuntur sigillatim in A & producunt $- BpA - A^3$, erunt hæc producta æqualia & sub eodem signo, sed diversæ naturæ: ipsa ergo tollent se invicem, unde tota æquatio nihilo æquivalet. Nec erit difficile simili argumento uti in quibuscumque æquationibus, semper enim singulæ affectiones singulis erunt æquales, quia fient ex æqualibus in eandem: at vel signa erunt eadem & natura contraria, vel natura erit eadem & signa contraria, sicque tollent se invicem singulæ affectiones, & tota æquatio nihilo æquivalebit.

Quinta.

Operæ etiam pretium est scire quot modis complicari possint affectiones speciales, ut ex iis affectiones universales oriantur ad condendas æquationes omnium potentiarum quadraticarum, cubicarum, quadratoquadraticarum, quadratocubicarum &c.

Ad

Ad hoc autem habenda primum eſt ratio numeri graduum ex quibus ipſa potentia componitur: nam quot modis potentia ipſa ex ſuis gradibus gigni poterit, tot modis complicari poterunt affectiones ſpeciales ad condendam æqualitatem. Sic latus per ſe, latus tantùm eſt. Planum fit vel per ſe, vel ex duobus lateribus. Solidum fit vel per ſe, vel ex plano & latere, vel ex tribus lateribus. Planoplanum fit vel per ſe, vel ex ſolido & latere, vel ex duobus planis, vel ex plano & duobus lateribus, vel ex quatuor lateribus. Planoſolidum fit vel per ſe, vel ex planoplano & latere, vel ex ſolido & plano, vel ex ſolido & duobus lateribus, vel ex duobus planis & latere, vel ex plano & tribus lateribus, vel ex quinque lateribus. Solidoſolidum fit vel per ſe vel ex planoſolido & latere, vel ex planoplano & plano, vel ex planoplano & duobus lateribus, vel ex duobus ſolidis, vel ex ſolido & plano & latere, vel ex ſolido & tribus lateribus, vel ex tribus planis, vel ex duobus planis & duobus lateribus, vel ex plano & quatuor lateribus, vel ex ſex lateribus. Atque eodem modo & ordine in infinitum.

Secundo habenda eſt ratio affectionum ſpecialium ex quibus totalis gignitur: nam ex illis quædam aliquando per ſe æquationem aliquam conſtituunt, quæ de unico, vel etiam de pluribus lateribus explicabilis eſt, omnino autem quævis æquatio ſuperioris ordinis formari poteſt ex duabus vel pluribus æquationibus inferiorum ordinum in ſe ductis; atque id tot modis quot jam diximus potentias ex ſuis gradibus gigni poſſe. Exempli gratia, æquatio cubocubica poteſt formari ex quadratocubica ducta in lateralem, vel ex quadratoquadratica in quadraticam, vel ex quadratoquadratica & duobus lateribus, vel ex duabus cubicis, vel ex cubica in quadraticam & lateralem, vel ex tribus quadraticis & cæt.

Hinc patet eò pluribus modis complicari poſſe affectiones ſpeciales ad condendam æquationem aliquam, quò altior eſt illa æquatio, ſeu quò altior eſt illius potentia: atque ipſam altiorem gigni poſſe ex omnibus inferioribus debitè complicatis nullâ exceptâ, & prætereà eandem per ſe ipſam conſtitui aliquando nullo inferiorum habito reſpectu.

Sexta.

Illud autem notatu digniſſimum eſt, quamcumque æquationem de tot lateribus explicabilem eſſe, quot ſunt illa de quibus explicari poſſunt omnes affectiones, ſeu æquationes ſpeciales à quibus illa producta eſt. Immo & latera illius lateribus illarum ſingula ſingulis eſſe æqualia ſive potiùs eadem; atque adeò ejuſdem affectionis & naturæ.

Exempli gratia æquatio lateralis ut $B - A \propto O$ de unico tantùm latere ſuprà explicabilis eſt, ſicut & $C - A \propto O$. At ambæ invicem ductæ producunt quadraticam æquationem

$$\begin{array}{c} -BA \\ BC - CA + A^2 \propto O; \end{array}$$

Quæ de iiſdem duobus lateribus ſuprà eſt explicabilis.

Rurſus ſi hæc æquatio quadratica ducatur in hanc lateralem $D + A \propto O$; quæ de unico latere infrà explicari poteſt, producetur hæc æquatio cubica

$$\begin{array}{c} -BDA - BA^2 \\ BCD - CDA - CA^2 + A^3 \propto O \\ +BCA + DA^2 \end{array}$$

Quæ de tribus iiſdem lateribus explicabitur, duobus quidem ſuprà, altero verò infrà.

Eodem modo si ipsa æquatio cubica ducatur in aliam lateralem de unico latere explicabilem, producetur æquatio quadratoquadratica, quæ de quatuor lateribus explicari poterit.

Item hæc æquatio cubica $Z^{s} - S^{p}A - A^{3} \propto O.$

De unico tantùm latere suprà est explicabilis

Hæc quadratica $B^{p} - RA - A^{2} \propto O$

De duobus, altero suprà, & altero infrà: his ergo duabus æquationibus in se invicem ductis fiet hæc quadratocubica

$$\begin{array}{l} \quad\quad - B^{p}S^{p}A + RS^{p}A^{2} - B^{p}A^{3} \\ B^{p}Z^{s} - RZ^{s}A - Z^{s}A^{2} + S^{p}A^{3} + RA^{4} + A^{5} \propto O \end{array}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus, duobus quidem suprà, & tertio infrà, est explicabilis, atque ita de reliquis.

Cùm verò quædam æquatio per se ipsam constituitur, nec constare potest ex ductu duarum aut plurium inferiorum, tunc illam de unico tantùm latere contingit explicari posse, quales sunt omnes illæ irregulares de quibus diximus suprà cap. 2° & 3° cubicarum.

Præterea si accidat omnia latera alicujus æquationis esse fictitia, & impossibilia, ejusmodi æquatio in quamcumque aliam ducta tertiam producet, quæ de lateribus secundæ æquationis tantùm explicabilis erit; quòd si etiam secundæ illius latera omnia fictitia sint, quæ ex ambabus primâ scilicet & secundâ oritur æquatio, habebit latera omnia fictitia, & impossibilia. At si duarum priorum æquationum latera quædam fictitia sint & quædam positiva, tunc æquatio quæ ab ipsis duabus producitur, tot latera habebit positiva quot in duabus à quibus producta est, reperiuntur. Cætera erunt etiam fictitia.

In exemplo esto hæc æquatio quadratica

$$Z^{p} - RA + A^{2} \propto O$$

& intelligatur Z^{p} majus esse quàm $\frac{1}{4} R^{2}$; unde duo latera de quibus aliàs explicabilis esset ipsa æquatio, sunt fictitia: esto quoque hæc æquatio lateralis $B - A \propto O$ de unico latere suprà explicabilis, ducanturque in se invicem æquationes ipsæ, unde producetur hæc æquatio cubica

$$\begin{array}{l} \quad\quad - BRA + BA^{2} \\ Z^{p}B - Z^{p}A + RA^{2} - A^{3} \propto O. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio de unico tantùm latere suprà est explicabilis, reliqua duo sunt fictitia.

Corollarium.

Ex hac nota intelligi potest methodus, quâ dignosci poterit num æquatio proposita habeat quædam latera fictitia, an verò omnia sint positiva, an etiam omnia fictitia: illud autem aliquando & longissimæ & difficillimæ indagationis est, præcipuè in æquationibus ultrà cubum elatis & multipliciter affectis. In universum autem considerandum erit quot modis æquatio proposita ex aliis inferioribus produci poterit, habitâ ratione formulæ, & quot modis accidere poterit ut illæ inferiores habeant latera, vel fictitia, vel positiva, quidve tam hæc quàm illa efficiant, dum inter se multiplicantur: nam hoc intellecto, dum proponetur illa æquatio, examinandum erit num id illi conveniat, quod à parte laterum fictitiorum produci debuit, num vero id quod à parte laterum positivorum exempli gratia, propositâ hac æquatione cubicâ

$$C^{s.} - D^{p}A + FA^{2} - A^{3} \propto O.$$

Cujus formula similis est ei quam sub finem notæ sextæ adduximus, patet eam produci potuisse à duabus, alterâ planâ, sub hac formula

$$Z^{p} - RA + A^{2} \propto O$$

Altera autem laterali sub hac formulâ $B - A \propto O$. Unde æquationis productæ formula est hæc, quæ etiam ibi adducta est

$$\begin{array}{c} - BRA + BA^{2} \\ Z^{p}B - Z^{p}A + RA^{2} - A^{3}. \end{array}$$

Conferantur ergo inter se singula homogenea ambarum ipsarum æquationum, scilicet $C^{s.}$ cum $Z^{p}B$, item D^{p} cum ambobus simul BR & Z^{p}, & longitudo F, cum ambabus B & R: his enim collatis si reperiatur Z^{p} majus esse quàm $\frac{1}{4}R^{2}$, concludemus latera æquationis planæ fuisse fictitia, atque adeo & eadem, in æquatione cubicâ, fictitia esse. Quòd si Z^{p} non sit majus quàm $\frac{1}{4}R^{2}$, erunt in utraque æquatione latera positiva. Verùm tota difficultas consistit in modo & ratione examinandi: hîc enim in exemplo, videndum esset, num longitudo F sic dividi possit in duas partes, quæ referant B & R, & rectangulum sub ipsis demptum ex D^{p} relinquat $\frac{1}{4}$ quadrati alterutrius partium, putà ipsius R. Ac præthereà $C^{s.}$ applicatum ad reliquam partem exhibeat idem $\frac{1}{4}R^{2}$, hoc enim casu æquatio proposita explicabilis erit de tribus lateribus, duobus quidem æqualibus, tertio verò utcumque, & ambo æqualia simul æquivalebunt primæ portioni ipsius F, putà ipsi R, eritque hic casus minoris majorisve determinationis.

Aliter, quod tamen eòdem recidit, dividatur longitudo F, sic ut rectangulum sub partibus unà cum $\frac{1}{4}$ quadrati unius portionum æquale sit D^{p}, est autem hujusce divisionis problema planum de duobus lateribus explicabile, & determinationi obnoxium, ac tunc si divisio fieri non possit, statim pronuntiare licet æquationis planæ latera fuisse fictitia. Si autem divisio fieri possit, sitque ipsa maxima eademque unica, cùm scilicet altera pars ipsi B correlata, erit $\frac{1}{3}F$, altera autem ipsi R correlata, erit $\frac{2}{3}F$, tunc nisi C^{s} sit præcise $\frac{1}{27}F^{3}$, erit rursus æquatio plana, fictitia: existente autem $C^{s.}$ æquali ipsi $\frac{1}{27}F^{3}$, erit tunc casus majoris determinationis, de qua dictum est propos. prima, cap. I. cubicarum. At verò si facta divisione longitudinis F, ut dictum est, non incidamus in maximam, cùm scilicet portio ipsi B correlata non erit $\frac{1}{3}F$, sed major, vel minor (duplex enim hoc casu contingere potest solutio) tunc si ductâ alterutrâ ex iis duabus partibus quæ ipsi B correlatæ sunt, in $\frac{1}{4}$ quadrati alterius sibi congruentis, fiat solidum æquale ipsi C^{s}, habebitur casus minoris determinationis, in quo tria latera erunt positiva, duo quidem æqualia, ad æquationem quadraticam pertinentia, quorum summa erit illa portio longitudinis F, quæ ipsi R correlata est, & tertium singulis productis inæquale, quod ad æquationem lateralem pertinebit, eritque tertium illud portio ipsi B correlata. Quòd si ex duobus illis solidis quæ hac ratione fieri possunt, (videlicet ob duplicem solutionem, quæ contingere potest, divisa longitudine F, ut proponitur) neutrum æquale reperiatur ipsi C^{s}, sit autem hoc C^{s}, maximo prædictorum minus, minimo majus: tunc tria æquationis latera erunt positiva, sed inæqualia. Si tandem C^{s}, vel maximo prædictorum majus, vel minimo minus extiterit, hoc casu erunt duo illa latera fictitia quæ ad æquationem planam pertinebunt, ac solum reliquum illud erit positivum, quod æquationis lateralis proprium erit.



DE
GEOMETRICA PLANARUM
ET CUBICARUM ÆQUATIONUM
RESOLUTIONE.

ÆQUATIONEM geometricè resolvere, est invenire geometricè omnia latera de quibus ipsa æquatio explicabilis est.

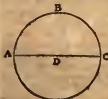
Inventio autem ejusmodi laterum dicitur esse geometrica, cùm illa deducitur ex locis propriis secundùm geometriæ leges descriptis, atque inter se certo ac legitimo modo compositis; ita ut ex ipsorum locorum sectione vel tactione, lineæ quædam rectæ deducantur quæ latera quæsita exhibeant.

Quoniam verò ista laterum inventio pendet à locis geometricis, non abs re fuerit aliqua de ipsis locis præmittere, tum circa eorum naturam atque constitutionem, tum etiam circa eorumdem divisionem, ac diversos gradus, ut quæ simpliciora sunt, à magis compositis distinguantur.

Locus ergo geometricus in universum, est magnitudo quædam ex qua deduci possunt quotcunque aliæ magnitudines secundùm eandem atque uniformem quandam legem, quæ eandem aliquam atque uniformem sortiantur proprietatem.

De locis ejusmodi complures libros antiqui conscripsere, quorum numerum & titulos apud Pappum Alexandrinum legere licet; sed illi temporis injuria, summo rei literariæ detrimento, perierunt. Neque nos eorum instaurationem hic intendimus, quia ad nostrum institutum, paucis iisque non admodùm difficilibus, egemus. Non abs re tamen fore judicavimus selectiores aliquot ex illustrioribus locis in exemplum hic afferre, quò eorum natura & constitutio magis elucescat. Nec ultra constructionem seu compositionem ipsorum progrediemur: demonstrationem autem, quia plerumque nimis longa est, ad eam partem geometriæ quæ talem materiam tractare debet, remittemus.

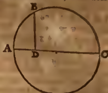
In primo ergo exemplo. Esto quævis circuli circumferentia A B C, cujus centrum sit D; manifestum est ergo rectas omnes ab ipsa circumferentia ad centrum D ductas esse æquales. Itaque ex præmissa loci definitione, circumferentia illa locus est, quandoquidem ea magnitudo est ex qua deductæ quotcumque aliæ magnitudines, lineæ rectæ scilicet, secundùm eandem atque uniformem legem, puta quæ ad idem centrum D tendant, candem aliquam atque uniformem sortiuntur proprietatem, ut scilicet omnes sint inter se æquales.



Geometræ autem, cùm magnitudinem aliquam ad quendam locum referre volunt, primùm magnitudinis istius genus ac speciem, deinde ejusdem conditiones exprimunt, ac tandem locum ipsum enunciant, addito modo, quo ipsa magnitudo ad prædictum locum refertur.

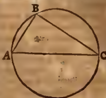
In exemplo ergo præmisso sic illi loquerentur. Si ab aliquo puncto educantur quotcunque rectæ, quæ uni eidemque rectæ sint æquales, erit earum cujusvis eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

In altero exemplo. Esto quævis circumferentia circuli ABC, cujus diameter sit A C, atque in ea diametro statuatur punctum quodvis D, à quo erecta ad diametrum perpendicularis recta D B, terminetur ad circumferentiam in B: erit ergo hæc B D media proportionalis inter diametri portiones A D, D C; unde ipsa circumferentia, rursùs alio respectu locus erit, quippe ad medias proportionales.



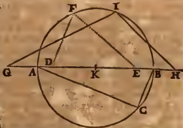
Phrasis geometrica hujus loci talis esset. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, si inter terminos illius sumatur quodvis punctum, à quo educatur ad rectos angulos ipsi rectæ quævis alia recta, quæ inter prioris rectæ portiones media proportionalis existat, erit alterum eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

In tertio exemplo. Esto adhuc quævis circumferentia circuli A B C, atque in ea recta quædam A C quæ subtendat arcum A B C utcunque; atque in eo arcu, sumpto quovis puncto B, ducantur rectæ B A, B C ad ejusdem arcus sive chordæ ipsius extrema: manifestum est angulum A B C æqualem esse omni alii angulo qui in eadem portione A B C existet. Manifestum est quoque potuisse super rectam A C constitui portionem circuli A B C, quæ cujuscunque anguli A B C capax esset; unde circuli portio A B C hoc respectu locus erit; quippe ad angulos æquales.



Phrasis geometrica hæc erit. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, & exposito quovis angulo rectilineo: si à rectæ lineæ terminis ad aliquod punctum inclinentur duæ aliæ rectæ quæ angulum exposito æqualem contineant: erit hoc punctum, sive vertex anguli, ad alicujus portionis circuli circumferentiam.

In quarto exemplo. Esto ut suprà quivis circulus cujus diameter A B; atque ex punctis A, B, ducantur ad quodvis punctum C in circumferentia existens, rectæ AC, BC. Patet ergo ambo simul quadrata A C, B C æqualia esse quadrato diametri A B, ac proinde ipsam circumferentiam locum esse ad summam duorum quadratorum uni eidemque quadrato semper æqualem.



Atque etiam si assumpta puncta non sint ipsa A, B, sed alia duo quæcunque in rectâ A B etiam productâ, si libuerit, modò ipsa puncta à centro K hinc inde æqualiter distent, vel intra circulum, qualia sunt D, E; vel extra, qualia sunt G, H; ducanturque ad quodvis circumferentiæ punctum F vel I rectæ D F, E F; vel rectæ G I, H I; semper ambo quadrata D F, E F simul sumpta uni eidemque spatio erunt æqualia, nempe summæ amborum quadratorum D B, B E, vel summæ amborum E A, A D: similiter ambo quadrata G I, I H simul

sumpta, uni eidemque spatio æqualia erunt, nempe summæ amborum quadratorum G B, B H, vel summæ amborum H A, A G. Hinc ergo circumferentia illa, lato illo respectu, locus erit ad summam duorum quadratorum uni eidemque spatio semper æqualem.

Phrasis geometrica. Rectâ lineâ quâcunque expositâ, signatisque in ea utcunque duobus punctis, si ab ipsis punctis ad tertium quodpiam punctum duæ rectæ inclinentur, & sint species quæ ab ipsis fiunt simul sumptæ exposito alicui spatio æquales, tertium illud punctum erit ad alicujus circuli circumferentiam.

Species dicunt geometræ, non quadrata; ut indicent hoc universaliter verum esse, non de quadratis modò, sed etiam de figuris similibus, similiterque super rectis de quibus agitur descriptis. Quod enim de quadratis verum est, idem quoque de ejusmodi figuris verum esse omnino constat. Immò, si assumpta puncta in superiori quarto exemplo plura sint quàm duo, sive omnia in eadem recta existant, sive non, quicunque tandem sit illorum numerus, & quæcunque positio; atque ab iisdem punctis ad aliud quoddam punctum totidem rectæ ducantur, singulæ scilicet à singulis punctis, & omnium ipsarum rectarum species simul sumptæ alicui spatio sint æquales: erit illud aliud punctum ad circuli circumferentiam. Dabitur quippe circulus quispiam in cujus circumferentia sumpto quovis puncto, atque ab eo ad omnia puncta primò posita ductis totidem rectis, erunt harum omnium ductarum species simul sumptæ eidem spatio æquales: quo quidem respectu circumferentia illa erit locus, qui omnium locorum planorum elegantissimus jure censeri possit; sed illius, sicuti & aliorum discussio specialior, ad specialem de locis tractatum pertinet, nos autem hîc ad generalem quandam locorum notionem attendimus.

In quinto exemplo. Esto item circulus, cujus diameter A B, quæ producatur versùs A extra circulum utcunque in C; & ducatur recta C F tangens circulum in F, à quo demittatur in diametrum perpendicularis F D. Itaque erit ut C A ad A D, ita C B ad B D. Jam in circumferentia sumatur quodvis punctum E, vel G &c. à quo rectæ ducantur E C, E D, vel G C, G D &c. erit sanè semper E C ad E D, vel G C ad G D, vel etiam F C ad F D &c. ut C A ad A D, vel ut C B ad B D; ut hoc respectu circumferentia A F E B G sit locus nobilissimus ad binas & binas rectas in eadem ratione existentes.

Phrasi geometricâ. Si à duobus punctis C, D, ad idem aliud punctum E duæ rectæ inclinentur C E, D E, in data ratione inæqualitatis existentes: erit tertium illud punctum E ad cujusdam circuli circumferentiam.

Omninò, quot proprietates habet magnitudo aliqua, modò proprietates ipsæ magnitudini conveniant, non autem punctis quibusdam tantùm numero definitis: tot modis ipsa magnitudo locus esse potest; ita ut si infinitæ numero sint tales proprietates ad aliquam magnitudinem pertinentes, etiam infinitis modis, talis magnitudo locus esse possit. Sed & uniuscujusque modi locus denominationem sortietur à proprietate illa, respectu cujus ipse locus est.

Sic, in quinque allatis exemplis, propter quinque nobilissimas circuli proprietates, quinque etiam modis circumferentia illius locus esse ostenditur. At cùm innumeræ aliæ sint ipsius circularis figuræ proprietates, quarum unaquæque in suo genere eximia est, sequitur ut innumeris etiam modis circum-

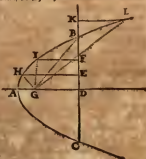
ferentia circuli locus esse queat: at nos quid sit locus geometricus indicare tantùm atque exemplis quibusdam illustrare decrevimus, non autem integrum eorum tractatum instaurare: itaque paucis aliis exemplis alterius generis locorum ad præcedentia additis, ad id quod propositum est accedemus.

In sexto ergo exemplo. Esto parabola A B, cujus diameter sit A C, vertex A, atque ad diametrum ordinatim applicata sit quævis recta BC, & latus rectum ponatur esse D. Notum est ergo ex conicis, quadratum rectæ B C æquale esse rectangulo contento sub latere recto D, & sub rectâ A C, quæ ex diametro inter verticem A & applicatam B C intercipitur, sive diameter illa sit axis, sive alia quæcunque. Itaque ordinatim applicata B C, quæcunque illa sit, media proportionalis est inter latus rectum D & portionem diametri A C. Ac proinde parabola quævis locus esse potest ad medias proportionales, quarum altera extremarum sit semper eadem.

Phrasi geometricâ. Rectâ lineâ quacunque expositâ A C quæ indefinita sit, atque signato in ea quocunque puncto A; item aliâ rectâ quavis D, longitudine datâ, & dato angulo quocunque E, si in priori recta sumatur quodcunque punctum C ad unas partes ipsius A, & educatur recta C B in angulo A C B qui æqualis sit angulo E, & punctum B sit semper ad unas partes rectæ A C, ipsa autem B C media sit proportionalis inter expositam D & portionem A C: erit punctum B ad parabolam.

Quòd si plures sint in eadem parabola ordinatim ad eandem diametrum applicatæ, putà B C, F G, inter quas à vertice A interceptæ sint portiones diametri A C, A G: erunt hæ portiones A C, A G, inter se longitudine, ut applicatæ potentiâ; hoc est, erit quadratum BC ad quadratum F G ut recta A C ad rectam A G; quo pacto parabola erit locus ad quadrata rectis lineis proportionalia, quod satis ex dictis patet.

In septimo exemplo. Esto rursus parabola B A C, cujus diameter A D, atque ad ipsam diametrum ordinatim applicata sit recta B D C; sumpto autem in ipsa parabola quovis puncto H, ducatur recta H E parallela diametro A D, occurrens ipsi B C in puncto E. Erit ergo ut recta A D ad rectam H E, ita rectangulum B D C ad rectangulum B E C. Similiter, sumpto in eadem parabola alio quovis puncto I, & ductâ rectâ I F parallelâ ipsi A D vel H E, erit quoque recta A D ad rectam I F, ut rectangulum B D C ad rectangulum B F C, & recta H E ad rectam I F erit, ut rectangulum B E C ad rectangulum B F C: atque ita de reliquis similiter ductis. Unde parabola erit locus ad rectas lineas rectangulis proportionales.



Phrasi geometricâ. Si expositâ quacunque rectâ B C, sumptisque in ea quotcunque punctis D E F &c. educantur ad easdem partes ipsius rectæ B C aliæ rectæ totidem terminatæ D A, E H, F I &c. atque omnes inter se parallelæ,

fintque rationes eductarum eædem cum rationibus rectangulorum quæ sub portionibus rectæ primò expositæ continentur, quæ quidem portiones sumantur à singulis punctis eductarum usque ad extrema B, C, prout singula puncta singulis eductis respondent: erunt reliqua eductarum puncta extrema A, H, I, &c. ad parabolam.

Quòd si recta B C ordinatim applicata producatur in directum extra parabolam ex quacunque parte versùs B vel C quantùm quisquis voluerit usque in K, & ducatur recta K L prædictis A D, H E, I F, &c. parallela, quæ parabolæ etiam productæ occurrat in L, sed ad alteras partes ipsarum A D, H E, I F, &c. tunc quoque erit recta A D ad rectam K L ut rectangulum B D C ad rectangulum B K C, atque ita de reliquis.

Nec ideo phrasis geometrica à præcedenti diversa est, nisi in eo tantùm quod rectæ K L, A D, sunt ad diversas partes ipsius B C; quandoquidem sic exigit loci natura.

Neque etiam refert an rectæ A D, H E, I F, K L, &c. sint perpendiculares ipsi B C, vel ad illam obliquæ; hoc enim vel illo modo semper verum erit quod proponitur.

In octavo exemplo. In alterutra figurarum præcedentium ponatur recta A D esse axis parabolæ, ad quam ideo perpendicularis sit ordinatim applicata B C, existentibus angulis A D B, A D C rectis; sitque in axe A D producto, si opus sit, focus G, à quo ad puncta H, I, B, L, &c. quæcunque in parabola existunt, ducantur totidem rectæ G H, G I, G B, G L, & reflectantur aliæ rectæ H E, I F, L K ad quamvis ordinatim applicatam B C quantùm satis productam, perpendiculares: tunc verò (eximia sanè parabolæ proprietas) quævis ducta G H cum sua reflexa H E, æqualis erit cuivis alii ductæ G I cum sua reflexa I F &c. Siquidem reflexæ ipsæ respectu ipsius B C, omnes sint ad partes verticis A, & summa cujusvis talis ductæ cum sua reflexa, putà summa G H E, æqualis erit summæ ambarum G A D, sive uni rectæ G B quæ sola ducta est, cui nulla convenit reflexa respectu ordinatæ B C. Quòd si ductæ quædam, ut G L &c. suas reflexas L K &c. habeant ad alteras partes verticis A respectu ordinatæ B C: tunc differentia inter ductam G L & reflexam L K æqualis est eidem G B. Erit ergo parabola locus ad quotcunque rectas ab eodem puncto ductas, atque à parabola ad eandem aliquam aliam rectam perpendiculariter reflexas, ita ut summa vel differentia cujusvis ductæ & suæ reflexæ æqualis sit alicui datæ rectæ lineæ.

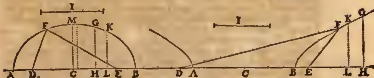
Phrasi geometricâ. Expositâ quacunque rectâ lineâ indeterminatâ B C, signatisque in ea duobus punctis B, C, atque ad eandem erectâ perpendiculari rectâ quadam longitudine datâ A D, existente puncto D in ipsa B C; sumpto etiam quocunque puncto G in eadem A D: si ductâ quâcunque rectâ G H ad partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam B C in punctum E inter puncta B, C, summa ambarum G H E æqualis sit datæ alicui rectæ: vel si ductâ quâcunque rectâ G L ad alteras partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam B C in punctum K ultra puncta B, C, differentia ambarum G L, L K, æqualis sit datæ alicui rectæ, ei scilicet cui summa G H E æqualis est: punctum reflexionis H, vel L, erit ad parabolam cujus ipsum punctum G erit focus; recta A D, axis; & recta A G erit quarta pars lateris recti.

Talis

Talis verò locus parabolicus ad specula ustoria pertinet. Nam si assumatur pars concava B A C, & radii solis sint rectæ F I, E H, &c. qui ad sensum sunt paralleli; illi ad puncta I, H, &c. reflectentur à forma parabolica, & reflexi concurrent ad focum G; ubi si speculum sit satis amplum, & sol in debita dispositione, intensissimus calor excitabitur. Hoc autem ideò fit, quia si per punctum I duceretur recta parabolam tangens, tunc rectæ F I, G I, ad ipsam tangentem angulos æquales constituerent: eorum autem angulorum alter esset angulus incidentiæ, alter autem angulus reflexionis, atque ita de reliquis ad alia puncta H, &c. pertinentibus.

Quod si candela in puncto G constitueretur, ejus radii G H, G I, &c. post reflexionem à speculo fierent paralleli, puta H E, I F, &c. atque ita lumen candelæ longissimè produceretur; sed hæc sunt alterius loci.

Nono exemplo. Esto ellipsis vel hyperbola, cujus axis sit A B, centrum C,



vertices autem sint A & B, & foci D, E, quorum D propior sit vertici A, at E sit propior vertici B; atque in sectione sumatur quodvis punctum F, à quo ad focos ducantur rectæ D F, F E. Patet ergo ex conicis, in ellipsi summam ambarum D F E, in hyperbola autem, differentiam ipsarum D F, F E, axi A B æqualem esse. Unde hoc pacto ellipsis locus erit ad summam, hyperbola autem ad differentiam duarum rectarum à duobus certis punctis procedentium & ad idem tertium aliud quodpiam punctum inclinatarum.

Phrasis geometrica, ad imitationem præmissarum, facilis est.

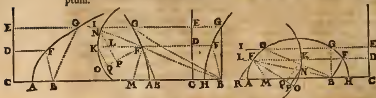
Decimo exemplo. In iisdem sectionibus noni exempli, esto I recta latus rectum suæ sectionis, & recta A B sit quæcunque diameter cui conveniat tale latus rectum, sive ipsa diameter sit axis, sive non, atque ad ipsam diametrum sint ordinatim applicatæ quotcunque rectæ G H, K L, &c. quarum puncta K, G sint in sectione, puncta autem L, H sint in diametro A B quæ in hyperbola producta sit indefinitè. Ergo ex conicis, rectangulum A L B est ad quadratum L K, ut diameter A B ad latus rectum I; item rectangulum A L B est ad rectangulum A H B, ut quadratum L K ad quadratum H G: unde utraque sectio ad utramque talem proprietatem locus est.

Nec phrasis geometrica difficilis est, modò quis ea quæ superiùs exposita sunt imitari voluerit.

Si A B sit axis, sitque ipsi æquale latus rectum I, vel rectangula ad quadrata sint in ratione æqualitatis; tunc loco ellipsis habebimus circulum, ut in secundo exemplo. At non mutabitur hyperbola, nisi specie tantùm, illa enim in genere semper erit hyperbola; sed hoc casu æqualitatis, assymptoti illius erunt inter se ad angulos rectos, cùm in ratione inæqualitatis illæ assymptoti sint ad angulos obliquos; sed hæc omnia ex conicis manifesta sunt.

Undecimo exemplo. Esto quæcunque sectio conica, cujus axis A B, vertex A, & focus B; atque producto utrinque axe, sumatur in eo ultra verticem punctum C, ita ut, in parabola quidem, recta A B æqualis sit rectæ A C, in hyperbola verò ipsa A B major sit quàm A C, in ea scilicet ratione quam habet distantia focorum ad longitudinem axis inter vertices sectionum op-

positarum intercepti; at in ellipsi, A B minor sit quàm A C, in ea rursùs ratione quam habet distantia focorum ad axem ellipsis inter vertices interceptum.



Hæc autem utraque ratio est ea quam in figuris noni exempli habet recta D E ad rectam A B; tum ex C excitetur C D perpendiculariter ad C B, eademque C D indefinitè utrinque producatur. His positis, sumantur in sectione quotcunque puncta F, G, &c. à quibus ducantur totidem rectæ D F, E G, &c. ipsi B C parallelæ quæ occurrant rectæ C D in punctis D, E, &c. ac randem jungantur rectæ B F, B G, &c. ac tunc erit ut B A ad A C, ita B F ad F D, vel B G ad G E, atque ita de reliquis: unde quævis trium illarum sectionum locus est ad pulchetrimam illam proprietatem.

Phrasi geometrica. Expositis duabus rectis C B, C D ad angulum rectum constitutis, signato in altera illarum unico puncto B quod à puncto C diversum sit, in altera verò sumantur quotcunque puncta D, E, &c. à quibus ductæ sint rectæ F D, G E, &c. ipsi C B parallelæ, quæ in punctis F, G, &c. inclinentur ad punctum B, & sint rationes B F ad D F, B G ad E G, &c. omnes inter se eædem: puncta F, G, &c. erunt omnia in una eademque sectione conica, cujus punctum B focus erit.

Hujus propositionis, in parabola quidem, unicus est casus, quia in ea unicus est focus, & vertex unicus; at in hyperbola atque in ellipsi, quia in utraque duplex est focus B, M, & vertex duplex A, H: ideò in unaquaque ex illis sectionibus, quadruplex est casus, duo quidem respectu unius focorum propter duplicem verticem, & duo respectu alterius focorum propter eundem duplicem verticem. At quoniam id quod de uno ex istis focis verum est, verum quoque est de altero similiter considerato; ideò ad explicandos istos casus sufficiet, si unum focorum, putà B, assumpserimus.

Ille ergo focus B necessariò propior est uni verticum quàm alteri. Esto vertex propior H, remotior autem esto A. Itaque, sive puncta F, G. &c. sint prope verticem remotiorem A, sive eadem puncta F, G sint prope verticem propiorem H, semper vera est propositio, nempe B F rectam esse ad rectam F D sibi conterminam ad punctum F, ut recta B G ad rectam G E sibi conterminam ad punctum G. Hinc verò quædam deduci possunt consequentiæ quæ apud Apollonium in suis conicis non reperiuntur, nec tamen forsan illis cedunt quas ipse habet ibidem, qualis est hæc. In hyperbola, summa ambarum B F, B F, suprà diversos vertices A, H tendentium, & ad eandem rectam F F axi A H parallelam pertinentium, se habet ad ipsam F F, ut recta B M, quam distantiam focorum esse supponimus, ad axem A H. In ellipsi, differentia earumdem B F, B F ad eandem F F, se habet ut distantia focorum B M ad axem A H; ac proinde in hyperbola, summa ipsarum B F, B F est ad summam B G, B G, ut recta F F ad rectam G G. In ellipsi, differentia ipsarum B F, B F est ad differentiam B G, B G, ut recta F F ad rectam G G; atque ita de multis aliis quas consultò omittimus, quia id tantùm, quid sit locus geometricus, declarare, atque exemplis quibusdam illustrare intendimus.

Illud tamen minimè prætereundum putamus quod ad Dioptricam perti-

tinet, nec ita pridem innotuit, nempe talem proprietatem sumptam in ratione inæqualitatis, ad refractiones pertinere, atque illis esse specificam, ad hoc ut radii omnes qui ante refractionem erant ejusdem ordinis (hoc est vel paralleli, vel ad idem punctum inclinati, sive illi ad ipsum punctum tendant, sive ab eo divergant) iidem post refractionem fiant adhuc ejusdem ordinis, qui tamen ordo diversus sit à priori. Et convertendo. Si superficies quædam refractiva talis sit, ut qui ante refractionem ejusdem ordinis erant radii, iidem post refractionem sint adhuc ejusdem ordinis, sed ab ordine priori diversi: fiet necessariò ut tali superficiei talis conveniat proprietas, quam in hoc undecimo exemplo sectionibus conicis convenire diximus, in ratione tamen inæqualitatis.

Hîc vero in universum tres sunt casus. Primus est, cùm radii qui ante refractionem erant paralleli, post refractionem fiunt adhuc paralleli, sed diverso à priori parallelismo; qui quidem casus ad sola refractiva plana pertinet, nec admodum utilis est. Secundus casus est, cùm radii qui ante refractionem erant paralleli, post refractionem ad idem punctum inclinantur; vel contrà, qui ante refractionem ad idem punctum inclinabantur, post fiunt paralleli; qui casus ad ellipsim pertinet atque ad hyperbolam, quibus proprietas illa convenit in ratione inæqualitatis, non autem ad parabolam, cui ipsa convenit in ratione æqualitatis. Tertius casus est, cùm radii qui ante refractionem ad unum punctum inclinabantur, post refractionem ad unum aliud punctum inclinantur; qui casus aliquando ad superficiem sphericam pertinet, sed in aliquo tantùm casu admodùm particulari, aliàs enim ac multò magis universaliter, ipse pertinet ad alias superficies de quibus in exemplo sequenti dicturi sumus.

Quomodò autem secundus casus ad ellipsim pertineat vel ad hyperbolam, aut, quod universalius est, ad superficiem spheroïdis vel conoïdis hyperbolici, quæ superficies ab ipsis ellipsi vel hyperbolâ circa suos axes conversis gignuntur: non inutile erit hoc loco declarare. Posthàc enim, sequenti exemplo, quomodò tertius casus ad alias superficies pertineat, aperiemus.

In figura ellipsis vel hyperbolæ undecimi hujus exempli, sumpto in sectione quovis punctо F, quâ parte illa sectio magis distat à foco B, eademque vertici A propior est, & factâ constructione ut ibidem, producatur recta DF ad partes F utcunque in L, tum circa axem AH intelligatur circumvoluta sectio, ut habeatur sphæroïdes, vel conoïdes hyperbolicum, ad cujus formam perficiatur perspicillum vitreum vel crystallinum, vel ex aliqua ejusmodi materia quæ aëre densior sit, & radios ab ipso aëre in eandem obliquè incidentes refringat; & ratio inter aërem & talem materiam, quòd ad rarefactionem & condensationem spectat; sive, ut vulgò jam loquimur, ratio refractionis inter aërem & ipsam materiam, eadem sit ei rationi quæ est inter rectas BA, AC; sive inter rectas AH, BM; conferendo semper majorem terminum rationis ad minorem, dum confertur corpus rarius ad densius: (quid sit autem ratio refractionis inter duo corpora diversæ densitatis, jamjam explicabimus) dico quod in tali perspicillo, si radius incidentiæ sit LF, qui axi AH parallelus est, idemque progrediatur ab L ad F, frangetur radius ille in F, & fractus inclinabitur ad punctum B. Quòd si radius incidentiæ sit BF progrediens à punctо B, ille frangetur in F, & post fractionem fiet radius FL axi HA parallelus. Nam in refractione, sicuti & in reflexione, progressus cujusvis radii, & regressus ejusdem, fiunt per easdem lineas: atque omninò quævis species visibilis eundo & redeundo idem servat iter.

Quoniam ergo ponimus superficiem sphæroïdis vel conoïdis hyperboli-

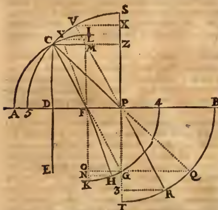
Nn ij

ci, exhibere nobis perſpicillum ipſum à quo radii refringuntur in ingreſſu vel in egreſſu ejuſdem ſuperficiei; & ſuperficies illa duplici modo accipi poteſt, primo quidem prout convexa eſt, ita ut convexitas pertineat ad corpus denſius; ſecundo prout concava eſt, ita ut cavitas pertineat ad idem corpus denſius: ſciendum eſt nos de priori modo jam locutos eſſe: quod ſi de ſecundo modo loquamur, contrarium accidet: nam ſi radius incidentiæ ſit F F axi parallelus, atque ipſe radius à parte foci remotioris B incidat in ſectionem cujus vertex eſt A, is poſt refractionem in puncto F, fiet radius F I qui diverget tanquam ſi ab ipſo foco remotiore B profectus ſit, eritque in directum cum recta linea B F. Si autem radius incidentiæ ſit I F, qui ad focum B inclinatur, is poſt refractionem fiet F F axi parallelus.

In his duobus modis manifeſtum eſt ſphæroïdem à conoïde hyperbolico in eo differre, quod priori modo radius L F in conoïde ſit intra denſum corpus, & F B intra rarum; in ſphæroïde autem, L F ſit intra rarum & F B intra denſum: at ſecundo modo, è contrario in conoïde radius L F ſit in raro, & F B in denſo; in ſphæroïde autem, L F ſit in denſo, & F B in raro.

Jam quid ſit ratio refractionis inter duo corpora diaphana diverſæ denſitatis, putà inter aërem & vitrum, ſic explicabimus.

Eſto A B ſuperficies communis duorum corporum propoſitorum; ſitque rarius, putà aër versùs partem ſuperiorem C; denſius autem, putà vitrum, ſit versùs partem inferiorem E: & ſumpto in rariori, quovis puncto C, progrediantur ab eo quotcunque radii C D, C F, C P &c. eadentes in ſuperficiem A B, in punctis D, F, P, &c. per quæ ingrediantur in vitrum: ex iis autem radiis, C D perpendicularis ſit ad illam ſuperficiem; cæteri autem obliqui, ita ut C F minùs obliquus ſit quàm C P. Omnes ergo, præter C D frangentur in ingreſſu vitri, at C D ſolus rectà ſine fractione tranſibit ad E. Jam cujuſvis aliorum, putà ipſius C F, fractio ſic ſe habebit: Centro F & intervallo F C deſcribantur duo circuli quadrantes A C I quidem intra aërem, K G 4 autem intra vitrum, ita ut recta I F K ſit diameter ad ſuperficiem A B perpendicularis, & quadrantes habeant angulos A F I, K F 4 rectos, ad verticem oppoſitos; quo pacto illi jacebunt in eodem plano, eruntque ſibi invicem oppoſiti. Producatur in directum recta C F intra vitrum uſque ad circumferentiam quadrantis in G.



Si igitur radius C F fractus non eſſet in F, ille rectà progrederetur in G; at propter fractionem ſit contrà, ut deviet ab ipſa rectitudine C F G, fiatque C F H ex duabus rectis C F, F H angulum obtuſum ad F conſtituentibus, ſic ut intra aërem angulus inclinationis C F I major ſit quàm angulus H F K qui eſt quoque angulus inclinationis intra vitrum; hic enim inclinationem

nationem radiorum mensuramus per angulos quos illi faciunt cum perpendiculari erecta à puncto incidentiæ, & hi anguli respectu ejusdem radii fracti, majores sunt intra rarum quàm intra densum.

Præterea producatur in directum recta H F ultra centrum F usque ad circumferentiam in Y; atque à quatuor punctis C, Y, G, H in circumferentia existentibus, cadant in rectam I F K totidem perpendiculares C M, Y L, G O, H N, ex quibus duæ majores C M, G O inter se æquales erunt, sicuti & duæ minores Y L, H N inter se. Ratio ergo quam habet utravis majorum ad utramvis minorum, ea est quam vocamus rationem refractionis ab aëre ad vitrum, putà ratio C M ad H N vel ad Y L; & convertendo, ratio minoris ad majorem, putà H N ad C M vel ad G O, vocabitur ratio refractionis à vitro ad aërem; ac universaliter major ratio vocatur ratio refractionis à rariori ad densius; minor autem, ratio refractionis à densiori ad rarius.

Et hæc quidem ratio respectu duorum eorumdem corporum nunquam mutatur, sed eadem semper manet per omnes radiorum in superficiem communem incidentium inclinationes, ut constanti experientia comprobatur: neque enim hoc, cùm à corporum natura pendeat, aliter haberi potuit quàm ab experentia, ex qua tale Dioptricæ fundamentum longè præcipuum atque nobilissimum depromptum est.

Sed esto in eandem superficiem A B alius radius C P priori C F obliquior; ac centro P, intervallo P C describantur ut priùs duo circuli quadrantes 5 C S, T Q B prior in aëre, posterior in vitro, ambo ad verticem oppositi, atque in eodem plano jacentes, & communem diametrum habentes rectam S P T quæ ad planum A B perpendicularis existat; hic autem radius C P frangatur in P, & post fractionem abeat in R, ita ut angulus inclinationis C P S intra rarum major sit angulo inclinationis R P T intra densum; producatur quoque C P in directum in Q, & R P producatur in directum in V, sintque puncta 5, C, V, S, T, R, Q, B in eadem circuli circumferentia, in cujus diametrum S P T cadant quatuor perpendiculares C Z, Q G, R 3, V X, quarum duæ majores C Z, Q G sunt inter se æquales, sicuti & duæ minores R 3, V X inter se. Rursùs ergo, ratio cujusvis majoris ex quatuor illis perpendicularibus ad quamvis minorem, putà ratio C Z ad R 3 vel ad V X, est ratio refractionis à raro ad densum; & ratio cujusvis minoris ad quamvis majorem, est ratio refractionis à denso ad rarum, putà R 3 ad C Z vel ad Q G; & hæ rationes eædem sunt cum præcedentibus C M ad H N, vel H N ad C M, &c.

Tale autem fundamentum refractionis ad prædictas sectiones ellipsim & hyperbolam sic accommodatur. Sumpto in quavis illarum sectionum puncto F, & facta constructione omninò ut suprà, ac posito quòd sectionis species talis sit ut ratio axis A H ad distantiam focorum B M, sit ratio refractionis à raro ad densum in ellipsi, & à denso ad rarum in hyperbola, inter duo corpora proposita aërem & vitrum; ducatur recta F R quæ sectionem tangat in F; tum recta F O ipsi tangenti perpendicularis, atque adeo perpendicularis quoque ipsi sectioni, quæ quidem F O utrinque producatur indefinitè, sed hoc loco speciatim, ad partes concavas sectionum; deinde centro F & intervallo quocunque F O, describatur circuli quadrans cujus arcus secet rectam F L in K, & rectam B F in N; & à punctis K, N in rectam F O deducantur perpendiculares K Q, N P: demonstrabitur ex natura conicorum, harum perpendicularium K Q, N P rationem eandem esse cum ratione axis A H ad distantiam focorum B M, ac proinde esse rationem refractionis inter duo corpora proposita aërem & vitrum. Posito ergo quòd L F in ellipsi, in hyperbola autem K F sit radius incidentiæ, erit F B

Vide figuras præcedentes pag. 142.

Oo

radius refractionis; & contrà, si B F sit radius incidentiæ, erit L F in ellipsi, & K F in hyperbola, radius refractionis.

Cætera quæ plurima sunt, minutatim persequi, Dioptricæ sunt partes; nobis verò qui de locis agimus hoc ostendendum restat, cur tale argumentum, quod manifestò ad Diopricam pertinet, hoc loco attigerimus.

Id ergo ostendere voluimus, non solùm in rebus purè geometricis locorum geometricorum vim cerni posse, sed etiam in aliis Matheseos partibus quæ objectum suum à Physica mutuantur, modò talis objecti actiones per lineas geometricas producantur: quod sanè radiis specierum visibilium accidere satis superque notum est. Idem autem in Mechanica locum habere facilè ostenderetur; atque etiam in Astronomia: sed istam segetem, quia ad hanc materiam directè non spectat, alio tempore metendam relinquamus.

Porrò, si quis phrasi dioptricâ uti voluerit in enuntiando ejusmodi loco dioptrico, is hoc modo loqui poterit.

Si perspicilli alicujus superficies, radios omnes parallelos in eam incidentes sic refringat ut ad idem punctum inclinentur: vel si omnes radios ad idem punctum inclinatos, parallelos efficiat, talis superficies erit superficies sphæroïdis, vel conoïdis hyperbolici, & punctum inclinationis erit focus ab ipsa superficie remotior, qui autem paralleli erunt radii, iidem & axi ipsius superficiei erunt paralleli, sed & axis ipse inter vertices interceptus, ad distantiam focorum eam rationem habebit quæ est ratio refractionis inter corpus ex quo fit illud perspicillum, & medium diaphanum per quod transeuntes radii in tale perspicillum incurrunt.

Duodecimo exemplo. Ostendamus quomodò tertius ille casus de quo undecimo exemplo locuti sumus, & quem hùc remisimus, aliquando ad superficiem sphæricam, sed multò magis universaliter ad alias superficies pertineat, quas antiquis notas fuisse nullibi apparet.

Sunto ergo in figuris sequentibus, duo puncta A, B; & quæratur perspicillum quod radios ad punctum A inclinatos sic refringat, ut post refractionem iidem ad punctum B inclinentur. Et quidem jam monuimus perinde esse, sive radii ad punctum A convergant, sive ipsi radii à puncto A divergant, utroque enim modo, eosdem dici ad punctum A inclinari: quod idem de quocunque alio puncto B &c. intelligi debet, ne quis circa ea quæ dicta sunt, vel quæ dicenda sunt, hærere possit.

Hinc ergo quadruplex casus particularis oriri potest. Vel enim radii ab uno punctorum A, B, divergentes, sic refringendi sunt ut post fractionem iidem ad alterum convergant; vel radii ab uno punctorum A, B divergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero divergant: vel radii ad unum punctorum A, B, convergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ad alterum convergant; vel denique radii ad unum punctorum A, B convergentes, sic refringendi sunt, ut post refractionem ab altero divergant.

Et quidem omnes illi quatuor casus differunt inter se perspicillis duplici modo inter se diversis. Priori modo, cùm perspicilla ipsa diversi sunt generis, quòd ad formam sive figuram spectat: quemadmodum diversi sunt generis sphæroïdes, & conoïdes de quibus undecimo exemplo egimus. Posteriori modo, cùm talia perspicilla differunt tantùm secundùm convexum & concavum, prout scilicet hoc vel illud ad corpus densius pertinet, vel ad rarius.

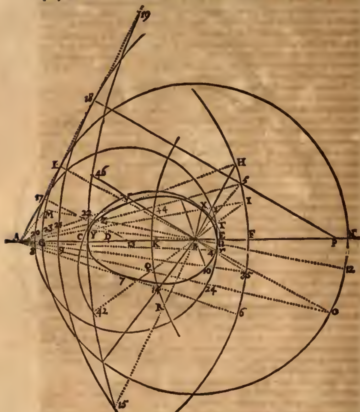
Verùm, in universum, eorum omnium constructio non multò magis diversa est quàm constructio ellipsis à constructione hyperbolæ, quam suprà initio undecimi exempli ostendimus differre tantùm secundùm rationem

majoris inæqualitatis, & rationem minoris inæqualitatis. Dicamus ergo breviter de ejusmodi constructione, ut appareat ipsam ad quosdam eosque pulcherrimos geometriæ locos pertinere.

Sunto ergo puncta A, B data, oporteatque in plano figuram describere, quâ circa rectam A B circumvolutâ, gignatur forma ad perspicillum apta, ita ut radii à puncto A divergentes, quotquot in perspicillum ipsum incidecint, refringantur ad punctum B. Ex duobus autem mediis diaphanis per quæ radii sive species transibunt, alterum, idemque rarius sit aër; alterum autem, idemque densius esto vitrum, atque inter illa duo corpora ratio refractionis data sit.

Ducatur recta A B, quæ indefinitè producatur ultra B versùs E (ad alteras enim partes versùs A inutile fuerit) ac inter puncta A, B, sumatur quodvis punctum C in recta A B, quod punctum C futurum sit vertex figuræ planæ quæsitæ, quæ ad ovalem formam apprimè accedet, caret tamen ad-

hue speciali nomine, propiereaquòd ipsa geometris hucusque ignota fuisse apparet. Nec multùm refert an vertex ille C puncto A, an verò puncto B propior sit; hoc enim liberum est, quamquam ad praxim utilior futurus sit,



si ad punctum A magis accedat. Posito autem hoc primo ac præcipuo vertice C ex arbitrio, jam vertex alter E à puncto A remotior erit, immò ultra punctum B in recta AB producta; neque ex arbitrio pendebit illud punctum E, sed illius positio ex prædeterminatis sic habebitur. Fiat ut summa terminorum (id est antecedentis & consequentis simul) eorum inter quos ratio refractionis consistit, ad eorumdem differentiam, ita recta CB ad BE, & habebitur secundus vertex quæsitus E; fietque ut si ex CB secetur CD æqualis ipsi BE, tum recta CE quæ axis erit futuræ ovalis, sit ad rectam BD in ratione refractionis à raro ad densum; fiat quoque BE ad EF in eadem sed inversa ratione nempe ut BD ad CE; & ut CE ad BD, ita AF ad BG, sed punctum F sit in recta AE producta ultra E, punctum autem G è contrario

trario sit propè A. Tum centro A intervallo A F describatur circulus F H, (sufficiet aliqua hujus circuli portio) & centro B intervallo B G alius circulus integer G M L N O, quem tangat recta A L in puncto L, à quo ducatur diameter L B O quæ angulum A L B rectum constituet; ducatur quoque recta B H ipsi A L parallela, sive ad L B perpendicularis, ita ut anguli recti A L B, L B H sint alternatim oppositi, & recta B H occurrat circumferentiæ F H in puncto H, & jungatur recta A H secans B L in puncto V: hæc A H determinabit portionem circuli F H quæ ad propositum nostrum utilis erit, sed & eadem A H tanget ovalem describendam in puncto V, & ratio B V ad V H erit ratio refractionis ut B E ad E F, sicuti & L V ad V A. Jam constructio ovalis per puncta talis erit.

Sumpto in arcu F H quocunque puncto I, ducatur recta A I, in qua tale reperiatur punctum X, ut ductâ rectâ B X, ratio hujus B X ad X I sit ratio refractionis ut B E ad E F, sive ut B V ad V H; sic enim punctum X erit in ipsa ovali. Et quia in eadem recta A I aliud reperiri potest punctum Y, ad quod si ducatur recta B Y, erit quoque B Y ad Y I in eadem ratione refractionis: tale punctum Y ad eandem ovalem adhuc pertinebit. Quoniam autem recta A I ducta est utcunque, si multæ ducantur eodem modo ad quotlibet puncta in arcu F H assumpta, habebuntur simili constructione in singulis ex illis rectis, duo puncta ad ovalem pertinentia. Inventis ergo hac ratione quotcunque punctis per quæ ipsa ovalis transire debet, describetur illa ut describi solent multæ lineæ curvæ per quotlibet puncta inventa per quæ linea illa transire debet.

Porrò, ex tali constructione methodus non inelegans deduci potest quâ ipsa ovalis motu aliquo continuo describeretur, nec machina ad talem descriptionem requisita, quamquam satis composita, admodum difficilis esset, nec unico modo perficeretur, immò forsan innumeris: at verò hæc ad organicam potius pertinent, nos autem de locis geometricis hic agimus.

Patet ergo talem ovalem locum esse ad rectas in ratione data existentes; siquidem B E ad E F, B X ad X I, B Y ad Y I, B V ad V H, &c. sunt semper in eadem ratione, nempe in ratione refractionis à denso ad rarum.

At phrasi geometricâ sic loquemur. Expositâ quâcunque rectâ A B indefinitâ, signatisque in ea duobus punctis A, B, ac descripto centro A & intervallo A F majori quàm A B, circulo F I H, ductâque ad ejus circumferentiam quâcunque rectâ A I quæ sic secetur in X, ut ratio rectæ B X ad X I data sit, sed minoris inæqualitatis: erit punctum X ad lineam quampiam alicujus generis quod nec ad rectas nec ad conicas pertinet, & tamen ad Dioptricam utile esse poterit.

Quomodò autem, & quando ejusmodi ovalis Dioptricæ inserviet, sic declarabimus. Ad hoc sanè duæ conditiones præcipuæ requiruntur. Prima est, ut ratio data B X ad X I sit ratio refractionis à denso ad rarum inter duo corpora diaphana per quæ radius opticus sive species visibilis transire debet. Secunda, ut datis duobus punctis A, B, semidiameter A F non sit cujuscunque longitudinis, sed illa major quidem sit quàm A B, at minor quàm ea recta ad quam A B habet rationem refractionis à denso ad rarum, sequàm B E ad E F; ut sic postquàm factum fuerit ut F E ad E B, ita F A ad B G, ipsa B G minor sit quàm A B; nam his conditionibus aut altera earum deficientibus, describeretur quidem aliqua linea curva, sed quæ ad Dioptricam inutilis esset: cùm autem aderunt illæ conditiones, tunc usus illius in Dioptrica talis erit.

Duæ quidem sunt partes ejusmodi curvæ. Prior ac præcipua est ea quæ existit circa verticem C usque ad duo puncta contactus V, 7; posterior est reliqua circa alterum verticem E usque ad eosdem contactus: sed hæc poste-

rior pars inutilis est, prior verò facit ut existente corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpolito, putà vitro cui alterum corpus rarius undique contiguum sit, putà aër qui vitrum ambiat; radii omnes à puncto A procedentes, atque in superficiem V C 7 incidentes refringantur præcisè in punctum B; atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem superficiem V C 7 incidentes refringantur præcisè in A: qua ratione primo casui particulari ex quatuor præmissis factum est satis. Sic, si radius incidentiæ in raro sit A Y, radius refractionis in denso erit Y B; atque è contrario, si radius incidentiæ in denso sit B Y, erit radius refractionis in raro Y A.

Quòd si corpora permutentur, ut rarius sive aër contineatur sub forma ovali proposita, densiore sive vitro ipsum coarctante: tunc radii omnes qui intra densum dirigebantur versùs punctum B, incidun tque in superficiem V C 7, sic refringuntur, ut intra rarum divergant, tanquam si à puncto A progrediantur. Atque è contrario, radii omnes qui intra rarum ad punctum A convergebant incidun tque in eandem superficiem, sic refringuntur intra densum, ut divergant tamquam si à puncto B progrediantur. Sic radio incidentiæ existente L V, M Z, fiet radius refractionis V H, Z 5; & è contrario, existente radio incidentiæ H V, 5 Z, fiet radius refractionis V L, Z M; hoc autem pacto satisfecimus quarto ex quatuor casibus particularibus.

Alio modo, nec minus eleganti, describi potest ejusmodi ovalis per puncta, beneficio circuli G M L N O superiùs descripti. Ducatur enim ab ejus centro B ad illius circumferentiam ex utraque parte, quæcunque diameter L B O, in qua producta si opus sit, inveniatur tale punctum V, ut ducta recta A V sit ad V L in ratione refractionis, sed à raro ad densum; (in priori constructione, B X ad X I habebat eandem rationem, sed inversam, quippe à denso ad rarum) sic enim rursùs punctum V erit ad eandem ovalem. Simili modo, si in eadem diametro L B O productâ si opus sit, inveniatur punctum aliud 4, ita ut ducta recta A 4 sit ad 4 O in eadem ratione refractionis à raro ad densum ut A V ad V L, sive ut F E ad E B, erit punctum 4 ad ovalem. Quòd si ducantur aliæ quotcunque diametri per centrum B, sed diversæ à diametro L B O, putà M B 11, &c. habebuntur simili constructione in unaquaque duo puncta, putà Z, 11, &c. ac per omnia illa puncta ducetur ovalis.

Nec admodùm difficile erit invenire ex tali constructione motum aliquem continuum qui ipsam ovalem uno tractu perficiat; quod rursùs ad Organicam pertinet.

Mirum autem est quanta in præmissa ovali sit locorum geometricorum seges; nec verò qualiumcunque, sed talium qui inter elegantissimos annumerari possint & debeant. Lubet ergo ex amplissima illa messe spicas aliquas selectiores metere, ex quibus geometræ de tota judicium ferre possint.

In prima ergo constructione diximus B X esse ad X I in ratione refractionis à denso ad rarum. Quòd si ergo, ductâ utcunque semidiametro A I, quæratur in ea punctum X quod ad ovalem esse debet: manifestum est in triangulo B X I (intellige ductam esse rectam B I) dari basim B I, angulum I, & rationem laterum B X, X I. Quia etiam infinitæ sunt semidiametri, putà A 35, A H, &c. manifestum est quoque infinita esse talia triangula B 10 35, B V H, &c. in quibus omnibus basis data est unà cum angulis qui sunt ad puncta 35, H, &c. & ratione laterum, quæ semper est ratio refractionis à denso ad rarum. Jam ergo eò deducta est quæstio, ut omnium illorum triangulorum inveniantur vertices X, 10, V, &c. Et quidem tale problema vulgare est; at in praxi proposita, si constructio illius

toties repetenda esset quot sunt triangula, sive quot sunt invenienda puncta per quæ ovalis ducenda sit, id sanè & tædiosum esset, & errori valdè obnoxium. Huic ergo difficultati pulcherrimè occurret geometria, exhibendo nobis locos quosdam, nempe circulorum circumferentias quæ brevissimo compendio dabunt puncta quæsita. Sed quoniam loci illi ex vulgari constructione problematis deducuntur, operæ prætium erit ipsam explicare; pendet autem illa ex loco quinti exempli præmissi, hoc modo.

Propositâ basi B I cujusvis ex triangulis, putà B X I, cujus vertex X inveniendus sit; secetur ipsa B I in T, ita ut I T ad T B sit quemadmodum F E ad E B, hoc est in ratione refractionis, ita tamen ut B T sit minor terminus, quandoquidem latus B X debet esse minus quàm X I, atque in eadem ratione. Tum productâ rectâ I B ultra B usque in 42, fiat I 42 ad 42 B in eadem ratione, seceturque bifariam recta T 42 in Q; ac centro Q, intervallo autem Q T, vel Q 42, describatur circulus T X Y 42, qui secabit rectam A I, dabitque in ea punctum X quæsitum: sed & idem circulus dabit in eadem A I punctum Y: erunt ergo illa puncta vertices duorum triangulorum B X I, B Y I, quorum latera erunt in ratione proposita refractionis, ut quidem B X ad X I, ita B Y ad Y I, & utraque ratio est ut B E ad E F, sive ut B T ad T I.

Quòd si super omnibus basibus datis B 35, B H &c. fiat similis constructio; habebuntur hâc vulgari constructione vertices omnium triangulorum. Patet autem in unaquaque ex illis constructionibus dari centrum unum quale est centrum Q, & duo intervalla qualia sunt Q T, Q 42, ad describendos tot circulos quot sunt bases datæ, sive quot sunt centra.

Sed, quod mirum permultis videri possit, omnia illa centra existunt in una eademque quadam circuli circumferentia, qualis est R Q K, quæ secat bifariam axem E C in K; & centrum illius P existit in eodem axe producto ultra E, sic ut ratio F B ad B K eadem sit cum ratione semidiametri A F ad semidiametrum K P: unde respectu duorum circulorum F H, R K, quorum centra sunt A, P, punctum B ad utrumque ex istis circulis est similiter positum: ita ut si per punctum illud B ducatur recta quæcunque I B Q, arcus I F, Q K, qui ad ipsos circulos pertinent, sint similes, ut si unus illorum sit 30. grad. exempli gratia, erit & alter 30. grad. Similiter si ducatur alia recta H B R, erunt arcus H F, R K similes, & punctum R erit centrum respectu basis B H, ad inveniendum verticem V trianguli B V H in recta A H; atque ita de reliquis. Verùm in hac recta A H hoc speciale est (quia ipsa tangit ovalem) quòd circulus centro R descriptus, exhibeat in ipsa unicum duntaxat punctum V in quo circulus ille tangit tantùm rectam ipsam A H, non autem secat, sicuti secant suas rectas reliqui circuli quorum centra sunt in arcu R K, à puncto R ad K.

Manifestum est ergo circumferentiam R Q K centro P descriptam, esse locum ad centra infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum: hæc ergo circunferentia dicatur primus centrorum locus; dabitur enim alius, ut infrà patebit; dicetur etiam aliquando circulus R Q K primus centrorum circulus.

Prætereà, sicuti in basi B I inventum est supra punctum T; sic in unaquaque alia basi putà B 35, B H &c. reperiri potest punctum ipsi T analogum: erunt ergo infinita talia puncta, sicuti numero infinitæ sunt tales bases: at illa omnia existunt in una eademque circuli circunferentia E T 24 8, quæ ovalem tanget in vertice E; centrum autem illius erit punctum 13 in recta E A inter B & A: eritque ut F B ad B E, ita semidiameter F A ad semidiametrum E 13: quo pacto rursùs punctum B ad utrumque circulum F I H, E T 8, similiter positum erit. Sicuti autem ad inveniendum punctum

X verticem trianguli B X I usi sumus intervallo Q T à centro Q ad punctum T in basi B I; sic ad inveniendum punctum 10 verticem trianguli B 10 35, utemur intervallo 44 r à centro 44 in circulo R Q K, ad punctum r in circulo E T 8.

Patet igitur circumferentiam E T 8 centro 13 descriptam, esse locum ad infinita intervalla infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum. Hæc ergo circumferentia dicatur primus intervallorum locus, dabitur enim statim alius, dicetur etiam aliquando circulus E T 24 8, primus intervallorum circulus.

Rursus, quemadmodum in eadem basi B I productâ ultra B, inventum est punctum 42; sic in unaquaque alia basi reperietur punctum ipsi 42. analogum: ac infinita illa puncta existunt in una eademque circuli circumferentia 15 46 42 C quæ ovalem tanget in vertice C; centrum autem ipsius circumferentiæ erit 27 in axe C E producto ultra E; sed in præmissa figura centrum illud 27. nimis remotum esset à reliquis, unde non potuit in ea signari: atque ut suprà, punctum B respectu hujus circuli, similiter positum est ut respectu circuli F I H; quia ut recta F B ad rectam B C, ita est semidiameter A F ad semidiametrum hujus circuli C 27. Quoniam etiam hic circulus terminat intervallum Q 42 æquale intervallo Q T, & intervallum 44 46 æquale intervallo 44 r, & sic de reliquis; dicetur idem, secundus intervallorum circulus; & circumferentia illius, secundus intervallorum locus.

Huc usque ergo habemus quatuor circulos, quorum respectu punctum B similiter positum reperitur, nempe F I H qui primus omnium est; K Q R qui primus est centrorum circulus; E T 8 qui primus est intervallorum circulus; & C 42 46 qui intervallorum secundus est. Atque etiamsi punctum B nullius ex ipsis quatuor circulis centrum existat; tamen quia ipsum in unoquoque similiter positum est, fit ut omnis recta quæ per B ducta circulos omnes illos secat, abscindat ab omnibus quatuor circumferentiis, arcus similes ad axem C E productum utrinque si opus fuerit, terminatos. Sic recta I T B Q 42 abscindit quatuor arcus I F, T E, Q K, & 42 C omnes inter se similes, atque ita de cæteris.

Cur autem fiat ut in uno ex istis circulis centrum P sit ad unas partes puncti communis B; in alio verò centrum 13 sit ad alteras; nulla alia est causa quàm quòd vertices ipsorum circulorum sunt ad diversas partes ejusdem puncti B: sed minima quæque persequi in exemplis, non vacat: hæc enim facilè supplebit vel mediocris geometra.

Suprà dedimus duas nostræ ovalis constructiones per puncta, quarum prior utebatur circulo F I H ad determinandas triangulorum bases B I, B H, &c. Posterior verò utebatur circulo G M L N O ad determinandas aliorum triangulorum bases, putà basim A M trianguli A Z M; basim A L trianguli A V L; basim A O trianguli A 4 O, &c.

Itaque circumferentia prioris horum duorum circulorum F I H dici potest primus basium locus; & circulus dicetur primus basium circulus.

Eodem jure circumferentia posterioris circuli G M L N O dicetur secundus basium locus; & circulus, secundus basium circulus.

Quæcunque autem diximus de primo centrorum loco, ac de primo & secundo intervallorum, referuntur omnia ad primam constructionem; sicuti & primus basium locus. At si ad secundam constructionem respiciamus, ad quam pertinet secundus basium locus G M L N O; tunc respectu illius constructionis dabitur secundus centrorum locus hoc modo.

Primus intervallorum locus E T 24 8 secat axem E C productum inter C & A, in puncto 8. & idem locus tangit rectam A L in puncto 17; sicuti

ex

ex constructione secundus basium locus eandem A L tangit in L; secetur bifariàm recta C 8 in puncto 9; tum centro P (hoc enim commune est centrum tam primi quàm secundi centrorum circuli) intervallo autem P 9, describatur circulus 9 18, qui eandem rectam A L productam ultra L tanget in 18; hic ergo erit secundus centrorum circulus, & circumferentia illius erit quoque secundus centrorum locus; quomodo autem centra secundæ constructionis in tali loco accipiantur, posteà declarabimus. Sed & secundus intervallorum locus 15 42 C tangit eandem rectam A L supra punctum 18 in puncto 19; eritque recta 18 19 æqualis rectæ 18 17, propterea quòd recta 9 8 æqualis est rectæ 9 C.

Quòd autem tres circuli, nempe secundus centrorum, & ambo intervallorum, tangant rectam eandem A L productam quantùm satis, id vi geometriæ deducitur ex constructione illorum, atque ex eo quòd secundus basium circulus eandem tangat ex constructione; sed demonstratio, ut elegantissima est, ita & longissima: nos ergo ipsam cum plurimis aliis relinquimus.

Quoniam itaque quatuor illi circuli, secundus basium, secundus centrorum, & ambo intervallorum, eandem rectam tangunt, habentque omnes centra sua in eadem recta A B producta quantum satis; atque huic rectæ A B occurrit ipsa tangens A L in puncto A; sequitur tale punctum A respectu omnium quatuor illorum circulorum, esse similiter positum. Sed & in omnibus quatuor, erunt distantiæ à puncto A usque ad illorum vertices 8, G, 9, C, semidiametris illorum proportionales: erit quippe recta A 8 ad rectam A G ut semidiameter 13 8 ad semidiametrum B G. Et ut recta A 8 ad rectam A 9, ita semidiameter 13 8 ad semidiametrum P 9: atque ita de reliquis.

Unde si per punctum illud A ducatur quæcunque recta quæ circulos illos omnes secet, auferet hæc ab omnibus similes arcus circumferentiarum, à recta A B usque ad puncta sectionum extensos; putà arcus 8 20, G 23, 9 21, & C 22, inter rectas A B, A V &c.

Dicamus verò nunc quâ ratione secundæ constructionis nostræ ovalis centra in circumferentia 15 9 18, quæ secundus centrorum locus est, accipiantur. Ad hoc autem ducatur à centro B ad secundum basium locum G M L, quævis semidiameter B L, quæ producta perficiat integram diametrum L B O ut suprà; ducanturque tam A L, quàm A O, quarum utraque basis erit, illa quidem trianguli A V L, hæc autem trianguli A 4 O, quorum vertices quæruntur: illi ergo vertices, beneficio talis secundi centrorum loci, sic reperientur. Prima basis A L occurrit illi secundo centrorum loco in puncto 18; & eadem occurrit primo intervallorum loco in puncto 17; secundo autem, in puncto 19: sumetur ergo pro centro punctum 18, pro intervallo, 18 17, vel 18 19, (æqualia enim sunt illa ut suprà notavimus) tale enim intervallum dabit in semidiametro B L, punctum V quæsitum. Sed & hoc speciale est huic puncto V, quòd ducta A V tangat ovalem in ipso V, eò quòd centrum 18 est punctum contactus rectæ A L & secundi loci centrorum. Similiter, si altera basis A O producatur quousque illa ex altera parte versùs O, occurrat tam secundo centrorum loco in puncto 26, quàm ambobus intervallorum, in punctis 24, & 25, dabit illa centrum aliud 26, & duo intervalla æqualia 26 24, & 26 25; quorum illud quod erit 26 24, terminabitur in primo intervallorum loco; (centrum 26, & alterum intervalli punctum 25, in nostra figura, nimis longè distarent à puncto A) tali ergo centro, ac tali intervallo, inveniemus in semidiametro B O, punctum quæsitum 4 in ovali.

Simili modo, si in secundo basium circulo, ducatur diameter M B 12;

huic convenient duæ bases, A M, & A 11, pro triangulis A Z M, A 11 12; (finge triangula illa esse absoluta, quod vitandæ confusionis gratiâ hic factum non est) ac unaquæque ex illis basibus secabit tam secundum locum centrorum, quàm utrumque intervallorum; dabitque in illo quidem centrum, in his verò, intervallum, cujus beneficio, in utraque semidiametro B M, B 12, invenietur punctum Z, vel 11, quæsitum.

In hac verò secunda constructione unicum centrum, putà 18 dat in ovali unicum punctum putà V; quod idem de omnibus aliis verum est; cùm è contrario, in prima constructione unicum centrum Q dederit duo puncta X & Y.

Neque verò prætereundum est quomodo talium locorum beneficio, & centra, & intervalla, ac denique puncta ad ovalem pertinentia facillimè inveniuntur. Quod sanè in prima ex duabus præmissis constructionibus præstitisse sufficiet: hinc enim, quâ ratione eadem methodus ad secundam constructionem accommodari possit, illicò patebit. Quæcunque autem circa tale argumentum dicturi sumus, praxim respiciunt, quæ hoc modo expeditissima, & certissima reddi potest.

Descriptis ergo secundùm præscriptas leges sex circulis sive sex locis ut suprà, duobus quidem basium, duobus centrorum, & duobus intervallorum: assumatur in primo loco basium, quodvis punctum I inter F & H (ultrà enim inutile fore suprà notatum est) & jungatur recta A I, in ea enim reperiri debent duo puncta X, Y, ad ovalem pertinentia: tum arcui F I sumantur duo alii arcus similes, alter K Q in primo centrorum loco, alter E T in primo loco intervallorum: ac sumpto intervallo Q T, & pede circini manente in centro Q, notentur altero pede mobili duo puncta X, Y, in recta A I, ut propositum est.

Verùm, inquiet aliquis, possuntne promptè ac expeditè haberi arcus similes in diversis iisque inæqualibus circulis? Possunt sanè, nec uno modo; sed hic omnium facillimus jure videri possit. Duc quamcunque basim B H (extrema ad extremum punctum H pertinens, in hac prima constructione, reliquis præstat, in secunda constructione, nihil refert) quæ producta quantùm satis, dabit in primo loco centrorum arcum K R; ac in primo intervallorum, arcum E S, qui inter se, & ipsi F H similes erunt. Dividantur omnes illi tres arcus singuli in quotcunque partes æquales, ita tamen ut partes unius sint quoque numero æquales partibus alterius: putà, dividatur unusquisque primùm bifariàm, deinde quælibet pars rursùs bifariàm, atque ita continuè quantùm quis voluerit. Hoc enim pacto, puncta arcus F H terminabunt semidiametros A I, A H, &c. Puncta autem prædictis ordine correspondentia in arcu K R, dabunt centra Q, R &c. ac tandem puncta eodem ordine sumpta in arcu E S, terminabunt intervalla. Cætera sunt facilia, nec est cur in iis immoremur.

Expeditis ut suprà, quæ ad primum & quartum ex casibus particularibus refractionum pertinebant, superest nunc ut reliquis duobus, secundo scilicet & tertio, satisfaciamus: nempe ut explicemus rationem componendi loci qui duobus illis casibus inserviat. Sed antequàm ad rem ipsam veniamus, lubet hîc aliquantisper immorari circa quatuor præcipua puncta figuræ Vide Figur. pag. 148. præcedentis, duo nempe focorum A, B; & duo verticum C, E: ex tali enim consideratione magis elucescet analogia quæ inter casus jam expeditos, & eos de quibus agendum superest, intercedit; quæ quidem analogia ad eorumdem casuum figuras extenditur, habetque aliquid simile ei analogiæ quæ in doctrina conica reperitur inter hyperbolam & ellipsim.

Statuamus primùm ex illis quatuor punctis, duo B, & C, esse immobilia, eademque remanere in eo statu in quo hucusque constituti sunt; at

punctum A (quod primum ac præcipuum est) mobile esse, idemque diversas positiones successivè ad arbitrium obtinere, ac tandem quartum E eatenus mobile esse, quatenus necessitas geometrica id exiget: existant tamen omnia quatuor in una eademque recta linea A B, quæ ad hoc negotium, utrinque indefinitè producatur.

Ergo, respectu puncti B, vel ipsum punctum A erit versùs C, vel versùs E. Et siquidem illud sit versùs C; vel erit intra figuram inter B, C; vel illud erit in vertice C; vel idem erit extra figuram ultra C, ut in figura præmissa; sed ita ut ab ipso puncto C longissimè, immò infinitè distare possit. Rursùs, si respectu puncti B, punctum A sit versùs E; vel illud A erit inter puncta B, E intra figuram; vel illud erit in vertice E; vel idem erit extra figuram ultra E, sic ut ab ipso puncto E longissimè, immò infinitè distare possit. Tandemque illud idem punctum A considerari potest tanquam si puncto B congruat, ita ut ambo simul unicum punctum efficiant.

Incipiamus ab hoc ultimo statu quo punctum A puncto B congruit: tunc verò loco ovalis C V E 7 habebimus circulum, cujus centrum erit idem punctum commune A vel B, & intervallum sive semidiameter B C, cui æqualis erit B E; unde punctum E vi geometricâ, tantùm distat à puncto B quantùm C ab eodem B. Duo loci basium describentur circa idem centrum B vel A secundùm præscriptas leges in præcedenti constructione: ex duobus locis centrorum, alter, nempe primus coalescet in unicum punctum B, alter erit circumferentia ejusdem circuli C V E 7 qui loco ovalis succedet: tandemque ipsa eadem circuli C V E 7 circumferentia referet duos reliquos locos intervallorum. Sed omnia ad Diopctricam erunt planè inutilia. *I. Status.*

Esto deinde punctum A intra ovalem inter B & C: ac tunc fiet figura ovalis in qua præcipuus vertex C propior erit præcipuo foco A quàm vertex E foco B; attamen distantia B E minor erit quàm B C; atque ita excessus rectæ A E supra rectam A C major erit quàm excessus rectæ B C supra rectam B E; ac duorum illorum excessuum ratio erit ipsa ratio refractionis. Sex loci, nempe duo basium, duo centrorum, & duo intervallorum, non aliter invenientur quàm in præcedenti figura, sed illi paulò aliter erunt dispositi, quod tamen nullius momenti est, quia hæc omnia ut priùs, ad Diopctricam sunt inutilia. *II. Status.*

Esto jam punctum A in præcipuo vertice C; quo pacto fiet ovalis quàm acutissima esse potest versùs ipsum C, versùs E autem, quàm obtusissima; siquidem, dum focus A procedit à B ad C, ipsa ovalis in vertice C fit semper acutior; in E autem, obtusior, quousque ipse focus A pervenerit in C, à quo procedendo extra ovalem, vertex C fit minùs acutus, E verò minùs obtusus. At hoc in statu foci primarii A in præcipuo vertice C constituti, ratio axis C E ad excessum quo recta B C superat rectam B E, est ipsa ratio refractionis. Primus locus basium, primus centrorum, & primus intervallorum inveniuntur ut in superiori constructione factum est, inter quos ille qui primus est intervallorum transit etiam per C vel A; quo pacto idem cùm transeat per extrema axis C, & E, tangit ovalem in ambobus illis punctis, & centrum illius est in medio axis ejusdem in K. Secundus locus basium, secundus centrorum, & secundus intervallorum omnes transeunt per idem punctum C vel A, sed centris differunt: illa tamen, quia hæc ovalis ad Diopctricam nihil confert, relinquenda judicavimus. *III. Status.*

Existat nunc focus A extra ovalem, ultra verticem C, non tamen infinitè: tunc autem omnia se habebunt prorsùs ut in præmissa figura; ita tamen ut, quò major erit ratio rectæ A B ad rectam B C, eò magis ovalis ipsa ad figu- *IV. Status.*

ram veræ ellipsis conicæ accedat, neque tamen unquam vera ellipsis fiat. Ac in illa, portio circa præcipuum verticem C ad Dioptricam utilis est, ut in descriptione figuræ præmissæ notavimus.

V. Status. Abeat nunc punctum A in infinitum ultrà C, qui status nobilissimus est, præbet enim veram ellipsim conicam, ac prorsùs eam quæ undecimo exemplo exposita est, quamque ibidem ad Dioptricam pertinere monuimus, cùm scilicet ratio axis AH ad distantiam focorum BM est ipsa ratio refractionis. Vide Figur. pag. 142. Hic verò omnes sex loci basium, centrorum, & intervallorum abeunt in lineas rectas: sed ex illis, secundus basium, & secundus centrorum infinitè distant à præcipuo vertice, qui in figura ejusdem exempli erit A; reliqui quatuor transeunt per puncta quæ ibidem sunt C, H, A, & centrum ellipsis, suntque illi omnes quatuor ad axem ejusdem ellipsis perpendiculares. Quoniam autem à puncto illo qui præcipuus vertex est & infinitè distat, duci debent rectæ: sciendum est ipsas duci debere axi ellipsis parallelas. Cætera facilè intelligentur ab eo qui doctrinæ Infiniti in Geometria assuevit.

Similiter, si præcipuus focus A infinitè distet ab altero foco B ex altera parte versùs secundum verticem E, idem omninò accidet quod jamjam diximus, cùm idem infinitè distaret versùs C; nam ex doctrina infiniti, idem est distare infinitè versùs C, ac distare infinitè ad contrarias partes versùs E: quod sanè illis qui tali doctrinæ minimè assuefacti sunt mirum videri solet, & plerisque absolutè impossibile.

Apparet ergo ex suprà dictis, id quod hucusque latuisse opinamur, nempe in ellipsi conica, quatenùs illa ad Dioptricam referri potest, tres intelligi debere focos, duos scilicet internos, & unum externum qui infinitè distet à quovis ex duobus verticibus. Unum dicimus externum, non duos, etiamsi cuivis doctrinæ infiniti imperito, ille minimè unus, sed duo infinitè à se invicem distantes videri possint. Ille enim quandiu in distantia finita à foco B distitit, ut suprà, unicus fuit A; postquàm autem abiit in infinitum versùs C, idem eodem modo se habet, ac si uno saltu transilierit ad alteram partem versùs E, paratus regredi ab illa parte versùs E secundùm rectam lineam NFEB, usque ad B unde moveri cœperat: immò, sive versùs C, sive versùs E infinitè distare ipse intelligatur, perinde est, quod ad constructionem pertinet: quæcunque enim recta ab eo duci intelligetur, illa axi CE semper existet parallela.

Superest nunc ut ipsum focum A consideremus ab infinita distantia versùs E regredientem usque ad B secundùm rectam NFEB, hic enim status dabit locos illos qui duobus reliquis particularibus casibus refractionum satisfacient. De his agemus posteà, sed priùs operæpretium fuerit statuere puncta A & C fixa, B verò mobile ad arbitrium; at E rursùs eatenùs mobile tantùm, quatenùs vis geometriæ id postulabit. Neque enim hujus speculationis fructus minor futurus est quàm præcedentis cum qua sanè multa habet communia, sed multa etiam planè diversa, cùm scilicet punctum B in infinitum abibit.

Itaque vel puncta immobilia A & C sunt simul, vel illa à se invicem sejuncta sunt. Si simul sint, vel punctum mobile B eisdem congruit, ita ut tres simul existant, vel idem B ab ipsis A, C, distat; idque vel secundùm distantiam finitam, vel infinitam.

VI. Status. Si tria puncta A, B, C simul existant, tum quartum E cum iisdem existet, evanescetque ipsa ovalis, quæ in idem punctum coalescet, atque unà cum ea omnes sex loci: estque status hic prorsùs inutilis.

VII. Status. Si puncta AC simul existant, B autem ab iis utcunque distet, sed finitâ distantiâ, habebimus tertium statum ex iis qui suprà expositi sunt, cùm punctum A mobile erat, idemque in C constituebatur.

Si punctis A, C, invicem constitutis, punctum B ab utroque infinitè distet ex utravis parte (perinde enim est ex doctrina infiniti, ut suprà,) tunc nulla habebitur ovalis, sed loco illius succedent duæ rectæ secantes se invicem in puncto communi A C, ita ut recta A B angulum ab illis contentum bifariàm dividat; eritque ille angulus tantus quantus debetur assymptotis hyperbolæ illius de qua undecimo exemplo dictum est, posito quòd ratio axis ad focorum distantiam sit ipsa ratio refractionis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad rectam A B perpendiculares, sed ex iis tres primi infinitè distant, sicuti & punctum B; tres secundi in unicam coalescunt rectam quæ per punctum commune A C transit: at illa omnia ad Dioptricam sunt inutilia. *VIII. Status.*

Jam puncta A C, quâcunque distantiâ finitâ à se invicem distent, & punctum mobile B incipiat ab A, moveaturque ad C, & ultrà usque in infinitum.

Existente ergo puncto mobili B in A, loco ovalis habebimus circulum, cujus centrum erit punctum illud commune A vel B, intervallum A C. Et hic status suprà expositus est, fuitque primus. *IX. Status.*

Existente autem ipso puncto mobili B inter A & C, multi habebuntur status inter se diversi, de quibus agemus posteà; illi enim sunt qui reliquis duobus casibus particularibus refractionum satisfaciunt. *X. Status.*

Existente jam ipso B in C, evanescet ovalis, eademque in idem punctum B vel C coalescet; quod jam suprà notatum est, atque inter inutilia repositum: is status sextus fuit. *XI. Status.*

Existente deinde puncto B ultra C, ita ut C sit inter duo B, A, habebimus statum figuræ præmissæ in qua tamdiu immorati sumus: & idem status suprà fuit quartus. *XII. Status.*

Existente porrò puncto B ultra C vel ultra A in distantia infinita ex quacunque parte (perinde enim est, ut jam non semel notavimus) tunc statum nobilissimum habebimus: abibit enim ovalis nostra in hyperbolam illam de qua undecimo exemplo dictum est, cùm scilicet ratio axis ad focorum distantiam est ipsa ratio refractionis. Ac hujus quidem hyperbolæ vertex præcipuus erit, hoc loco, in C; alter minus præcipuus E abibit in infinitum: quæ autem huic hyperbolæ opponitur alia hyperbola, respectu præcipui foci A erit inutilis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad axem infinitè productum perpendiculares; sed ex iis duo primi infinitè distant versùs C, nempe primus basium, & primus centrorum; primus intervallorum transit per verticem hyperbolæ inutilis, secundus intervallorum transit per præcipuum verticem C. Secundus centrorum transit per centrum hyperbolarum; secundus autem basium transit per illud punctum in quo recta A C sic dividitur, ut tota A C ad portionem ipsi puncto C conterminam, habeat rationem refractionis à raro ad densum. *XIII. Status.*

Apparet ergo idem hyperbolæ conicæ accidere quod de ellipsi suprà dictum est, quodque antiquos latuisse opinamur; nempe, præter duos focos vulgares de quibus in conicis agitur, quique distantiâ finitâ à centro ultra vertices removentur, dari tertium qui ex utravis parte infinitè distet ab eodem centro, quatenùs scilicet ipsa hyperbola ad Dioptricam refertur, &c. ut suprà de ellipsi.

Tandem verò punctum mobile B ab infinita distantia ultra A regrediatur versùs ipsum A à quo moveri incœpit, ita ut idem A existat inter C & B; ac tunc habebimus secundum statum illum inutilem de quo dictum est dum punctum A mobile statuebatur, atque illud existebat intra ovalem inter B & C; nec est quod hìc ultrà addamus. *XIV. Status.*

Quòd si quærat aliquis quinam hujusce speculationis circa mobilia puncta fructus futurus sit, præcipuè circa locorum doctrinam ad quam pertinere debent hæc nostra exempla: sciat ille primùm quidem in universum, tali,

vel aliâ simili consideratione apprimè detegi naturam figurarum omnium; cùm scilicet ritè notaverimus quid ex diverso situ præcipuorum punctorum ad illas pertinentium, eisdem figuris accidere possit, unde illæ immutari queant.

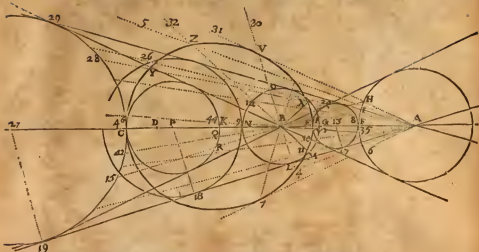
At in specie, quòd ad locos attinet, meminerit vix aliter detegi posse quomodo illi invertantur, aut in figuras genere, aut specie diversas permutentur; quemadmodum suprà vidimus locum illum de quo hoc duodecimo exemplo agimus, nunc esse ovalem aliquam, nunc circulum, & aliquando ellipsim, aut etiam hyperbolam: quod adhuc in iis quæ statim dicturi sumus, non minùs evidenter apparebit.

X V. Status. Prætermisimus suprà eum statum in quo punctum B mobile procedens ab A, progreditur, non quidem versùs C, sed ad contrarias partes usque in infinitam distantiam, quia status ille ad Diopitricam inutilis est: quandiu enim ipsum existit in distantia finita, habetur secundus status in quo A statuitur inter B & C, de quo suprà; cùm autem idem existit in distantia infinita, habetur hyperbola inutilis, cujus focus internus est A, vertex autem inter A & C; ac illud C est vertex hyperbolæ oppositæ, quæ sanè opposita poterit esse utilis, sed illa eadem prorsùs erit cum ea de qua duodecimo statu locuti sumus.

Nihil etiam diximus de puncto C infinitè distante, quia tunc evanescit omnis figura, atque unà cum ea, quæcunque puncta ad eandem pertinebant: quæ omnia in infinitum abeunt.

In universum ergo, res eò reducitur ut vel A focus infinitè distet, ac tunc habetur ellipsis utilis; vel B focus infinitè distet, ac tunc habetur hyperbola, cujus altera ex oppositis utilis est, altera inutilis; vel ex tribus punctis A, C, B medium sit C, ac tunc habetur status utilis, cui inservit figura præmissa; vel A & C simul existant, vel A sit medius inter C & B, vel idem A sit in B, qui tres status sunt inutiles, sicuti & inutiles sunt duo illi in quibus vel tria puncta A, C, B, vel, quod eodem recidit, duo B & C simul existunt; vel tandem punctum B medium sit inter C & A: unde septem oriuntur status nondum expediti, atque omnes utiles, de quibus agendum nobis superest, quia illi omnes & soli duobus reliquis particularibus refractionum casibus satisfacient. Nec multùm in singulis immorabimur; illi enim omnia habent præmissis anologa, scilicet focos, vertices, & locos basium, centrorum, & intervallorum; sed illa omnia positione differunt, atque ex diversa illa positione, figuræ diversissimæ evadunt.

Primus ergo status ex illis septem reliquis esto ille in quo duo puncta B, & E media sunt inter focos C, A; ac vertex secundus E medius quoque est inter B & A; cui statui inservit figura sequens: in qua quatuor puncta C, B, E, D, se habent prorsùs ut anteà; ita scilicet ut rectæ CD, BE, sint æquales; sicuti & CB, DE; sitque tota CE ad mediam BD in ratione refractionis à raro ad densum. At quia præmissæ conditiones omnes non solùm huic statui, sed etiam tribus sequentibus conveniunt, ideò huic primo illud peculiare esto, quòd ratio rectæ AE ad rectam EB sit major ipsâ ratione refractionis à raro ad densum. In secundo autem statu ponetur hæc ratio AE ad EB esse præcisè ratio refractionis à raro ad densum. In tertio è contrario, ponetur AE esse ad EB in ratione minori quàm sit ratio refractionis à raro ad densum, non minori tamen quàm à denso ad rarum. In quarto, ponetur ratio AE ad EB esse minor ratione refractionis à denso ad rarum, quousque punctum A pervenerit ad verticem E. In quinto, ponetur punctum illud A esse in E. In sexto, ponetur idem A esse inter B & E intra ovalem; ita tamen ut ratio totius BE ad portionem EA major sit quàm ratio refractionis à raro ad densum. In septimo denique statu, ponetur ipsum A rursùs intra ovalem inter B & E, sed propiùs ad idem B; ita ut ratio BE ad EA non major sit ratione refractionis à raro ad densum, sed vel eidem æqualis, vel ipsâ minor.



Etsi verò figuræ omnes, quæ singulis ex istis casibus propriæ sunt, differant tam inter se, quàm ab ea quam primam suprà exposuimus; ipsæ tamen plurima habent inter se similia: immò illæ omnes sic delineari ac notis distingui possunt, ut una eademque explicatio omnibus inserviat, nec alia distinctio adhibenda sit, quàm circa positionem aliquot punctorum, quorum quæ in una figura priora fuere, eadem in alia figura fient posteriora, & quæ erant media, fient extrema, aut omninò quid simile. Talis sanè est præmissa explicatio, quæ etiamsi primæ figuræ usqueadeò quadret, ut illi soli propria esse appareat, & reverà soli illi propria sit strictè loquendo; eadem tamen paucis tantùm mutatis, omnibus inservire potest. Id verò in hac secunda figura clarè intueri licet: sed ad hoc monendus est lector ut quotiescumque in dicta aliqua inciderit quæ secundæ illi figuræ quadrare non videbuntur, tum ipse huc recurrat ad ea quæ statim dicturi sumus, quæque continent præcipua capita in quibus discrepant ejusmodi figuræ.

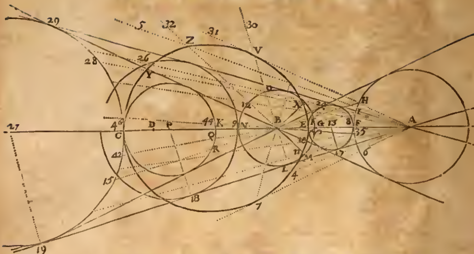
Ac primùm, in hac secunda figura, quia punctum A est ultrà tria puncta C, B, E, versùs E, quod contrarium est primæ figuræ: fit ut punctum G sit quoque ad easdem partes ipsius E, cùm in prima esset versùs C.

Secundò, anguli recti A L B, L B H, in secunda figura sunt interiores & ad easdem partes respectu parallelarum A L, B H, qui tamen in prima erant alterni.

Tertiò, in secunda figura, intervallum A F minus est quàm A B, quod in prima majus erat.

Quartò, cujuscunque longitudinis reperiatur intervallum A F in secunda figura, semper ovalis utilis erit; quod in prima verum non erat.

Quintò, hæc secunda figura satisfacit secundo & tertio casui ex quatuor illis particularibus casibus refractionum ad perspicilla pertinentium qui suprà expositi sunt, cùm prima satisfaceret primo & quarto, ut dictum est. Nam in eadem secunda, posito corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpolito, putà vitro, cui alterum corpus rarius undi-



que contiguum sit, putà aër qui vitrum ambiat: radii omnes ad punctum A tendentes, atque in superficiem V C 7 incidentes, refringuntur præcisè in punctum B; hic verò est tertius ex iisdem quatuor casibus. Atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem superficiem V C 7 incidentes, post refractionem divergunt extra ovalem tanquam si omnes ex puncto A progressi sint: & hic est secundus casus. Sic, si radius incidentiæ in raro sit 28 Y tendens versùs A, radius refractionis in denso erit Y B: atque è contrario, si radius incidentiæ in denso sit B Y, erit radius refractionis in raro Y 28.

Quòd si corpora permutentur, ut rarius sive aër contineatur sub forma ovali proposita, densiore seu vitro ipsum coarctante: tunc radii omnes qui intra rarum procedunt à puncto A, incidùntque in superficiem V C 7, sic refringuntur, ut intra densum divergant tanquam si à puncto B progressi sint. Atque è contrario, radii omnes in denso ad punctum B convergentes, atque in eandem superficiem V C 7 incidentes, sic refringuntur, ut intra rarum ad punctum A convergant. Sic radio incidentiæ existente A Z intra rarum, fiet in denso radius refractionis Z 32 qui à puncto B procedit; & è contrario, existente intra densum radio incidentiæ 32 Z qui ad punctum B tendit, fiet intra rarum radius refractionis Z A. Quo pacto rursùs alio modo satisfactum est secundo ac tertio ex prædictis quatuor casibus particularibus.

Sextò, centra circulorum illorum sex quos suprà assignavimus pro locis centrorum, intervallorum, & basium, multò aliter in hac secunda figura, quàm in prima, disposita sunt. Nam in hac secunda figura centrum P quod ad locos centrorum pertinet, reperitur inter vertices C, E, quod tamen in prima figura erat ultrà. Item, in eadem secunda figura, centrum 27. quod ad secundum locum intervallorum pertinet, abit ultra verticem C, quod tamen in prima abibat ultra E.

Septimò, quoniam ambo foci A, B in hac secunda figura reperiuntur extra utrumque circulum intervallorum: fit ut tam ambæ rectæ quæ à puncto A procedentes, tangunt secundum locum basium G L N O, quàm ambæ quæ

à

à puncto B procedentes, tangunt primum locum basium F I H: tam hæ tangentes, inquam, quàm illæ, tangant quoque utrumque circulum intervallorum E T 24 8, & 19 C 29, si scilicet tangentes illæ quantùm satis producantur.

Cæteras differentias quivis facilè percipiet: ideò nos ultrà progrediemur.

Assignavimus suprà differentiam quæ intercedit inter septem illos status in quibus punctum B reperitur inter A & C, diximusque primum in hoc à cæteris distingui, quòd in eo ratio A E exterioris ad B E interiorem (intellige respectu ovalis) major sit ratione refractionis à raro ad densum. Huic autem statui omninò accommodata est secunda figura præmissa, in qua ideò primus locus intervallorum E T 24 8 totus extra ovalem existit versùs A, & punctum F inter duo A & E constituitur.

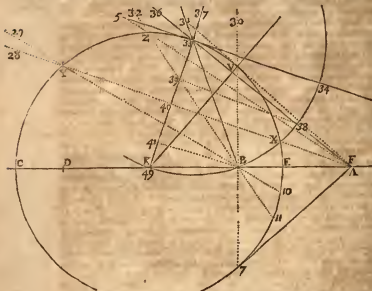
Jam secundus status nobilissimus est, in quo scilicet ratio A E ad E B est ipsa ratio refractionis à raro ad densum, unde puncta A & F in unum idemque punctum coalescunt. *Vide Figur. sequentem.*

In tali autem statu, loco ovalis habemus circulum qui utilis est eodem prorsùs modo quo utilis est præmissa ovalis secundæ figuræ, putà portio illa quæ est circa verticem C usque ad contactus V, 7, quæ portio satisfacit secundo & tertio ex quatuor casibus particularibus refractionum, ut diximus in quinto ex septem capitibus, quibus præmissa secunda figura à prima discrepat. Nec quicquam circa talem explicationem immutandum est, ita ut illa conveniat tam ovali secundæ figuræ, quàm circulo tertiæ sequentis, in qua, etiamsi puncta B, C, D, E eodem prorsùs modo disposita sint quo in secunda figura, tamen, propter rationem refractionum à raro ad densum quæ intercedit inter rectas A E, E B, fit ut sex loci de quibus toties suprà dictum est, singuli amissâ suâ extensione seu magnitudine, in puncta coaluerint; primus scilicet locus basium in punctum A; secundus basium in punctum B; ambo centrorum in punctum K, quod est centrum propositi circuli C V E 7; primus intervallorum in punctum E; ac tandem secundus intervallorum in punctum C.

At verò, quòd proprietas adeò insignis circulo C V E 7 conveniat; posito scilicet quòd tam ratio A E ad E B, quàm ratio diametri E C ad B D sit ratio refractionis à raro ad densum, ac proinde etiam ratio A C ad C B; (hæc enim tertia ex duabus prioribus sequitur) quòd, inquam, quivis radius 36 33 à raro quod est extra circulum, putà ab aëre incidens in densum quod est intra circulum, putà in vitrum, in punctum 33 quod est in circumferentia, si dirigatur ad punctum A, non tamen ad idem A perveniat, sed frangatur in ingressu 33, ac fractus abeat in B, illud ex sequenti demonstratione manifestò patebit: quæ quidem demonstratio circulo specialis est, nec prolixa; universalis enim, quæ tam ovalibus quàm circulo conveniret, longiori indigeret apparatu, ut jam suprà monuimus.

Ad hoc autem tria notanda sunt. Primum, quoniam est ut A E ad E B, ita A C ad C B, & quatuor puncta A, B, C, E sunt in eadem recta linea, estque A extra circulum, B intra, at E C est diameter; fit necessariò ut eductâ ex B puncto rectâ perpendiculari ad diametrum E C, atque eâ utrinque productâ usque ad circumferentiam, puncta in quibus ipsa circumferentiæ occurrit, sint ipsa V & 7, in quibus rectæ A V, A 7 ipsum circulum tangunt, ita ut ductâ rectâ K V, angulus K V A rectus sit, atque ita, ratio rectæ A V ad V B sive K V ad K B, rationi rectæ A K ad K V sit similis: atque earum rationum conversæ similes, scilicet B V ad V A, B K ad K V, & V K ad A K. Secundum, propter eandem rationem A E ad E B, & A C ad C B, fit ut duæ quæcunque rectæ A 33, B 33 quæ ad idem punctum 33 in circumferentia utcunque assumptum ducuntur, in eadem quoque ratione existant, putà ut A E ad E B, sive ut A C ad C B: nam circumferentia E V 33 C 7 talem locum exhibet, qualem quinto loco explicuimus, atque ideò etiam eadem est ratio A V ad

VB, & AZ ad ZB, & AY ad YB, &c. unde, quoniam ponitur ratio AE ad EB esse ratio refractionis à raro ad densum, erit quoque AV ad VB, A 33 ad 33 B, &c. ratio refractionis à raro ad densum. Tertium, ductâ rectâ 5 33 34 quæ circulum tangat in puncto 33, tum rectâ 33 K ad centrum K, erit angulus K 33 34 rectus; ac eodem modo fient refractiones radiorum in punctum 33 incidentium à circuli circumferentia E 33 C, quo à linea recta tangente 5 33 34; siquidem in universum, linea quæcunque curva, & recta ipsam tangens, easdem efficiunt refractiones radiorum in punctum contactus incidentium. Positâ ergo curvâ C 33 E, vel rectâ 5 33 34 pro dioptrica, sive pro superficie refractiva, & existente puncto 33 puncto incidentiæ, erit recta 33 K perpendicularis ad dioptricam.



His præmissis, centro 33 intervallo quocunque, putà 33 B, describatur circulus secans perpendicularem 33 K in puncto 49, rectam 33 A in puncto 38, & rectam 33 34 in puncto 34; eritque arcus 49 34 quadrans; & rectæ 33 49, 33 B, 33 38, & 33 34 erunt æquales. Sed, quod præcipuum est, demissis in rectam 33 49 productam si sit opus, perpendicularibus A 40, B 41, & 38 39: ostendendum est 38 39 ad B 41 esse in ratione refractionis, putà ut AE ad EB; hoc enim demonstrato, manifestum erit ex lege refractionum quam undecimo exemplo suprà exposuimus, fore ut si radius incidentiæ sit 36 33 38 A, tunc radius refractionis sit 33 B, & vicissim, si radius incidentiæ sit B 33, tunc radius refractionis sit 33 36: hoc autem sic demonstramus.

Ratio perpendicularis 38 39 ad perpendicularem B 41, componitur ex rationibus 38 39 ad A 40, & A 40 ad B 41: est autem 38 39 ad A 40, ut 38 33 ad 33 A, sive ut B 33 ad 33 A; & ut A 40 ad B 41, ita A K ad K B: quare

ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus B 33 ad 33 A, & A K ad K B: ut autem B 33 ad 33 A, ita B V ad V A, ut jam secundo loco notavimus, & ita B K ad K V; ideoque ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus A K ad K B, & B K ad K V, quæ ambæ constituunt rationem A K ad K V. Ut ergo 38 39 ad B 41, ita A K ad K V, sive A V ad V B, sive A E ad E B, quæ est ratio refractionis, ut propositum est. Cúmque idem accidat omnibus punctis quæ in arcu V C 7 assumi possunt, patet arcum illum esse locum ad propositas refractiones, quarum ratio erit ut A E ad E B; quæ sanè perinsignis est circuli proprietas huc usque, ut existimamus ignota.

Hoc pacto iis satisfecimus quæ initio duodecimi exempli ostendere polliciti sumus, nempe casum tertium ex tribus universalibus Diopticæ casibus, de quibus undecimo exemplo dictum est, aliquando ad superficiem sphæricam pertinere, sed multò magis universaliter ad alias superficies (nempe ovales de quibus suprà) quas antiquis notas fuisse nullibi apparet. Patet enim hunc secundum statum qui ad circulum, atque adeo ad sphæram pertinet, esse specialissimum, alios verò qui ad ovales, esse universaliores.

Porrò, qui supersunt status quinque, ad alias ovales pertinent, quas figurâ exhibere supervacaneum hoc loco duximus; neque enim ex prædictis difficile fuerit easdem satis accuratè describere. Quamobrem, postquàm ea breviter exposuerimus in quibus illæ à prædictis præcipuè differunt, tunc ulteriùs exemplis parcemus, duodecim præmissis contenti, quæ sanè perillustria sunt; atque ita ad id quod initio propositum est, accedemus.

Tertius ergo status ad ovalem quandam pertinet, in qua sex loci basium, centrorum & intervallorum describuntur. Sed quia punctum A reperitur inter E & F, hinc fit ut quinque ex illis locis, integri intra ovalem constituantur, nempe præter primum basium, reliqui omnes; primus enim basium, vel totus est extra ovalem, vel aliquid tantùm habet intrà; punctum N est versùs E; punctum G est versùs K; punctum 8 est versùs B, atque ita pleraque ex punctis contrario modo disposita sunt quo in secunda figura: est tamen ovalis ipsa tota, ut omnes de quibus hucusque egimus, ad easdem partes cava, quod tribus proximis sequentibus statibus non accidit. Cùmque A E est ad E B in ratione refractionis à raro ad densum, tunc ipsa ovalis ultima est earum quæ ad easdem partes totæ cavæ existunt; ulteriùs enim, puncto A propiùs accedente ad E, tunc partes ovalis vertici E hinc inde vicinæ, incipiunt esse ad exteriores partes cavæ, ut mox declarabimus. *Vide Figur. pag. 160.*

Quartus status omnia habet tertio similia, nisi quòd circa verticem E, partes aliquæ ipsius ovalis quæ ad talem statum pertinet, nempe partes illæ quæ circa verticem E proximè disponuntur, exteriùs versùs A cavæ sunt. At post aliquam distantiam hinc inde ab ipso vertice E, eadem ovalis incipit rursùs ad interiores partes versùs centrum K esse cava, nec posteà mutatur talis cavitas interior, sed durat per totum ovalis reliquum circa præcipuum verticem C; & quò minor est ratio A E ad E B, eò major est cavitas circa verticem E. Quo pacto ejusmodi ovalis aliquo modo accedit ad formam cordis alicujus animalis, cum hac tamen differentia, ut pars quæ est circa E cava sit exteriùs, non ad formam anguli ut cor, sed ad formam quasi rotundam; ut si fingas ovalem aliquam quæ priùs tota interiùs cava erat, ictu quodam alterius ovalis fortioris circa verticem E inflicti, retusam esse ad interiores partes, ut communiter accidit corporibus rotundis debilioribus, dum in firmiora rotunda illidunt. In hac verò ovali, sicuti & in omnibus præmissis, semper reperitur aliqua pars circa verticem E, quæ ad Diopticam inutilis est, nempe usque ad ea puncta V, 7, in quibus ductæ rectæ A V, A 7, ipsam ovalem tangunt, ut jam suprà sæpiùs dictum est.

Quintus status dum A est in E; quod ad sex locos basium, centrorum, &

intervallorum attinet, non admodùm differt à tertio & quarto statu præmissis. Ejus verò ovalis circa verticem E exteriùs cava est quàm maximè. Cæterùm eadem integra ad Diopticam utilis esse potest, estque prima earum quæ nullas partes habent inutiles; quæ proprietas duobus reliquis statibus etiam convenit. In hoc etiam statu hoc speciale est circa locos, quòd quatuor ex illis, nempe duo loci intervallorum, secundus centrorum, & secundus basium tangant se invicem, atque etiam ovalem in ipso vertice E; unde quæ ab eodem E vel A excitatur perpendicularis ad axem C E, eosdem quatuor locos tangit in ipso eodem E.

In sexto statu, ovalis adhuc cava est circa verticem E, sed minùs quàm in quinto in quo illa circa idem punctum E maximè cava erat; & quò major est ratio rectæ B E ad E A, eò minùs cava est eadem ovalis. In ea sex loci reperiuntur, sed ita ut quatuor de quibus in quinto statu dictum est, extra ovalem excurrant ultra E; unde evanescit tangens A L, quam tamen refert analogicè ea recta quæ ex puncto A excitatur perpendiculariter ad axem C E; exhibet enim illa punctum L ubi secat secundum locum basium; punctum 17, ubi secat primum intervallorum; punctum 18, ubi secat secundum centrorum; & punctum 19, ubi secat secundum intervallorum, quod in septimo casu verum quoque reperitur. Sed & pro diversis rationibus refractionum in diversis mediis, atque etiam pro diversis rationibus B E ad E A, accidere potest ut evanescat tangens B 24, quæ ex puncto B educta tangebat quatuor locos, nempe duos intervallorum, primum centrorum, & primum basium, quam tamen analogicè hoc casu referet ea recta quæ ex puncto B ad axem C E perpendiculariter excitabitur, eo modo quo de tangente A L jamjam dictum est, quod quivis Geometra facilè intelliget.

At ubicunque existat hoc punctum B, sive extra quatuor illos locos; sive in vertice eorumdem, dum vertex ille est in B; sive intra ipsos, ut in hoc statu accidere potest: semper punctum B ad prædictos quatuor locos similiter positum est; ita ut duæ quæcunque rectæ ab eodem B eductæ, & vel tangentes vel secantes quatuor illos circulos, auferant ab illis totidem arcus similes, si sumantur ut sibi respondent. Eadem est ratio puncti A respectu suorum quatuor locorum, de quibus hoc & quinto statu dictum est. Unde inferre licet tam punctum A ad duos locos intervallorum similiter positum esse, quàm punctum B ad eosdem, etiamsi positio puncti B positioni puncti A minimè similis existat.

Tandem, in septimo statu sex loci non longè aliter se habent quàm in sexto; sed ovalis circa verticem E non ampliùs cava est ad partes exteriores: verùm illa tota interiùs cava existit, nec quicquam in ea speciale reperitur quod sit alicujus momenti.

De tangentibus & rectis ad prædictas omnes ovales perpendicularibus, multa dici possent elegantissima, quæque hanc materiam, atque adeo totam Geometriam maximè illustrarent: verùm illa ideò prætterimus, quia propriè non sunt hujus loci. Hoc tamen monebimus: In omni statu in quo puncta A & C sunt ad easdem partes respectu puncti B, sive ipsa A, C sint simul, sive illorum alterum propiùs accedat ad B, quodcunque illud sit, vel A, vel C: tunc omnem rectam quæ ad ovalem perpendicularis erit, occurrere axi ejusdem ovalis in puncto aliquo quod erit inter ipsum B & alterum ex prædictis duobus A, C, quod eidem B propinquius erit. At verò in omni statu in quo punctum B existet inter prædicta A, C, tunc omnem rectam ejusmodi quæ ad ovalem perpendicularis existet, vel axi parallelam esse, vel eidem occurrere ultra puncta A, B, nullam autem vel in ipsis punctis, vel inter ipsa. Sed de his satis: nunc ad propositam nobis materiam de locis ad analysim aptis accedamus.

De

De locorum divisione in diversos gradus.

MULTI sunt locorum gradus, immò infiniti; alii enim simplicissimi sunt; alii autem magis ac magis compositi, idque in infinitum. Eorum tamen omnium Antiqui duo in universum genera statuerunt.

Primum genus est eorum qui solis constant lineis, sive illæ rectæ sint, sive curvæ. Ac de his sanè intelligi debet omnis sermo in quo de locis simpliciter agitur, nullo addito vocabulo quod contrarium indicet.

Secundum genus est eorum qui superficiebus constant, vocanturque illi communiter loci ad superficiem; quorum quidam per se subsistunt, nec ab aliis oriuntur; quidam contrà oriuntur sive generantur à locis simplicibus primi generis, dum illi circa axes aliquos conversi, superficies aliquas producunt.

Rursùs, primum genus locorum in tres classes communiter distribui solet, nimirùm in locos planos, in locos solidos, & in locos lineares.

Loci plani duo sunt tantùm, nempe linea recta, & circuli circumferentia.

Loci solidi tres sunt, nempe parabola, hyperbola, & ellipsis; qui ex sectione superficiei conicæ & plani alicujus quod nec per verticem coni transeat, nec basi sit parallelum, nec subcontrariè positum, originem ducunt.

Loci lineares sunt omnes aliæ quæcunque lineæ præter rectam, circuli circumferentiam, & conicas sectiones, putà conchoïdes omnis generis, spirales, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, & infinitæ aliæ, quæ tales sunt & tam multiplices ut etiam nomine careant. Neque enim aliter comparari debent loci lineares cum locis planis aut cum solidis, quàm genus polygonorum quæ laterum multitudine triangulum aut quadrangulum excedunt, cum ipso triangulo aut quadrangulo. Nam, quemadmodum sub tali nomine polygoni continentur pentagonum, hexagonum, eptagonum, octogonum, &c. quæ omnes figuræ non minùs inter se differunt & specie & proprietatibus quàm triangulum à quadrangulo, & utrumque horum à cæteris: sic sub uno nomine linearium infiniti loci continentur qui non minùs differunt inter se naturâ & proprietatibus, quàm linea recta aut circuli circumferentia à parabola, hyperbola, aut ellipsi; aut quàm hæ quinque lineæ ab iisdem locis linearibus, seu à conchoïdibus, spiralibus, cissoïdibus, &c.

At verò non omnes loci lineares ad analysim nostram apti sunt, sed illi tantùm quos ad æquationes analyticas revocari posse contingit. Quid sit autem locum aliquem ad æquationem revocare, posteà declarabimus, & exemplis illustrabimus. Nunc autem, quoniam à multis quæri solet an ejusmodi loci tam plani quàm solidi & lineares, omnes in universum geometrici dici debeant, extiterunt non pauci inter Geometras vulgò habiti, qui præter locos planos, nullos alios admittebant, ac cæteros tanquam à Geometria prorsùs alienos respuebant, ita ut problema quodvis insolutum existimarent, quod beneficio locorum planorum solvi non posset, quantumcumque idem aut per locos solidos aut per lineares solveretur: ideò non abs re fuerit hoc loco disquirere quid geometricum, quid verò minimè geometricum censeri debeat, positis tamen iis omnibus quæ vulgò in elementis omnibus geometricis admitti solent.

Sanè in universum, quæstio est de nomine, ut manifestò patet: tamen, quia multi præ arrogantia, ea omnia damnare consueverunt quæ ignorant, ne scilicet re quadam alicujus pretii privari videantur; ac sic multa respuunt quæ à doctis communiter recipiuntur.

Ut talium sic leviter sub appositis suo modo falsis nominibus res bonas damnantium malitiam quivis veritatis studiosus vitare possit, lubet rem ipsam à fundamentis resumere, quibus intellectis, facile erit cuicunque propositionem aliquam geometricè aut secùs solutam, temerè affirmanti aut neganti ref-

pondere, atque ipsius affirmationem aut negationem falsam, levem, aut temerariam esse, ex ipsius scientiæ principiis evidenter demonstrare.

Ac primùm omnium convenit propositiones arithmeticas à geometricis distinguere; siquidem illas arithmeticè, hoc est per operationes sive regulas arithmeticas; has verò geometricè, hoc est per locos geometricos, solvi consentaneum est, ut debito seu legitimo modo solutæ dici debeant. Neque tamen negamus utrasque operam sibi mutuam præbere, ac sibi invicem auxiliari, idque multipliciter; quod ideò non impedit ne arithmetica arithmeticè, geometrica geometricè tractentur.

Arithmeticæ ergo propositiones solvuntur vel addendo, vel substrahendo, vel multiplicando, vel dividendo, vel radices extrahendo; atque id tam in numeris rationalibus seu unitati commensurabilibus, quàm in numeris irrationalibus seu surdis, vel unitati incommensurabilibus; &, sive in numeris simplicibus, sive in compositis ejusmodi operationes instituantur, juvante ubicunque Geometria si opus fuerit, cujus præcipuæ partes sunt distinguere atque imperare ubi & quando addere, aut substrahere, ubi & quando multiplicare aut dividere, ubi & quando radices extrahere conveniat.

Quo in opere non multùm refert utrùm solutio in minimis aut in simplicissimis numeris exhibeatur, vel in majoribus aut magis compositis; sæpè enim accidit ut vel multiplicationes, vel divisiones, vel radicum extractiones adeò intricatæ sint, ut ipsas explicare nimis arduum opus sit, nec quodpiam tantæ operæ prætium satis dignum existat.

Neque tamen diffitendum est ea ingenia longè aliis prælucere, quibus datum est quæstiones quascunque simplicissimo modo solvere: at illa bonis suis gaudeant, modò ne aliorum solutiones minùs simplices tanquam spurias ac minimè recipiendas, nimis arroganter damnare contendant.

In exemplo. Proponatur in numeris hæc æquatio cubica numericè solvenda. $B^{\text{solidum}} - C^{\text{plano}}$ in $A - A^{\text{cubo}} \infty O$, & $B^{s.}$ sit numerus infrà positus, nempe apotome, sicuti & $C^{p.}$ 729.

$$\underset{\text{Apotome.}}{B^{s.}} \left\{ \begin{matrix} + & 142884 \\ - \sqrt{q} & 17962705800 \end{matrix} \right. - 729A - A^3 \infty O.$$

Ponamus autem quendam vel nescire, vel non admodum curare methodum quâ ejusmodi æquatio brevissimo aut simplicissimo modo solvi queat, sed tantùm id curare, quo modo illa utcunque solvatur.

Equidem ex constitutione illius, patet ipsam irregularem esse, nec de tribus lateribus explicabilem, verùm de unico tantùm, eodemque suprà: hoc ex nostro opere de æquationum cubicarum recognitione, cap. 3. prop. 6. patebit.

At illius constitutio ex Vieta elegantissimè deducitur. Sunt quippe quatuor quidam numeri continuè proportionales, quorum qui continetur sub extremis vel mediis est tertia pars numeri radicum, sive tertia pars affectionis sub A; qui numerus in nostro exemplo est C. 729, & ejus tertia pars est 243: differentia autem extremorum est ille numerus qui oritur diviso $B^{s.}$ per eandem tertiam partem numeri C. Quia ergo numerus ille solidus est hæc apotome 142884 — $\sqrt{}$ 17962705800; eo per 243 diviso, oritur hæc alia apotome 588 — $\sqrt{}$304200, quæ ideò est differentia numerorum extremorum. Est autem numerus quæsitus A in eadem serie, differentia numerorum mediorum. Eò itaque res reducitur, ut ex quatuor numeris continuè proportionalibus, datâ differentiâ extremorum, nempe 588 — $\sqrt{}$304200; dato etiam producto ex mediis vel ex extremis 243, inveniatur differentia mediorum. Et extremi quidem facili viâ habentur ex data differentia ipsorum, & producto eorumdem; nam semidifferentia est 294 — $\sqrt{}$ 76050, & hujus

semidifferentiæ quadratum est hæc apotome $162486 - \sqrt{26293831200}$, quod additum ipsi producto 243, dat hanc aliam apotomen $162729 - \sqrt{26293831200}$, cujus radix quadrata est dimidia summa extremorum $\sqrt{88200} - 273$. Huic apotome si addas semidifferentiam extremorum prædictam, nempe $294 - \sqrt{76050}$, fit major extremorum quæsitorum, hoc nempe binomium $\sqrt{450} + 21$. Quòd si ex eadem apotome $\sqrt{88200} - 273$, seu ex dimidia summa extremorum, demas eandem semidifferentiam extremorum $294 - \sqrt{76050}$, fit minor extremorum quæsitorum, nempe hæc apotome $\sqrt{328050} - 567$. Hoc pacto, datis extremis, quærendi sunt duo medii proportionales, ut habeatur eorum differentia quæ dabit numerum A quæsitum.

At in quatuor numeris continuè proportionalibus, hoc universale theorema est: Productus ex majori extremo in quadratum minoris extremi est cubus minoris medii. Item, productus ex minori extremo in quadratum majoris extremi est cubus majoris medii. Hac igitur regula ex datis extremis, majori quidem $\sqrt{450} + 21$, minori autem $\sqrt{328050} - 567$, dabuntur duo cubi mediorum. Nam quadratum majoris extremi est binomium $891 + \sqrt{793800}$: hoc multiplicatum per minorem extremum dat hoc aliud binomium $\sqrt{26572050} + 5103$, & hic est cubus majoris medii. Simili modo, quadratum minoris extremi est hæc apotome $649539 - \sqrt{421857865800}$; hoc multiplicatum per majorem extremum dat hanc aliam apotomen $\sqrt{193710244500} - 137781$, & hic est cubus minoris medii.

Inventis ergo duobus cubis numerorum mediorum, superest ut cuborum ipsorum radices extrahantur. At verò, talium cuborum alter, nempe major, est binomium: alter autem, seu minor, est apotome; quicunque ergo artem calluerit quâ ex binomiis & apotomis cubicæ radices extrahuntur, is quæstionem, si non simplicissimo modo, at certè accuratè omninò solverit; siquidem earum radicum differentia erit numerus A quæsitus, nec alio quovis modo, quamquam simpliciori, alius invenietur numerus. Quòd si reperiatur aliquis qui talem artem ignoraverit, is postquàm cubos prædictos invenerit, ibi subsistet, ac dicet numerum quæsitum A esse differentiam radicum cubicarum talium numerorum exhibitorum sic $\sqrt{cub.}$ hujus binomii $|\sqrt{q}\,26572050 + 5103|$ $- \sqrt{c.}$ hujus apotomes $|\sqrt{q}\,193710244500 - 137781.|$ Et sanè ea dici poterit aliqua esse solutio, quoniam ipsa ad numeros certos ac determinatos reducta est. Adde quod plerumque accidit ut binomia aut apotomæ non habeant radices cubicas explicabiles, unde ipsarum differentia per ejusmodi radicum extractionem exhiberi non potest, quamvis illa aliquando rationalis existat; quò fit ut eâdem, vel aliâ viâ quærenda sit, vel eâ ratione quâ suprà, per ipsos cubos irrationales exhibenda.

Verùm in proposito exemplo, radices cubicæ à perito rectè extrahi possunt, quibus exhibitis solutio longè erit elegantior; sunt enim radices illæ binomii quidem, hoc binomium $\sqrt{q}\,162 + 9$; apotomes verò, hæc apotome $\sqrt{q}\,1458 - 27$. Sint ergo hi numeri duo medii quæsiti, quorum differentia est hæc apotome $36 - \sqrt{q}\,648$ quæ exhibet numerum A quæsitum; quo pacto habemus hoc modo satis longo atque intricato, solutionem quæstionis propositæ: atque etiamsi methodus talis solutionis simplicissima non sit, tamen numerus A inventus est simplicissimus.

Verumenimverò sagacior aliquis Analysta, multò compendiosiori viâ eandem inveniet solutionem. Is enim statim propositâ hâc eâdem æquatione cubica,

$$B^{c.} \left\{ \begin{array}{l} + \quad 142884 \\ - \sqrt{q}\,17962705800 \end{array} \right. - 729A - A^3,$$

animadvertet illam ad minores numeros reduci posse; quandoquidem datur

numerus 3, cujus quadratus 9 dividere potest $C^{p} \propto 729$, ita ut ejusdem numeri 3 cubus 27 dividere quoque possit B^{s} 142884 — √q 179627058001 ac divisione per quadratum oritur 81, per cubum autem oritur 5292 — √q 24640200.

Hoc pacto dabitur alia æquatio in minoribus numeris, nempe hæc,

$$D^{s}\left\{\begin{array}{l}5292\\ -\sqrt{q}\,24640200\end{array}\right. - F^{p}\,81\,E - E^{c} \propto O.$$

Cujus æquationis radix E cùm inventa fuerit, ac per 3 prædictum multiplicata, dabitur prioris æquationis radix A quæsita. Est tamen hæc nova æquatio ejusdem constitutionis cum ea quæ initio proposita est; quare concludemus in ea contineri quatuor numeros continuè proportionales, ita ut numerus contentus sub extremis vel mediis sit 27 tertia pars F^{p}, sive numeri 81; differentia verò extremorum sit hæc apotome 196 — √q 33800, quæ oritur diviso solido D per prædictùm numerum 27. Datâ autem differentiâ extremorum, & producto ab iisdem, dantur vulgari methodo iidem extremi, major nempe hoc binomium √q 50 + 7, & minor hæc apotome √q 36450 — 189. His datis extremis dabentur cubi mediorum methodo superiùs traditâ; verùm, eidem Analystæ, quem ex sagacioribus aliquem supponimus, dabitur locus subtili sanè compendio; datur nempe cubus quidam numerus 27 per quem illorum extremorum alter dividi potest, putà minor sive √q 36450 — 189, quâ divisione reperitur hæc apotome √q 50 — 7; sumatur ergo talis apotome √q 50 — 7 loco minoris extremi, majore eodem semper remanente binomio √q 50 + 7, ut suprà. Hac tamen lege, ut postquàm inter illos extremos duo medii inventi fuerint, tum alter illorum minori proximus multiplicetur per 9, quadratum scilicet numeri 3, cujus cubus 27 divisor fuerit minoris ipsius extremi, nempe √q 36450 — 189: alter autem eorumdem inventorum mediorum ab extremo minore diviso remotior, multiplicetur per 3 radicem ejusdem cubi 27 divisoris; hac enim duplici multiplicatione dabuntur veri duo medii inter duos extremos quos ex secunda æquatione præmissa ad minimos numeros reducta deduximus, nempe inter binomium √q 50 + 7, & apotomen √q 36450 — 189.

Resumamus ergo duos minimos extremos ultimò inventos post divisionem per cubum 27, qui sunt √q 50 + 7, & √q 50 — 7, inveniamusque inter eosdem, duos medios continuè proportionales.

Rursùs autem hîc quiddam accidir notandum. Nam si quis per traditam suprà regulam, datis extremis, quærat cubos duorum mediorum, is inveniet tales cubos esse eosdem ipsos extremos: quod ideò accidit, quia binomium & apotome quæ ipsos extremos constituunt, iisdem constant nominibus; ac prætereà quadrata ipsorum nominum unitate tantùm differunt, quod quoties accidir, toties duo extremi sunt cubi duorum mediorum, unusquisque scilicet illius qui sibi proximus est.

Habeantur ergo duorum illorum extremorum radices cubicæ; binomii quidem, sive √q 50 + 7, hoc binomium √q 2 + 1: at apotomes, sive √q 50 — 7, hæc apotome √q 2 — 1; atque ita tandem habebimus quatuor continuè proportionales, √q 50 + 7, | √q 2 + 1, | √q 2 — 1, | & √q 50 — 7,

in numeris multò minoribus quàm anteà. Quòd si intacto primo, ut suprà decrevimus, secundum illorum multiplicemus per radicem 3, tertium verò per ejus quadratum 9, at quartum per cubum 27, qui anteà divisor extitit, habebimus quatuor illos proportionales qui ad æquationem de E superiùs expositam, pertinent, quorum primus erit in utraque serie idem √q 50 + 7; secundus √q 18 + 3; tertius √q 162 — 9; & tandem quartus, √q 36450 — 189.

189. Horum quatuor, differentia mediorum est $12 - \sqrt{q}\,72$; is autem est numerus E quæsitus in æquatione, qui numerus, si tandem per 3 multiplicetur, per eum scilicet numerum cujus beneficio depressa est suprà æquatio de A, & ad æquationem de E reducta: dabitur numerus A quem initio quærebamus; & is erit idem qui anteà $36 - \sqrt{q}\,648$, sed multò breviori multóque simpliciori methodo inventus, propter quam tamen non est quòd, qui illam calluerit, nimiùm arroganter superbiat.

Hîc quærere posset aliquis an detur certa aliqua regula quâ dignoscamus num binomia aut apotomæ radices habeant cubicas explicabiles, & quomodo illæ eruantur.

Sciat igitur ille talem dari regulam, quam non abs re fuerit paucis indicare. Ac primùm, ponamus binomium aut apotomen propositam, esse primi vel secundi, quarti vel quinti ordinis, tum sic fiet:

Ex quadrato majoris nominis dematur quadratum minoris, ac tum si differentia reperiatur esse cubus numerus habens radicem minimè surdam, sed unitati commensurabilem, benè est, nec alia præparatione est opus: sin secùs, tunc aliqua præparatione utendum est, de qua dicemus posteà. Ponamus ergo prædictam differentiam habere radicem cubicam, quæ radix vocetur B planum; at majus nomen binomii aut apotomes, vocetur M solidum; minus autem vocetur N solidum: tum alterutra ex sequentibus duabus æquationibus cubicis solvatur, nempe

$$\tfrac{1}{4}M^{s.} + \tfrac{3}{4}B^{p.}A - A^3 \propto O,$$

$$\text{vel } \tfrac{1}{4}N^{s.} - \tfrac{3}{4}B^{p.}A - A^3 \propto O:$$

prior quidem, si binomium vel apotome primi vel quarti ordinis extiterit; posterior autem, si secundi vel quinti. Talis autem æquationis radix reperiri debet esse numerus minimè surdus, atque ideò inventu facillimus. Quòd si illa radix non reperiatur esse rationalis, seu unitati commensurabilis, tunc certò pronuntiare licebit, binomium aut apotomen non habere radicem cubicam explicabilem. Esto ergo illa cubicæ æquationis radix numerus rationalis integer vel fractus, tunc illa priori quidem æquatione erit majus nomen, à cujus quadrato si demàtur B planum, relinquetur quadratum minoris nominis, ex quibus nominibus constituetur binomium vel apotome: atque hæc vel illud erit radix cubica quæsita. At secunda æquatione radix erit minus nomen, cujus quadrato si addatur B planum, fiet quadratum minoris nominis; atque ab illis nominibus constitutum binomium vel apotome, erit radix cubica quæ quæritur.

Jam verò existente binomio vel apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, quadrata nominum non differant cubo numero, sed quocunque alio: tunc hac præparatione utemur. Differentia illa quæ cubus non est, vocetur $C^{ss.}$, ac per eandem differentiam multiplicetur utrumque propositorum nominum binomii vel apotomes cujus radix investigatur, putà $M^{s.}$ & $N^{s.}$; hac enim multiplicatione habebimus binomium aliud vel aliam apotomen ejusdem ordinis, cujus quadrata nominum cubo numero different. Atque omninò non refert quis sit multiplicator per quem multiplicentur nomina $M^{s.}$ & $N^{s.}$ modò quadrata nominum inde ortorum cubo numero differant; is ergo multiplicator quicunque ille sit, vocetur $C^{ss.}$ sive ille sit idem qui suprà, sive non; est tamen primus communiter simplicissimus.

Talis ergo binomii vel apotomes tali multiplicatione constitutæ radix cubica inveniatur ea methodo quam jamjam tradidimus mediante æquatione cubica convenienti: tum radix inventa dividatur per $C^{p.}$ hoc est per radicem cubicam $C^{ss.}$ quæcunque sit illa radix, surda, vel rationalis; quotiens enim talis divisionis dabit radicem cubicam initio quæsitam.

Ponamus tandem propositum binomium vel apotomen, esse tertii vel sexti ordinis; atque, ut suprà, majus nomen esto M$^{q.}$ minus autem N$^{q.}$; & C$^{q.}$ esto differentia quadratorum nominum ipsorum. Tum inveniatur numerus aliquis D$^{q.}$, qui multiplicans C$^{q.}$ faciat cubum, multiplicans autem vel M$^{q.}$, vel N$^{q.}$ faciat quadratum: (dantur infiniti tales numeri, & facilè inveniuntur) ac per D$^{q.}$, hoc est per radicem quadratam numeri D$^{q.}$, multiplicetur utrumque nominum M$^{q.}$ & N$^{q.}$; tali enim multiplicatione orietur aliud binomium vel alia apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, cujus quadrata nominum different cubo numero; illius ergo radix cubica (si illa explicabilis sit) habebitur per præmissam regulam mediante congruenti æquatione cubica, ut dictum est: hæc ergo radix cubica divisa per D, hoc est per radicem solido-solidam, seu cubo-cubicam numeri D$^{q.}$, dabit radicem cubicam binomii vel apotomes, cujus nomina sunt M$^{q.}$ & N$^{q.}$, quam invenire propositum erat.

Plurima super hac re dici poterant; sed nos regulam pulcherrimam indicare duntaxat, non minutatim persequi voluimus, & quæ dicta sunt sufficient Analystæ non omnino rudi ad cætera detegenda.

Nec est quòd quis dicat, hoc modo proponi obscurum per obscurius explicandum, dum inventionem radicis cubicæ alicujus binomii vel apotomes ad resolutionem æquationis cubicæ reducimus. Quandoquidem enim talis æquationis solutio reperiri debet numerus rationalis integer vel fractus (aliàs enim, si surdus existat non erit radix binomii vel apotomes explicabilis) non aliter, nec majori difficultate solvetur æquatio illa, quàm si simplex divisio absolvenda esset; quod sanè callere debet quicunque Analysim vel mediocriter coluerit. Legatur Vieta lib. de æquationum recognitione & emendatione, ac præcipuè capite illo quo æquatio sic transmutari potest, ut coefficiens sit quæ præscribitur: statuatur enim coefficiens unitas; tum verò solidum comparationis erit cubus aliquis suo latere auctus vel mulctatus: cætera plana sunt, unde nihil ultrà addemus.

Hoc exemplo satis declaravimus quid requiratur ad hoc ut problema aliquod arithmeticum arithmeticè solutum dici possit: qua de re tantis operibus egerunt Vieta, Cardanus, Bombellius, Tartalia, & alii quidam illustres præteriti sæculi viri, inter quos longè excelluit ipse Vieta, dum talium problematum solutionem, non quidem singularem pro singulis problematis, sed universalem pro qualibet specie problematum, per species ad id à se inventas inquisivit.

Neque abs re fuerit Analystam monere, quæstionem omnem in numeris propositam, in qua ex datis quibusdam numeris, alius aliquis numerus quæritur secundùm leges quasdam in eadem quæstione præscriptas, semper esse quæstionem singularem; atque etiamsi illa ad æquationem analyticam revocata, ad æquationes cubicas, aut ad altiores pertinere videatur: tamen non temerè statim pronunciandum esse, talem quæstionem solidam esse aut linearem, sæpissimè enim accidit, ut illa vi inductionis logicæ plana sit; dico vi inductionis logicæ, quoties scilicet solutio illius datur in numeris qui logicâ inductione initâ, necessariò reperiuntur. Ut si experiar num æquatio aliqua de unitate sit explicabilis, num de binario, num de ternario, de quaternario, quinario, senario, &c. neque enim in infinitum abit tale experimentum, quandoquidem, ex hypothesi, numeri in ipsa æquatione expressi sunt, qui radicem quæsitam intra certos ac præfinitos terminos coercent. Aut si certâ aliquâ conjecturâ deprehenderim illam, non de integro numero, sed de fracto explicabilem esse, cujus numeri fracti denominator ex recognitione ipsius æquationis innotescat: tum inductione factâ, quæram numeratorem binarium, ternarium, quaternarium, quinarium, senarium, septenarium, &c.

donec illum invenero, qui experiundo satisfaciat propositæ quæstioni; neque enim rursùs in infinitum abit tale experimentum. Eodem modo, si ex recognitione talis æquationis deprehendero ipsam nec de integro numero nec de fracto explicari posse, sed de surdo aliquo, cujus tales ex ipsa recognitione innotescant conditiones, ut ille, quamquam surdus, inductione factâ detegi possit: tales omnes æquationes planæ censeri debent, non autem solidæ aut lineares, sub quarum specie aliquâ contineri primo intuitu apparuerunt. Ac planè talis existit præmissa æquatio cubica numerica, in qua satis jamjam immorati sumus, quæ tamen prima fronte alicui minùs perito Analystæ, solida quædam quæstio ex iis quæ insolubiles vulgò censentur, potuit apparere.

Nunc ergo ad geometriam redeamus, & quid geometricum sit, aut censeri debeat explicemus. Geometricum in universum vocamus quodcunque intelligibile est in materia geometrica, nullâ habitâ ratione sensuum externorum, putà visus, auditus, tactus, gustus, vel olfactus, nisi quatenùs illi intellectum movere possunt ad suas operationes exercendas. Verbi gratiâ, dum species visibilis circuli alicujus materialis in oculum incidens visum movet, illa ex occasione causa esse poterit cur intellectus ab illo sensu excitatus talem figuram considerandam suscipiat, ac multas easque insignes proprietates detegat, atque evidenter ex certis atque indubitatis principiis demonstret. Ejusmodi igitur cognitio ab intellectu elicita, atque in ipso intellectu residens tanquam species aliqua intellectiva circa materiam geometricam, est id quod geometricum appellamus.

Materia verò geometrica est omne extensum quatenùs extensum, & quidquid ad illud pertinet sub eadem ratione; quales sunt termini illius, quales figuræ, quales rationes & proportiones magnitudinum ad invicem, & si quid aliud ad tale argumentum pertineat. Itaque lineæ omnes, omnesque superficies quæ certis atque intellectu planè perceptis regulis describuntur, omninò geometricæ sunt, sicuti & figuræ quæcunque talibus lineis, ac talibus superficiebus continentur. Nec refert quòd illæ omnes lineæ, superficies, & reliquæ, mediante motu aliquo vel simplici vel composito, ut plurimùm sub intellectum cadant. Nam primùm, motus ille, sive sit puncti alicujus ad lineam aliquam describendam, sive sit alicujus lineæ ad describendam superficiem, sive superficiei ad solidum describendum, est simpliciter intelligibilis; non autem sensu externo perceptibilis, nisi quatenùs ad meram praxim refertur, quæ sensus externos respicit, nec ad puram geometriam, hoc est purè intelligibilem, reducitur; sed & puncta, lineæ, aut superficies quæ moveri intelliguntur, purè sunt geometricæ, abstrahuntque à materia sensibili; & per spatium purè geometricum, atque à materia sensibili abstractum, motus suos perficere intelliguntur, transeuntque à termino noto ad notum terminum per notum medium, secundùm leges notas, & clarâ ac distinctâ intellectus notione, aut firmo ratiocinio stabilitas; aliàs enim, nisi has sortiantur conditiones, illæ tanquam spuriæ, atque à Geometria prorsùs alienæ respuuntur.

Secundò, etiamsi, qui rerum geometricarum minùs periti sunt, putent lineas, superficies, & solida, motu punctorum, linearum, & superficierum reverà gigni, ita ut iidem existiment magnitudines illas tum primùm esse incipere, cùm primùm à tali motu producuntur: tamen ei qui rem penitùs inspexerit, manifestò patebit illam longè aliter se habere; quippe, posito tantùm spatio geometrico omnimodè extenso, (illud autem spatium, etiam nemine cogitante, in rerum natura ponitur) ponuntur statim tales magnitudines in tali spatio, etiam nemine cogitante & abstrahendo ab omni motu, atque omnes simul in ipso existunt absque omni intellectus operatione. At motus ad hoc inservit, ut per omnes partes ipsarum magnitudinum intellectum suc-

cessivè perducendo, illum faciliùs ad earumdem cognitionem pertrahat. Sic enim comparatus est humanus intellectus, ut vix quippiam, præcipuè si extensum est, simul ac totum apprehendat, sed tantùm successivè ac per partes; quod sanè est motu intellectivo moveri per tale extensum, nec tamen illud motu ipso in rerum natura ponitur, sed tantùm eodem mediante intelligitur, cùm priùs absque omni motu, atque ab intellectu independenter extaret.

Cùm ergo Euclides sphæram, conum, ac cylindrum; cùm Apollonius superficiem conicam; cùm Archimedes sphæroïdem, conoïdem, & helices; cùm alii conchoïdes, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, atque innumeras ejusmodi lineas & figuras per motus describunt; immò quidam lineam rectam per motum puncti, & circulum per motum rectæ lineæ: illi omnes sic intelligendi sunt, ut voluerint magnitudines ipsas priùs existentes, eodem modo quo à se conciperentur, aliorum intellectui exponere, seu ostendere; quod cùm aliter faciliùs non possent, hoc modo per motus, vel simplices, vel compositos omninò feliciter effecerunt.

Rursùs, quòd quædam lineæ aut quædam superficies, beneficio instrumentorum mechanicorum faciliùs describantur, quædam difficiliùs, id non facit ut illæ magis, hæ minùs sint geometricæ: ejusmodi enim mechanicæ descriptiones praxim respiciunt, & ad sensus externos referuntur, non autem ad puram Geometriam, quæ, ut sæpè diximus, solum respicit intellectum.

Quòd etiam ex iisdem lineis aut superficiebus, quædam simpliciores, quædam verò magis compositæ intellectui videantur; id etiam non impedit quin hæ & illæ æquè geometricæ dici debeant; quippe illud non ex natura talium magnitudinum, sed ex debilitate intellectus humani procedere manifestum est: ex nostra autem imperfectione rerum natura non immutatur.

Demus itaque hoc humanæ imbecillitati, quòd quæ simpliciori modo, saltem nostro respectu, solvi poterunt, eo solvi debeant; & contra talem regulam peccasse censeatur quisquis, cùm simpliciori loco uti posset, ad magis compositum recurrerit. Dicemus autem paulò pòst de distinctione locorum in magis aut minùs simplices ex constitutione Geometrarum qui nos hac in re præcesserunt, ut sic quis cuique quæstioni locus proprius sit innotescat.

Sed ut magis elucescat in hac materia locorum, nec facilitatem descriptionis, nec majorem aut minorem simplicitatem intellectionis alio modo attendendam esse quàm respectu imbecillitatis intellectus humani: videamus quis sit Geometriæ finis in locis ipsis constituendis. Constat autem nullum alium finem apud Geometras reperiri, nisi ut talium locorum beneficio ea detegant quæ intellectui latebant, ut quod verum est, verum esse; quod falsum est, falsum esse; quod fieri potest, fieri posse, & quo modo, & quot modis, manifestum fiat, idque semper in materia geometrica; quod tamen non impedit ne talis cognitio posteà materiæ sensibili applicetur. Ac planè ejusmodi loci primò & per se quædam sunt cognoscendi instrumenta; secundariò verò, & per applicationem mechanicam, illi sunt instrumenta faciendi. Et quidem, quòd ad cognitionem, scientiam, vel intelligentiam attinet, sive illa faciliùs, sive difficiliùs acquiratur, & sive per media simplicia, sive per composita, modò talia media sint clarè ac distinctè nota, qualia sunt quæ principiis purè geometricis innituntur, ita ut ab ejusmodi principiis incipiendo, & per media ipsa progrediendo, tandem ad intelligentiam illam deveniamus: certum est eandem fore perfectam, nec in genere intelligentiarum aut scientiarum, perfectiorem fore aliam, quamquam facilioribus aut simplicioribus mediis acquisitam. Atque omninò una eademque intelligentia seu scientia est, sed diversis mediis acquisita; quæ media, si faciliora aut simpliciora sint, vel secùs, hoc ex debilitate intellectus humani repetendum est; aliàs enim, si perfecta esset humana intelligendi potentia, tunc vel mediis non egeremus, vel certè & principia

cipia cognitionis, & media omnia, sed & ipsam cognitionem uno intuitu, nullo prorsùs labore nullaque difficultate haberemus, nec simplicis aut compositi ulla esset ratio.

Jam verò, si ad materiam sensibilem, seu ad praxim mechanicam applicetur cognitio aliqua geometrica, ita ut inde oriatur opus aliquod externum ex tali materia constans, multò minùs media aut operandi rationem accusabimus in ipso opere jam confecto, si illud his aut illis mediis æquè benè absolutum sit; nec ullo jure tali respectu quis dixerit hæc aut illa media esse respuenda tanquam erronea ac minimè legitima, sed tantùm alia aliis esse præferenda, quippe faciliora difficilioribus, & simpliciora magis compositis: quod sanè ex nostra agendi debilitate rursùs repetendum est; secus enim, positâ perfectâ agendi potentiâ, tunc agens & media & opus ipsum nullo labore consequeretur, ac proinde nec facilitatis nec difficultatis, sicuti nec simplicioris nec magis compositi ratio haberetur.

Propositum locum geometricum ad æquationem analyticam revocare, & qui simpliciores sint loci, aut secus, explicare.

Dicitur locus aliquis geometricus ad æquationem analyticam revocari, cùm ex una aliqua, vel ex pluribus ex illius proprietatibus specificis, quædam deducitur æquatio analytica, in qua una vel duæ vel tres ad summum sint magnitudines incognitæ.

Ac duplici quidem modo talis locus ad talem æquationem revocari potest. Primus modus absolutus est, alter respectivus.

Modus absolutus dicitur ille in quo unicus proponitur locus per se absolutè ac nullo aliorum respectu considerandus, ita ut æquatio ex eo deducta, ad ipsum præcisè pertineat, non verò ad ullum alium.

Modus respectivus ille est in quo duo communiter, aliquando etiam, sed rarò, tres vel plures loci proponuntur inter se comparandi, ut ex eorum sectione, vel tactione, vel datâ aliquâ distantiâ, vel omninò ex præscripta aliqua conditione, vel inter ipsos habitudine deducatur æquatio aliqua analytica quæ ad omnes istos locos simul tali respectu pertineat; ita tamen ut nihil referat si æquatio illa ad alios etiam locos pertinere possit.

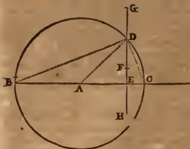
Et hi quidem modi ambo admodum universales sunt, continentque sub se singuli infinitos particulares modos, non solùm habita ratione multitudinis locorum geometricorum qui & genere, & specie, & numero infiniti sunt, sed etiam in unico ex talibus locis dantur plerumque innumeri tales modi, ex quorum singulis innumeræ æquationes deduci possunt; siquidem tot dabuntur modi particulares, quot dabuntur diversæ loci illius proprietates specificæ: unde numerus talium modorum non magis finitus est, quàm artificis in indagandis proprietatibus vis & industria; sed & ex infinita locorum ipsorum complicatione, id est, sectione, tactione, &c. innumeri etiam oriuntur modi respectivi, siquidem duorum tantùm diversimodè complicatorum modi nullo certo aliquo numero comprehendi possunt.

At verò, etiamsi nullus ex talibus modis ad nostrum institutum inutilis dici possit, si scilicet ad abundantiam doctrinæ respiciamus: tamen si necessitatis tantùm ratio habeatur, paucissimi sufficiunt, iique non admodùm intricati aut difficiles existunt.

Dicamus ergo pauca, primùm de modo absoluto, tum de respectivo, atque utrumque, selectis aliquibus exemplis ex locis nobilioribus desumptis, illustremus.

De Circulo.

Proponatur ergo primùm circulus cujus centrum ſit A, circumferentia B D C, & ſit una diametrorum B C, ad quam referre oporteat omnia circumferentiæ puncta, mediante aliqua æquatione analytica; ac fundamentum hujus relationis eſto proprietas illa, quòd omnis recta, putà D E, cadens à circumferentia in diametrum ad rectos angulos, ſit media proportionalis inter portiones diametri B E, E C; hæc ergo proprietas ſpecifica dabit unum aliquem ex modis particularibus circa circulum. Ex illo modo innumeræ deducentur æquationes, quales ſunt quæ ſequuntur.



Prima Æquatio.

A B eſto	b,
D E	a,
D E quadratum	a^2,
B E	e,
E C	$2b - e$,
B E C rectangulum	$2be - e^2$.

Ergo æquatio,

$+ 2be - e^2 \propto a^2$,

vel

$+ 2be - e^2 - a^2 \propto o$.

Item A B eſto	b,
D E	a,
D E quadratum	a^2,
C E	e,
B E	$2b - e$,
B E C rectangulum	$2be - e^2$.

Unde æquatio erit ut ſuprà,

$+ 2be - e^2 - a^2 \propto o$.

Itaque propoſitâ lineâ curvâ B D C, atque ab eadem in aliquam rectam utrinque terminatam B C, demiſsâ perpendiculari D E, ſi talis reperiatur æquatio qualem jam invenimus: tum pronuntiare licebit ejuſmodi curvam eſſe circuli circumferentiam; eſt enim reciproca proprietas, & ſimpliciter converti poteſt quæ de illa concipitur propoſitio, ut ſatis facilè conſideranti apparebit. Omnis autem recta data referre poterit $2b$.

Quòd ſi loco circumferentiæ circuli aſſumpta eſſet ellipſis; tum ſub iiſdem ſpeciebus, $2be - e^2$ fuiſſet ad a^2 in data ratione majoris aut minoris inæqualitatis, nempe ut tranſverſum latus ad rectum, quam rationem ſupponimus eſſe datam. Converſa etiam vera eſt.

Rursùs, ſi D E in B C incidiſſet ad angulos obliquos, reliquis ut ſuprà poſitis, in omni ratione haberetur ellipſis. Sed hæc ex conicis clara ſunt.

Secunda Æquatio.

Iiſdem poſitis: ex D E detrahatur data E F quæ vocetur e, & D F vocetur i, atque ideò D E quadratum erit $+ e^2 + 2ei + i^2$. Unde iiſdem veſtigiis inſiſtendo, talis erit æquatio, $+ 2be - e^2 \propto e^2 + 2ei + i^2$,

vel $-e^2 \begin{array}{l} + 2be - e^2 \\ - 2ei - i^2 \end{array} \propto o$.

Itaque ex tali vel ſimili æquatione concludemus circuli circumferentiam: immò, ſi $+ c^2 + 2ci + i^2$ vocetur una ſpecie a^2; (ſpecies enim illa de i quadrata eſt) tunc in primam æquationem omninò incidemus, ut manifeſtum eſt. Viciſſim, facile erit ex prima in hanc ſecundam devenire.

De ellipſi eadem quæ ſuprà enuntiabimus.

Hæc æquatio non eſt reciproca, unde eam in ordinem non reduximus; ſiquidem ex illa non minùs ellipſim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet: quod etiam infrà ſatis patebit.

At verò ad tales æquationes reducetur alia quæ ſequitur $+ 2be - u^2 \propto o$, intelligatur enim u^2 majus eſſe quàm e^2, & differentia eorum vocetur a^2. Fiet ergo manifeſtò hæc æquatio $+ 2be - e^2 - a^2 \propto o$, & hæc eſt prima præcedentium, ex qua ad ſecundam facilè deducemur. Hîc autem longitudo u æqualis erit rectæ B D, vel C D, cujus quadratum æquale eſt, vel duobus quadratis B E, D E ſimul, vel duobus C E, D E ſimul, quandoquidem ipſum u^2 æquale ponitur eſſe duobus ſimul $a^2 + e^2$.

Tertia Æquatio.

Iiſdem poſitis, eidem D E addatur in directum quævis D G, & tota E G data ſit ſub ſpecie c, & D G ignota vocetur i; atque ideò D E quadratum erit $c^2 - 2ci + i^2$. Unde iiſdem veſtigiis, $+ 2be - e^2 \propto c^2 - 2ci + i^2$, vel per antitheſim, $- c^2 \begin{array}{l} + 2be - e^2 \\ + 2ci - i^2 \end{array} \propto o$.

Ex tali ergo vel ſimili æquatione concludemus circulum.

Quòd ſi recta D G ſit data ſub ſpecie c, & E G ignota vocetur i: tunc iiſdem veſtigiis in eandem prorsùs æquationem incidemus. Idem accidet, ſi D E producatur versùs E in H, & vel tota D H ſit c, E H autem ſit i, vel è contrario, E H ſit c, D H autem ſit i.

Jam, vel $c - i$, vel $i - c$ eſto a; quo pacto dabitur prima æquatio, ut manifeſtum eſt.

Sicut autem ſecta eſt D E in F, vel producta in G vel H: ſic potuit ſecari vel produci C E, & vel ipſâ ſolâ manente D E inſectâ & ſine productione, vel etiam utraque tam C E quàm D E; quod ſatis per ſe atque ex præmiſſis clarum eſt. Idem de B E quàm de C E dictum eſto.

Quarta Æquatio: ex eo quòd omnes rectæ à centro circuli ad ejus circumferentiam ductæ, ſint æquales.

Iiſdem poſitis, eſto A E ignota ſub ſpecie y; & quoniam A D ſeu A B eſt b, & D E eſt a, ideò talis erit æquatio, $b^2 \propto a^2 + y^2$, ſive $b^2 - a^2 - y^2 \propto o$. Itaque, ex ejuſmodi æquatione concludemus circulum, quia illa reciproca eſt.

Jam verò, ut ſuprà, eſto a æqualis, vel $c + i$, vel $c - i$, vel $i - c$, prout ſcilicet vel E F erit c, & D F erit i; vel E G erit c, & D G erit i; vel D G erit c, & E G erit i: tumque habebimus alterutram ex duabus ſequentibus æquationibus $\begin{array}{l} + b^2 \\ - c^2 \end{array} - 2ci \begin{array}{l} - i^2 \\ - y^2 \end{array} \propto o$, vel $\begin{array}{l} + b^2 \\ - c^2 \end{array} + 2ci \begin{array}{l} - i^2 \\ - y^2 \end{array} \propto o$: ex quibus circulum quoque concludere licet, modò ſub ſimilibus ſpeciebus proponantur; ſic enim illæ ſunt reciprocæ, ſeu ſpecificæ.

Eodem modo hic A E ſecari vel produci poterit quo ſuprà dictum eſt de E D, B E, vel C E.

Quòd ſi proponatur aliqua ex his tribus $+ d^2 - fi - u^2 \propto o$, vel $+ d^2 + fi - u^2 \propto o$, vel $- d^2 + fi - u^2 \propto o$: tunc licebit illas ad

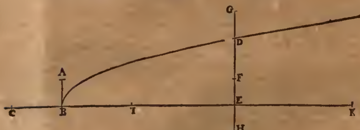
alterutram ex duabus præmissis postremis reducere. Nam $+ d^2$ intelligetur æquale esse $\begin{matrix} + b^2 \\ - c^2 \end{matrix}$, vel $- d^2$ æquabimus $\begin{matrix} + b^2 \\ - c^2 \end{matrix}$; at $+ n^2$ ponemus æquale esse $\begin{matrix} + i^2 \\ + y^2 \end{matrix}$: unde sequetur id quod propositum est.

Non sunt tamen illæ tres reciprocæ, siquidem ex illis non minùs ellipsim, parabolam aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet. Licebit autem quartam hanc æquationem ad primam aut ad duas sequentes reducere, posito quòd $b - y$ sit e, ut satis patebit ei qui attendere voluerit. Et reciprocè, tres priores poterunt ad quartam reduci, posito quòd $b - e$ sit y.

Hæc de circulo ad æquationem analyticam reducto, pauca quidem, sed ea præcipua sufficiant. Nunc pauca etiam de parabola dicamus.

DE PARABOLA.

ESTO parabola B D, cujus latus rectum sit A B, diameter B E, sive illa sit axis, sive non; atque ad hanc diametrum ordinatim applicata sit D E. Oporteat autem omnia parabolæ puncta referre ad diametrum B E, mediante aliqua æquatione analyticâ, ac fundamentum relationis esto proprietas illa, quòd quadratum applicatæ cujusvis, putà D E, æquale sit rectangulo contento sub latere recto A B & sub B E portione diametri interceptâ inter verticem B & ordinatam D E; quæ proprietas parabolæ specifica est, dabitque modum unum particularem ex quo multæ deducentur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.



Prima Æquatio.

A B esto	b,
D E	a,
D E quadratum	a^2,
B E	e,
A B E rectangulum	$b e$.

Æquatio.

$b e \propto a^2$,

vel

$b e - a^2 \propto 0$.

Itaque, propositâ curvâ aliquâ B D, atque in ea sumpto quovis puncto D; tum ductâ quâpiam rectâ B E quæ ad unas quidem partes B terminetur ad eandem curvam, ad alteras autem partes sit indefinita: si ducta recta D E datæ cuipiam rectæ terminatæ A B parallela, media proportionalis sit inter A B, B E: pronuntiabimus curvam illam esse parabolam. Est enim reciproca proprietas, ex vi hypothesis, quòd D E sit semper datæ parallela; aliàs enim posset æquatio præmissa circulum exhibere, ut notatum est ad secundam circuli æquationem, dum proposita est æquatio $2 b e - n^2 \propto 0$. Hoc autem planè manifestum est.

Secunda & tertia Æquatio.

Nec aliter habebuntur secunda & tertia æquatio, quàm in circulo dictum est, divisâ scilicet DE in F, aut eâdem productâ in G vel H; quo pacto talis erit secunda æquatio $be \infty c^2 + 2ci + i^2$, vel $-c^2 + be - 2ci - i^2 \infty o$, atque id ex divisa DE.

Tertia autem æquatio ex DE productâ talis erit $be \infty + c^2 - 2ci + i^2$, vel $- c^2 + be + 2ci - i^2 \infty o$.

Et hæ quidem omnes æquationes sub speciebus exhibitis sunt reciprocæ, existente rectâ DE datæ alicui rectæ semper parallelâ; unde ex quavis illarum parabolam concludere semper licebit, speciebus tamen immutatis.

Quòd si recta BE dividatur in I, vel eadem producatur, sive versùs B in C, sive versùs E in K, reliquis eodem modo quo suprà positis, multæ inde orientur æquationes, quædam scilicet manente DE indivisa ac sine productione, reliquæ autem ipsâ DE divisâ vel productâ. In exemplo enim esto BE divisa, ac BI esto data sub specie d, IE autem esto y; unde rectangulum sub AB, BE, quia æquale est duobus simul, ei scilicet quod continetur sub AB, BI, & ei quod continetur sub AB, IE, talem induet speciem $bd + by$: itaque positâ DE indivisâ sub specie a, talis erit æquatio $bd + by \infty a^2$, vel $bd + by - a^2 \infty o$. At positâ DE divisâ sub specie $c + i$, æquatio erit ejusmodi $bd + by \infty c^2 + 2ci + i^2$; vel $bd - c^2 + by - 2ci - i^2 \infty o$. Quod si CB sit data sub specie d, CE autem sit y, erit ipsius BE species $y - d$: contrà autem, si CE sit d, & CB sit y, erit ipsius BE species $d - y$; hinc autem facile erit reliquas æquationes deducere, atque ex singulis, sub iisdem speciebus, parabolam concludere.

Ad prædictas autem æquationes reduci poterunt quæcunque ad circulum suprà, tam directè quàm indirectè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur: at propter talem permutationem, æquationes illæ non erunt reciprocæ. Sed hoc indicasse sufficiat; nunc ad hyperbolam progrediamur.

DE HYPERBOLA.

Ex infinitis modis quibus hyperbola aliqua ad rectam quandam referri potest, duo videntur præcipui: alter quidem, cùm illa ad aliquam ex suis diametris refertur; alter autem, cùm illa refertur ad unam ex suis asymptotis.

Esto hyperbola BD, cujus vertex sit B, rectum latus AB, transversum BC, centrum L in medio ipsius BC, cæteris ut suprà in parabola positis. (Vide figuram parabolæ, & finge esse hyperbolam) nisi quod distinctionis gratiâ, species transversi lateris hîc erit f, unde CEB rectanguli species erit $fe + e^2$. Est autem in omni hyperbola tale rectangulum ad quadratum cujusvis ordinatæ DE ut transversum latus ad rectum: in speciebus ergo, ut f ad b, ita $fe + e^2$ ad a^2. Ductis itaque extremis inter se, tum etiam mediis inter se, fiet æquatio universalis ad omnem hyperbolam pertinens.

Prima Æquatio.

$$bfe + be^2 \infty fa^2, \text{ sive } bfe + be^2 - fa^2 \infty o.$$

Ex tali igitur æquatione concludemus hyperbolam cujus latus rectum erit b, & transversum f, existente a ordinatâ ad diametrum, e verò intercepta inter ordinatam & verticem, sive diameter sit axis, sive non, prout angulus ad E rectus erit vel obliquus.

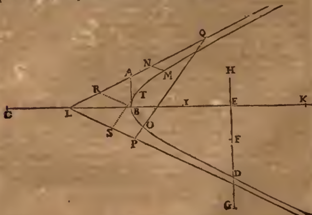
Secunda Æquatio.

Secunda æquatio ex divisâ D E in F, ita ut species rectæ D E sit $c + i$, talis erit, $bfe + be^2 \propto fc^2 + 2cfi + fi^2$, sive $- fc^2 + bfe + be^2 - 2cfi - fi^2 \propto 0$.

Tertia Æquatio.

Tertia æquatio ex D E productâ in G vel H, ita ut species ipsius D E sit $c - i$, vel $i - c$, talis erit $bfe + be^2 \propto fc^2 - 2cfi + fi^2$, sive $- fc^2 + bfe + be^2 + 2cfi - fi^2 \propto 0$.

Poterit autem non tantùm recta B E, sed etiam recta D E, vel utraque dividi, vel produci; unde multæ nascentur æquationes magis intricatæ, quas, quia vix utiles esse possunt, curioso Analystæ relinquimus.



Quarta Æquatio.

Speciatim verò resumamus primam hyperbolæ æquationem, putà $bfe + be^2 - fa^2 \propto 0$, & ponamus transversum latus f æquale esse lateri recto b, quod accidit in quacunque hyperbola cujus asymptori sunt ad angulos rectos. Itaque divisâ æquatione per f vel b, fiet hæc æquatio simplicior, $be + e^2 - a^2 \propto 0$, vel $fe + e^2 - a^2 \propto 0$.

Ex tali ergo æquatione concludere licebit hyperbolam rectangulam, cujus latus rectum erit b, ordinata a, sive ad axem, sive ad aliam quamcunque diametrum, & latus transversum erit f æquale ipsi b, e autem erit quævis intercepta inter applicatam seu ordinatam & verticem.

At ex hac speciali ac simplici æquatione multæ aliæ deduci possunt, si scilicet dividatur D E in F, vel ipsa D E producatur in G vel H, vel si B E dividatur in I, aut ipsa eadem B E producatur in K vel in L; vel rursùs, si utraque tam D E quàm B E dividatur aut producatur, vel denique multis aliis modis, pro majori & majori Analystæ sagacitate.

Quinta Æquatio.

Resumamus adhuc primam hyperbolæ æquationem, nempe $bfe + be^2$

$- fa^2 \infty 0$, oportearque talem æquationem reddere ſimplicem, ita tamen ut illa ad quamcunque hyperbolam pertineat.

Intelligatur eſſe ut b ad f, ita a^2 ad u^2, unde fa^2 æquale erit ipſi bu^2. Itàque in æquatione, loco ipſius fa^2 ſuccedat ipſum bu^2, & omnia applicentur ad b, ac tum $fe + e^2 - u^2 \infty 0$.

Ex tali ergo æquatione licebit non ſolum hyperbolam rectangulam, ut ſuprà, directè concludere, ſed etiam per fictionem poterimus eandem æquationem ad quamcunque hyperbolam extendere, cujus latus tranſverſum ſit f, latus autem rectum ſit recta quævis, & e ſit quæcunque intercepta inter ordinaram & verticem; at ordinata non erit u (niſi ſi latus rectum æquale ponarur eſſe lateri tranſverſo f, ut fiat hyperbola rectangula.) Verùm ut ipſa ordinata habeatur, fiet ut tranſverſum latus f ad rectum quod vocabimus b, ita u^2 ad aliud quod vocabitur a^2, ac tum a erit ipſa ordinata: hoc autem ex præmiſſis manifeſtum eſt. Ex tali enim analogia fiet $fa^2 \infty bu^2$: at in æquatione ſimplici propoſita habemus $fe + e^2 - u^2 \infty 0$; quibus per b multiplicatis invenitur $bfe + be^2 - bu^2 \infty 0$. Jam loco ipſius bu^2 ſuccedat fa^2, & ſic tandem fiet prima hyperbolæ æquatio, nempe $bfe + be^2 - fa^2 \infty 0$.

Porrò ad prædictas æquationes reduci poterunt quæcunque ſuprà ad circulum & ad parabolam directè aut indirectè pertinebant, ſi ſpecies debitè atque ex arte permutentur, ut convenientem ſortiantur interpretationem: at propter talem mutationem non erunt reciprocæ æquationes illæ; omninò enim nulla æquatio reciproca eſt, niſi ſub iiſdem omninò ſpeciebus ſub quibus illa ad locum aliquem directè pertinet.

In analyſi ſpecioſa communiter liberum eſt ex infinitis hyperbolarum ſpeciebus eam eligere quam libuerit: quo ſanè caſu præſtabit rectangulam aſſumere, propter illius majorem ſimplicitatem. Aliquando etiam ſectio ipſa ex hypotheſi data eſt, ſed rarò, putà cum beneficio analyſeos quæritur aliqua ejuſdem ſectionis proprietas, ut ſi quis ex dato puncto extra axem datæ ſectionis, minimam rectam quæ ad ipſam ſectionem duci poſſit inquirat, incidet ille in æquationem ſolidam quæ ſolvi poterit beneficio circuli & hyperbolæ, ita ut vel circulus quivis, vel quæcunque hyperbola ad arbitrium eligi poſſit. Eligetur ergo ipſa hyperbola data, cui circulus conveniens ex arte accommodabitur: aliàs enim peccatum multi exiſtimarent, ſi neglectâ ipſâ hyperbolâ datâ, aſſumeretur vel alia hyperbola vel parabola vel ellipſis, ut liberum eſt in omni æquatione ſolida; at hunc rigorem, ut elegantiorem concedimus, ſic non omninò neceſſarium exiſtimamus, propter rationes ſuprà allatas, cùm quid geometricum cenſeri debeat examinaremus.

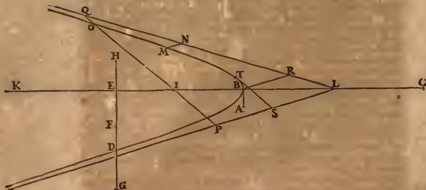
Sexta Æquatio.

Iiſdem poſitis, ſunto hyperbolæ aſymptoti L N, L P ad angulum quemcunque; atque ex vertice B ducatur recta B R parallela uni aſymptotωn L D, quæ B R occurrat alteri aſymptotωn L N in puncto R. Itaque, ex hypotheſi quòd data ſit hyperbola, data quoque erit utraque L R, R B, unde & rectangulum ſub ipſis datum eſt, ſit ſpecies illius b^2. Tum ſumpto in hyperbola quocunque puncto M, ducatur recta M N parallela cuivis aſymptoto, putà L P, occurrenſque alteri L N in puncto N; atque ſpecies rectæ L N eſto a, ſpecies autem rectæ N M eſto e. Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum ſub L R, R B æquale eſt rectangulo ſub L N, N M: dabitur hæc æquatio hyperbolarum generi propria ſeu ſpecifica $b^2 \infty ae$, ſeu $b^2 - ae \infty 0$. *Vide Figur. ſequentem.*

Ex tali ergo æquatione ſemper hyperbolam concludere licebit, cujus b^2 erit rectangulum ſub L R, R B, at a erit quævis portio unius aſymptotωn,

putà L N ad centrum terminata, *e* verò recta intercepta inter hyperbolam & alterum ipsius speciei *a* extremum, quæ tamen recta *e* alteri asymptoto parallela existet, putà asymptoto L P existente *e* ipsâ rectâ M N.

Quòd si recta L N dividatur vel producatur, ut species illius sit vel $c + i$, vel $c - i$, vel $i - c$, manente N M indivisâ; aut si hæc N M dividatur vel producatur, ut species illius sit $d + u$, vel $d - u$, vel $u - d$ manente L N indivisâ; aut si utraque L N, N M dividatur aut utraque producatur, aut denique altera earum dividatur, altera producatur: habebuntur inde multæ æquationes inventu faciles, atque omni hyperbolæ specificæ; unde ex qualibet illarum hyperbolam concludere licebit.



Apparet quoque tales æquationes ad quamcunque hyperbolam posse pertinere, nisi aut angulus asymptoton datus sit, aut rectum latus, aut transversum, aut alia quædam proprietas, quæ cum dato b^2, hyperbolæ ipsius speciem determinare possit.

Septima Æquatio.

Iisdem adhuc positis, ducatur quæcunque recta P O Q secans hyperbolam in O, asymptotos autem in P & Q; atque illi P Q parallela existat T S tangens hyperbolam in T, occurrensque alteri asymptoton, putà L P in S; & data sit positione & magnitudine ipsa T S, cujus species sit *b*, ex hypothesi quòd hyperbola sit quoque data; sit etiam rectæ O P species *a*, rectæ verò O Q species esto *e*. Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum P O Q æquale est quadrato tangentis T S, fiet hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica $b^2 \infty ae$, seu $b^2 - ae \infty 0$.

Ex tali ergo æquatione, eadem quæ suprà in sexta concludere licebit, atque id tam divisis ipsis P O, O Q, quàm iisdem productis.

DE ELLIPSI.

In ellipsi præcipuæ æquationes non multùm differunt à tribus circuli prioribus æquationibus, ut ibi monuimus. Omninò autem, non alio modo se habet circulus ad ellipses, quo hyperbola rectangula ad alias hyperbolas minimè rectangulas. Sicuti ergo in tali hyperbola rectangula æquatio simplex fuit, quæ respectu totius generis hyperbolarum composita extitit, sic in circulo,

culo, prædictæ priores tres æquationes simplices fuere, quæ in genere ellipsium fient compositæ. At illud hîc breviter exponamus.

Prima Æquatio.

Esto ellipsis BD, cujus vertex B, rectum latus AB, diameter BC, sive illa sit axis sive non, DE ordinata ad illam diametrum, cui parallela sit AB; species autem ipsius AB esto b; ipsius BC, f; ipsius DE, a; ac tandem ipsius BE, e: unde rectanguli CEB species erit $fe - e^2$. At in omni ellipsi, ut diameter BC ad latus rectum AB, ita rectangulum CEB ad quadratum DE; itaque in speciebus, ut f ad b, ita $fe - e^2$ ad a^2: hinc æquatio $bfe - be^2 \propto fa^2$, sive $bfe - be^2 - fa^2 \propto o$.

Poterit autem vel recta BE, vel recta DE, vel utraque dividi vel produci; unde multæ nascentur æquationes inventu non admodum difficiles; sed id indicasse sufficiat.

Ex ejusmodi ergo æquationibus semper ellipsim concludere licebit, cujus latus rectum erit b, diameter f, ordinata ad diametrum a, vel quæcunque ipsam a in æquatione referet, ac tandem intercepta inter ordinatam & verticem erit e, vel quæcunque ipsam e in æquatione referet. Immò, dabitur quoque ipsius ellipsis species, ex hypothesi quòd angulus ABC vel DEC datus sit; si tamen angulus ille rectus esset, & rectæ b & f æquales, loco ellipsis haberemus circulum: quod demonstrare non erit difficile.

Secunda Æquatio.

Potest præmissa prima æquatio reddi simplicior, si fiat ut b ad f, ita a^2 ad u^2; unde $fa^2 \propto bu^2$. Itaque in æquatione illa, loco ipsius fa^2 succedat illi æquale bu^2, ac tum $bfe - be^2 - bu^2 \propto o$: omnia applicentur ad b, fietque æquatio simplex $fe - e^2 - u^2 \propto o$.

Et hæc quidem æquatio directè pertinet ad circulum, at indirectè & per fictionem pertinere poterit ad quamcunque ellipsim, cujus diameter erit f, latus autem rectum erit recta quæcunque; at verò ordinata non erit u, (nisi latus rectum æquale sit ipsi f diametro, & angulus DEC obliquus) sed ut ipsa habeatur ordinata, fiet ut f ad latus rectum quod vocabimus b, ita u^2 ad aliud quod vocetur a^2, ac tum a erit ipsa ordinata; ex tali enim analogia fiet $fa^2 \propto bu^2$: at æquatio simplex erat $fe - e^2 - u^2 \propto o$, quâ in b ductâ, fit $bfe - be^2 - bu^2 \propto o$. Jam loco ipsius bu^2 succedat ipsi æquale fa^2, & sic tandem fiet prima ellipsis æquatio $bfe - be^2 - fa^2 \propto o$.

Ad prædictas æquationes reducentur quæcunque suprà ad circulum, ad parabolam & ad hyperbolam directè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur, at iis conditionibus de quibus sæpiùs suprà dictum est.

Corollarium.

IN omnibus præmissis æquationibus liquidò constat, quatuor curvas ex quibus illæ deductæ sunt, nempe circuli circumferentiam, parabolam, hyperbolam, & ellipsim ad suas diametros relatas eo modo quo suprà, non transcendere secundum gradum, hoc est quadratum incognitarum magnitudinum *a, e, i, u*, &c. Quòd si quis easdem ad alias rectas quàm ad ipsas diametros referat, ille rursùs in similes, sive ejusdem gradus æquationes incidet; unde in universum, ex talibus æquationibus aliquam ex ipsis quatuor curvis semper concludere licebit: & hoc sufficit ad omnia loca plana & solida Antiquorum invenienda & componenda; si tamen his æquationibus paucæ addantur quæ pertinent ad lineas rectas, dum illæ ad alias rectas referuntur, quæ sanè æquationes ipsum eundem secundum gradum non excedunt; at verò ad hanc inventionem & compositionem requiritur Analysta non vulgaris. Sed hoc etiam indicasse sufficiat: nunc pauca de locis lineatibus ad æquationes geometricas absoluto modo revocatis supersunt dicenda, quod nos in conchoïde Nicomedis tantùm exequemur, siquidem illa etiam in sequentibus ad nostrum institutum satis erit, videturque eadem esse locorum omnium linearium simplicissimus.

De Conchoïde Nicomedis.

ETsi multa sint linearum curvarum genera quæ in infinitas species multiplicentur, tamen hac in parte, conchoïdum genus omnia alia genera longissimè, immò infinities infinitè superat. Siquidem nulla datur curva ex qua infinitæ conchoïdes deduci non possint, atque omnes specie, immò etiam genere differentes; ac præterea, cujusvis conchoïdis infinitæ rursùs dantur conchoïdes specie ac genere inter se distinctæ, ita ut propositâ quâcunque curvâ putà circuli circumferentiâ, statim ex ea innumeræ conchoïdes deducantur, quæ quamquam genere inter se distinctæ, tamen omnes sint primi cujusdam ordinis; tum ex unaquaque illarum innumeræ rursùs aliæ nascantur genere diversæ, quæ omnes secundi cujusdam ordinis existant, ex quibus singulis eodem modo innumeræ tertii cujusdam ordinis oriuntur; atque ita in infinitum infinities abit talis multiplicatio.

Nos verò ex omnibus illis generibus duo tantùm seligere decrevimus, quæ quamquam simplicissima existant, tamen illa per se singula ad æquationes analyticas quinti ac sexti gradus, hoc est quadrato-cubicas ac cubo-cubicas solvendas sufficiunt; ita ut beneficio cujusvis illorum generum possit angulus quicunque rectilineus in quinque partes æquales dividi. Horum generum prius erit illud cujus conchoïdes vulgò vocantur à Nicomede earum inventore, suntque conchoïdes circulares primi ordinis, de quibus Eutocius in Archimede, necnon alii permulti authores scripsere; quandoquidem per medium talis conchoïdis Nicomedes ipse famosissimum problema de cubo duplicando solvere aggressus est, quamquam sanè modo non usque adeò legitimo, cùm tale problema ad lineas simpliciores, putà conicas, pertineat: solidum enim illud est tantùm, at conchoïdes omnes sunt loci lineares. Alterum duorum generum conchoïdum nostrarum erit parabolicarum, de quibus primus egisse putatur Renatus *des Cartes* in sua Geometria, qui etiam modo prorsùs legitimo iisdem usus est ad problemata analytica sexti gradus solvenda, ad quem gradum illa quoque ascendere cogit quæ sunt quinti gradus; quod sanè ei liberum, at non omninò necesse fuit, sed modum quo aliter ab iis se expediret, aut non advertit, aut aliqua de causa neglexit.

In his duobus conchoïdum generibus hoc notatu dignum accidit, quòd quamquam simplicius sit circulare quàm parabolicum, si linearum genitricium ratio habeatur, (simplicior enim est circuli circumferentia quàm parabola) tamen, cùm ad æquationes ventum fuerit, reperiuntur illæ in conchoïde parabolica simpliciores quàm in circulari; non quidem ratione gradus ad quem illæ ascendunt, qui in utraque suâ naturâ sextus est existente æquatione universali, sed ratione multiplicitatis affectionum, seu homogeneorum per signa + & — distinctorum; at illud magis in sequentibus patebit.

Cùm autem dicimus ejusmodi conchoïdes ad sextum gradum pertinere, hoc intelligendum est dum illæ ad æquationes analyticas revocantur modo respectivo, non autem simplici seu absoluto; quod etiam rursùs infrà clariùs innotescet.

Antequàm ad æquationes accedamus, pauca præmittenda sunt de natura conchoïdum in universum; tum etiam pauca de conchoïde circulari in specie.

In universum ergo concipiatur quævis linea curva in plano jacens, quod planum moveri possit unà cum eadem curva motu quolibet tam lationis quàm circumvolutionis: hæc linea vocetur genitrix, à qua conchoïs describenda denominabitur, planum verò posteà vocabitur planum mobile: in hoc plano mobili notetur punctum quodcunque intra vel extra genitricem, quod vocetur polus mobilis: per hunc polum transeat quædam linea recta quæ circa talem polum liberè moveri possit, & tamen in ipso plano semper jaceat, ut recta illa sit instar regulæ mobilis quam communiter nomine Arabico vocare solent *alhidadam* in permultis instrumentis; hanc posteà vocabimus regulam. Concipiatur deinde quæcunque linea, recta vel curva, in aliqua superficie jacens, (nos hanc superficiem planam assumimus, quam tamen curvam etiam assumere licebit) quæ superficies, quia immobilis statui debet saltem ad faciliorem intelligentiam, dicatur superficies immobilis; & linea in ea concepta dicatur semita, quandoquidem per illam ac secundùm eandem moveri debet polus plani mobilis, dum planum illud posteà motu lationis secundùm præscriptas leges aliquas deferetur. Prætereà, in superficie immobili extra semitam, ultrà citráve, notetur punctum quodcunque quod vocetur polus immobilis, circa quem movebitur regula de qua jam dictum est, ita ut eadem per duos polos, mobilem scilicet & immobilem, perpetuò transeat, jaceatque interim semper in plano mobili.

His positis, si statuamus planum mobile cum immobili, ita ut polus mobilis existat in semita, & regula per utrumque polum transeat, tum moveatur planum mobile secundùm certam quandam ac constitutam legem, quæ tamen lex ad arbitrium Geometræ initio pendet, modò posteà illam inviolatam servet, polo mobili secundùm semitam delato, neque ab ea usquam evagante, notenturque interim puncta in quibus regula genitricem secat, ac per omnia illa sectionum puncta, linea duci intelligatur: hæc erit conchoïs de qua nunc agimus.

Fieri autem potest, ac reverà fit sæpissimè, ut in una eademque plani mobilis atque ideò lineæ genitricis positione, regula ipsam genitricem in duobus vel pluribus punctis secet; unde etiam accidit non raro, ut conchoïs inde orta non sit unica linea continua, sed duplex, triplex, aut multis modis multiplex, ita ut partes illius aliquando, etiam in infinitum productæ, nunquam sibi invicem occurrant; aliquando, è contrario, illæ partes se secent, & aliquando eædem se tangant tantùm: sed & illud fieri potest, ut aliqua positione, regula lineæ genitrici nullo modo occurrat, quo pacto conchoïs non erit ad utramque partem infinitè extensa, vel certè ipsa erit interrupta, non verò continua. Sed hæc indicasse sufficiat in tam vaga atque multiplici linearum infinitis modis infinitarum descriptione.

In ſpecie. Ponamus in aliqua ex tribus his figuris, planum mobile eſſe illud in quo eſt circulus cujus diameter eſt C D vel G F; atque in eo plano lineam genitricem eſſe ejuſdem circuli circumferentiam; polum mobilem eſſe ipſius centrum B vel E, & regulam eſſe rectam A B, vel A E. Ponamus deinde planum immobile eſſe id in quo eſt recta B E in infinitum utrinque producta, quæ recta eadem ſit ſemita per quam feratur polus mobilis B vel E, atque unà cum ipſo planum mobile deferens circulum C D vel G F, polus verò immobilis in hoc plano immobili eſto A, per quem tranſeat regula A B vel A E.

Manifeſtum eſt ergo, quòd dum centrum circuli, ſive polus mobilis feretur ſecundùm ſemitam B E, regula per hunc polum mobilem ac per immobilem A ſemper tranſiens, poſitionem ſuam continuò mutabit. Jam lex motus eſto, ut planum mobile ſemper inter movendum jaceat ſecundùm ſuam planitiem in plano immobili; hæc enim lex ſola ſufficit ad certam atque

que indubitatam deſcriptionem. Hoc pacto, quia in quacunque circumferentiæ genitricis poſitione, regula ipſam circumferentiam in duobus punctis, nec pluribus, ſemper ſecat, quorum punctorum unum eſt ad unas partes ſemitæ versùs polum immobilem A, quale eſt punctum D vel G, alterum ad alteras partes ejuſdem ſemitæ, quale eſt C vel F: fit neceſſariò ut conchoïs circularis inde orta componatur ex duabus lineis ad utraſque partes ſemitæ B E exiſtentibus, quarum linearum unaquæque ex utraque parte in infinitum extenditur ſic ut ſemita utriuſque aſymptotos exiſtat. Illæ lineæ in figuris præmiſſis ſunt C T F, D G S, quarum exterior C T F (exteriorem voco eam quæ reſpectu poli immobilis A jacet ad alteras partes ſemitæ B E) circa verticem C, ad aliquam diſtantiam ex utraque parte ipſius verticis, interiùs cava eſt versùs ſemitam B E: eſt autem vertex C punctum id in quo recta A B ad ſemitam B E perpendiculariter producta occurrit ipſi conchoïdi; at ultra talem diſtantiam mutatur cavitas ipſa, fitque ad partes exteriores, convexitas verò reſpicit ſemitam uſque in infinitum. At conchoïs interior D G S, præter id quod de exteriori jam diximus, quibuſdam accidentibus obnoxia eſt, prout recta A B vel ſemidiametro D B major eſt, vel eidem æqualis, vel ipſâ major; exiſtente enim A B majore quàm D B, idem accidit quod de exteriori jamjam attulimus, quodque in prima trium figurarum ſatis apparet; exiſtentibus verò rectis A B, D B æqualibus, ut in ſecunda figura, tunc conchoïs interior ad punctum A vel D qui vertex eſt, angulum conſtituit quolibet acuto rectilineo minorem, ut ſic conchoïs ex duabus lineis ad verticem A D ſeſe tangentibus componi videatur, quarum utraque ad partes ſemitæ B E ſemper convexa eſt uſque in infinitum. Verùm, exiſtente rectâ A B minore quàm D B, ut in tertia figura, tunc conchoïs inter puncta A, D ita involvitur, ut ſpatium comprehendat laquei inſtar, cujus funiculi poſtquàm ad punctum A decuſſatim ſeſe ſecuerunt, abeunt ex utraque parte in infinitum, ita tamen ut convexitas eorum ad partes ſemitæ B E ſemper reſpiciat.

Sic ergo ſe habet conchoïs circularis Nicomedis. Quòd ſi polus mobilis non ſit centrum circumferentiæ genitricis, ſed quodvis aliud punctum in plano mobili aſſumptum: fient aliæ conchoïdes circulares à prædicta & à ſe invicem diverſæ in infinitum; quod tamen indicaſſe ſufficiat. Sed & ſemita poterit eſſe non recta linea ut B E, verùm alia circuli circumferentia in plano immobili jacens; quo etiam pacto aliæ atque aliæ conchoïdes circulares gignentur, quales habentur apud Vietam in ſupplemento Geometriæ, quamquam ſanè idem, ſicuti de Nicomede diximus, modo non uſque adeo legitimo quàm par fuerat uſus eſt, in ſolvendis ſcilicet problematis ſuâ naturâ ſolidis, cùm conchoïdes illæ ſint loci lineares. Sed hoc rursùs indicaſſe ſufficiat, ut inde poſſit quivis colligere quàm immenſa ſit conchoïdum, etiam circularium, omnium inter ſe ſpecie differentium multitudo: nunc ad æquationes analyticas modo abſoluto, ipſam Nicomedeam revocemus, ut protinùs ad conchoïdem parabolicam deveniamus. Itaque in conchoïde exteriori C T F cujuſvis ex tribus guris præmiſſis ſunto ſpecies:

A B	b,
B C, E F	c,
F H, B I	a,
F I, B H	e,

Et quoniam ut recta A I ad I F, ita eſt F H ad E H: erit in ſpeciebus,

ut $b + a$ ad c, ita a ad $\frac{ac}{b+a}$

E H $\frac{ac}{b+a}$

E H quadratum $\frac{a^2c^2}{b^2 + 2ba + a^2}$.

Ponitur autem triangulum E F H eſſe rectangulum. Hinc æqualitas in quadratis laterum,

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2c^2}{b^2 + 2ba + a^2}$$

& omnibus in communem diviſorem ductis,

$$b^2c^2 + 2bc^2a + c^2a^2 \propto b^2a^2 + 2ba^3 + a^4 + a^2e^2;$$

$$\text{vel } b^2c^2 + 2bc^2a \begin{matrix} + c^2a^2 \\ - b^2a^2 \end{matrix} - 2ba^3 - a^4 - a^2e^2 \propto 0:$$

unde ex tali æquatione ſub iiſdem ſpeciebus licebit pronuntiare ipſam æquationem ad conchoïdem circularem Nicomedis exteriorem pertinere.

Neque verò in conchoïde interiori DGS magna erit differentia; omnibus enim ritè ordinatis differet æquatio, non quidem ſpeciebus, ſed ſpecierum affectionibus ſecundùm ſigna + & —, idque in quibuſdam affectionibus tantùm, ut ex formula ſequenti apparet. Sunto ergo ſpecies:

AB eſto b,
BC, EF, EG c,
GO, BP a,
GP, BO e,
Ut $b - a$ ad c, ita a ad $\frac{ac}{b-a}$
OE $\frac{ae}{b-a}$

OE quadratum $\frac{a^2e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$
Ponitur autem triangulum EOG eſſe rectangulum. Unde fiet æqualitas in quadratis laterum, nempe
$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$
& omnibus ductis in communem diviſorem,

$$b^2c^2 - 2bc^2a + c^2a^2 \propto b^2a^2 - 2ba^3 + a^4 + a^2e^2;$$

$$\text{vel } b^2c^2 - 2bc^2a \begin{matrix} + c^2a^2 \\ - b^2a^2 \end{matrix} + 2ba^3 - a^4 - a^2e^2 \propto 0.$$

Itaque ex ejuſmodi æquatione ſub iiſdem ſpeciebus concludemus conchoïdem circularem Nicomedeam interiorem, ex qua æquatio illa ortum duxerit.

Porrò multis modis, immò innumeris, variari poſſunt magnitudines ignotæ a & e; quippe ſi altera earum vel ambæ datâ magnitudine augeantur vel minuantur, ut factum eſt ſuprà in circulo, parabola, hyperbola, & ellipſi. Finge enim productam eſſe HF in K, ita ut FK data ſit ſub ſpecie d, HK autem in ſpecie ſit i: tum verò HF erit in ſpeciebus $i - d$ quæ priùs erat a; unde loco ſpeciei a & graduum ejus in æquatione, ſubſtitui poterunt $i - d$ & gradus ipſius; quo pacto fiet alia quæpiam æquatio à præmiſſis diverſa, ac multò pluribus nominibus conſtans, quæ ſub ſuis ſpeciebus ad conchoïdem Nicomedis pertinebit. Idem etiam concludemus ſi FH producatur in L, & ipſius HL ſpecies ſit d, ipſius autem FL ſpecies ſit i, ſic enim rursùs HF erit in ſpecie $i - d$, &c. Quòd ſi iiſdem productis, HK vel FL data ſit ſub ſpecie d, & ipſius FK vel HL ſpecies ſit i, erit ipſius FH ſpecies $d + i$ quæ priùs erat a; unde, &c. ut ſuprà.

Supple punctum V. in figura. Potuit etiam dividi FH in V, ita ut ex duabus portionibus FV, VH, altera, putà VH, data eſſet ſub ſpecie d, altera FV ignota ſub ſpecie i; atque ita ipſius HF ſpecies fuiſſet $d + i$ quæ priùs erat a; unde, &c. ut ſuprà.

Nec minùs produci potuit recta FI vel HB in M, vel eadem dividi in N. Sed hoc indicaſſe ſufficiat.

Eodem modo ratiocinabimur de rectis GO & GP vel OB, quo de rectis FH & FI vel HB, ut manifeſtum eſt.

Infinitos modos relinquimus, quia prædictos ſufficere putavimus, ad hoc ut quivis ſuopte ingenio quotvis alios ut libuerit, inquirat, & analyticè proſequatur.

Appendix ad Isagogen topicam continens solutionem Problematum solidorum per locos.

PATUIT methodus quâ lineæ locales dereguntur: inquirendum restat quâ ratione Problematum solidorum solutio possit ex supradictis elegantissimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites suos evagandi licentia. Infinita enim sunt puncta quibus quæstioni propositæ satisfit in locis: commodissimè igitur per duas æqualitates locales quæstio determinatur, secant quippe se invicem duæ lineæ locales positione datæ, & punctum sectionis positione datum quæstionem ex infinito ad terminos præscriptos adigit. Exemplis breviter & dilucidè res explicatur.

Proponatur a cubus $+$ b in a quadratum æquari z plano in b.

Commodè utraque æqualitatis pars potest æquari solido b in a in e, ut per divisionem istius solidi, illinc per a, hinc per b res deducatur ad locos. Cùm igitur a cubus $+$ b in a quadratum æquetur b in a in e; ergo aq $+$ b in a æquabitur b in e:

Et erit, ut patet ex nostra methodo, extremitas ipsius e ad parabolam positione datam.

Deinde cùm zp in b æquetur b in a in e, ergo zp æquabitur a in e.

Et erit ex nostra methodo extremitas ipsius e ad hyperbolam positione datam. Sed jam probavimus esse ad parabolam positione datam. Ergo datur positione, & est facilis ab analysi ad synthesin regressus.

Nec dissimilis est methodus in omnibus æquationibus cubicis. Constitutis enim ex una parte solidis omnibus ab a adfectis, ex alterâ solido omninò dato, vel etiam cum solidis ab a vel aq affectis, poterit fingi æqualitas superiori similis.

Proponatur exemplum in æquationibus quadrato-quadratorum.

$aqq + bs$ in $a + zp$ in $aq \propto dpp$: ergo $aqq \propto dpp - bs$ in $a - zq$ in aq æquentur hæc duo homogenea zq in eq.

Cùm igitur aqq æquetur zq in eq: ergo per subdivisionem quadraticam, aq æquabitur z in e, & erit extremitas E ad parabolam positione datam.

Deinde cùm $dpp - bs$ in $a - zq$ in $aq \propto zq$ in eq, omnibus per zq divisis,

$$\frac{dpp - bs \text{ in } a}{zq} - aq \propto eq.$$

Et erit ex nostra methodo extremitas E ad circulum positione datum; sed est & ad parabolam positione datam: ergo datur.

Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadrato-quadraticæ. Expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. 1. de emend. ab affectione sub cubo & quadrato-quadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis, per parabolam, circulum vel hyperbolam solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione.

Sint duæ rectæ B major, D minor, inter quas duæ mediæ proportionales sunt inveniendæ, fiet a cubus $\propto$ bq in d, posito nempe quòd major mediarum ponatur a.

Æquentur singula homogenea b in a in e.

Illinc fiet $aq \propto b$ in e.

Istinc a in $e \propto b$ in d.

Ideoque quæstio per hyperbolæ & parabolæ intersectionem perficietur.

Exponatur enim recta quævis positione data O V N in qua detur punctum O. Sint rectæ datæ B & D inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta O V æquari a, & recta V M ipsi O V ad rectos angulos æquari e. Ex priori æqualitate, qua aq æquatur b in e, constat per punctum O tanquam verticem, describendam parabolam cujus rectum latus sit b, diameter ipsi V M parallela & applicatæ ipsi O V: transibit igitur hæc parabola per punctum M.

Ex secunda æqualitate quâ b in d æquatur a in e, sumatur punctum ubilibet in recta O V, ut N, à quo excitetur perpendicularis N Z, & fiat rectangulum O N Z æquale rectangulo b in d. Excitetur perpendicularis O R. Circa asymptotos R O, O V describenda hyperbola per punctum Z, ex nostra methodo locali dabitur positione, & transibit per punctum M. Sed parabola etiam quam suprà descripsimus datur positione, & per idem punctum M transit: datur igitur punctum M positione, à quo si demittatur perpendicularis M V, dabitur punctum V, & recta O V major duarum continuè proportionalium quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem parabolæ & hyperbolæ.

Si ad quadrato-quadrata lubeat quæstionem extendere, omnia ducantur in a, tunc aqq æquabitur bq in d in a.

Æquentur singula homogenea juxta superiorem methodum bq in eq.

Fient duæ æqualitates, nempe aq & b in e,

Et d in a & eq.

Quæ singulæ dabunt parabolam positione datam. Fiet igitur constructio mesolabii per intersectionem duarum parabolarum hoc casu.

Prior constructio & posterior sunt apud Eutocium in Archimede, & huic methodo facillimè redduntur obnoxiæ.

Abeant igitur illæ parapleroses Vietææ quibus æquationes quadrato-quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicatum abs radice plana; pari enim elegantiâ, facilitate & brevitate solvuntur, ut jam patuit: perinde quadrato-quadraticæ ac cubicæ quæstiones, nec possunt, opinor, elegantiùs.

Ut pateat elegantia hujus methodi, en constructionem omnium problematum cubicorum & quadrato-quadraticorum per parabolam & circulum.

Ponatur $aqq + zs$ in a ∞ dpp: ergo aqq ∞ $- zs$ in $a + dpp$. Fingatur quadratum abs $aq - bq$, aut alio quovis quadrato dato, fiet quadratum $aqq + bqq - bq$ in aq bis. Addantur ad supplementum singulis æqualitatis partibus $bqq - bq$ in aq bis: fiet $aqq + bqq - bq$ in aq bis ∞ $bqq - bq$ in aq bis $- zs$ in $a + dpp$; sit bq bis ∞ nq, & singulis homogeneis sive partibus æqualitatis æquetur nq in eq: fiet illinc per subdivisionem quadraticam $aq - bq$ ∞ n in e; ideóque punctum extremum e erit ad parabolam ex nostra methodo: isthinc fiet,

$$\frac{bqq}{nq} - aq - \frac{zs \text{ in } a + dpp}{nq} \text{ ∞ } eq.$$

Ideóque

Ideóque ex nostra methodo, punctum extremum e erit ad circulum. Descriptione igitur parabolæ & circuli solvitur quæstio.

Hæc methodus facillimè ad omnes casus tam cubicos quàm quadrato-quadraticos extenditur. Curandum est tantùm ut ex una parte sit aqq; ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab a cubo. At per expurgationem Vietæam omnes æquationes quadrato-quadraticæ ab affectione sub cubo liberantur: ergo eadem in omnibus methodus. Cùm autem æquationes cubicæ liberentur ab adfectione sub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in a ductis, fiet æquatio quadrato-quadratica, cujus nullum ex homogeneis afficietur sub cubo; ideóque solvetur per superiorem methodum.

Id solùm in secunda æqualitate curandum est, ut aq ex una parte, ex altera eq sub contraria affectionis nota reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus, $aqq \infty zp$ in $aq - z^{s}$ in d. Fingatur quodvis quadratum abs $aq -$ quovis quadrato dato ut bq, fiet $aqq + bqq - bq$ in aq bis. Adjiciatur utrique æqualitatis parti ad supplementum $bqq - bq$ in aq bis, fiet $aqq + bqq - bq$ in aq bis $\infty bqq - bq$ in aq bis $+ zp$ in $aq - z^{s}$ in d.

Ut igitur commoda fiat divisio in secunda æqualitate, sumenda differentia inter bq bis & zp quæ sit verbi gratiâ nq, & utraque æqualitatis pars æquanda nq in eq.

Ut illinc fiat $aq - bq \infty n$ in e.

Isthinc $\frac{bqq}{nq} - aq - \frac{z^{s}}{nq}$ in $d \infty eq$.

Advertendum deinde bq bis debere præstare zp, alioquin aq non afficeretur signo defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolam, cui promptum remedium; bq enim ad libitum sumimus, ideóque ipsius duplum majus zp nullius est negotii sumere. Constat autem ex methodo locali, circulum creari semper ex æqualitate in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo $+$; in altera aliud quadratum ignotum signo $-$.

Si sumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit $ac \infty bq$ in d.

Et $aqq \infty bq$ in d in a.

Adjiciatur utrinque $bqq - bq$ in aq.

$aqq + bqq - bq$ in aq æquabitur $bqq + bq$ in d in $a - bq$ in aq

Sit $bq \infty nq$.

Et singulæ æqualitatis partes æquentur nq in eq

Fiet illinc $aq - bq \infty n$ in e.

Ideóque extremum e erit ad parabolam.

Isthinc fiet $bq \div + d \div$ in $a - aq \infty eq$; ideóque extremum e erit ad circulum.

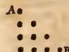
Qui hæc adverterit, frustrà quæstionem mesolabii, trisectionis angularis, & similes tentabit deducere ex planis, hoc est per rectas & circulos expedire.

TRAITÉ DES INDIVISIBLES.

POUR tirer des conclusions par le moyen des indivisibles, il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré quarré, ou selon quelqu'autre puissance.

Or d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes on se servira de points; & puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en ladite raison.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles sont toutes ensemble à la plus grande d'icelles prise autant de fois qu'il y en a de petites, comme le triangle au quarré qui a pour costé la plus grande ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy, que la surface contient la moitié de l'espace que contiendroit le quarré qui auroit 4 de costé comme le triangle; & encore qu'il ne fallust pas 10 points pour achever le quarré, parce que le costé A B seroit commun à l'autre moitié du quarré, néanmoins dans les indivisibles cela n'est pas considérable, parce que le triangle n'excéde jamais la moitié du quarré que de la moitié de son costé: or y ayanr une infinité de costez audit quarré pris dans les indivisibles, la moitié d'un d'iceux n'entre pas en considération; ainsi ce triangle-cy qui a 4 de costé n'excéde la moitié du quarré collatéral, (c'est-à-dire qui a pareil costé) que de 2 qui est $\frac{1}{2}$ de ladite moitié, ou la moitié du costé. Si le triangle avoit 5 de costé, il n'excéderoit que de $\frac{1}{2}$ de la moitié du quarré collatéral: s'il en a 6, il n'exédera que de $\frac{1}{6}$, & ainsi de suite; & puis qu'on voit que l'excés diminuë toûjours, il s'anéantira enfin dans la division indéfinie.



De mesme si les lignes suivoient entr'elles l'ordre des quarrez, la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent, seroit à la derniére prise autant de fois, comme la somme des quarrez au cube, ou comme la pyramide à la colonne, sçavoir comme 1 à 3; car quoy-que prenanr un nombre fini de quarrez leur somme soit plus grande que le tiers du cube collatéral au plus grand quarré, néanmoins dans la division infinie elle ne seroit que le tiers; car ladite somme ne passe jamais le $\frac{1}{3}$ dn cube que de la moitié du plus grand quarré $+\frac{1}{6}$ du costé. Or dans le cube il y a une infinité de quarrez, & partant la moitié d'un d'iceux n'est pas considérable, & encore moins $\frac{1}{6}$ de la ligne ou costé du mesme cube.

Ainsi le cube estant 64, pour avoir la somme des quarrez dont le plus grand soit collatéral audit cube, on prendra le tiers d'iceluy, sçavoir 21 $\frac{1}{3}$, auquel joignant la moitié du plus grand quarré, sçavoir 8, on aura 29 $\frac{1}{3}$, à quoy joignanr encore $\frac{1}{6}$ de 4 qui est le costé, sçavoir $\frac{2}{3}$, on aura 30 pour la somme des quatre premiers quarrez. Et ainsi par les propriétez des puissances suivantes, on montrera que la somme des cubes est $\frac{1}{4}$ du quarré-quarré collatéral au plus grand cube; que la somme des quarrez-quarrez est $\frac{1}{5}$ de la cin-

quiéme puissance : que la somme des cinquiémes puissances est $\frac{1}{7}$ de la sixiéme puissance, & ainsi des autres. Mais il faut remarquer que les puissances ont ainsi rapport l'une à l'autre de proche en proche, & non point si on en omet une entre deux. Ainsi la ligne ou costé n'a point de rapport au cube, ni le quarré au quarré-quarré, ni le cube à la cinquiéme puissance, &c. car les lignes prises à l'infini ne faisant qu'un quarré, & y ayant une infinité de quarrez dans le cube, si l'on ajouste ou si l'on oste un seul quarré cela n'operera rien. La mesme chose se monstrera du quarré eû egard au quarré-quarré, & du cube eû égard à la cinquiéme puissance, &c.

La superficie se divise aussi en une infinité de petites superficies, lesquelles ou sont égales, ou ont égale difference, ou gardent entr'elles quelqu'autre progression, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, &c. Et d'autant que les superficies sont enfermées dans les lignes, au lieu de comparer les superficies, on comparera les lignes à une autre chose, & la somme de toutes les petites surfaces ou des lignes qui les representent, sont à la grande surface prise autant de fois comme 1. à 3, comme il a esté dit.

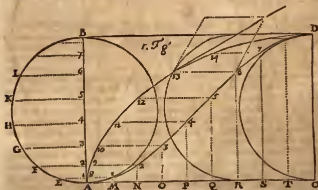
De mesme les solides se divisent en une infinité de petits solides ou égaux, ou qui gardent quelque proportion, comme il a esté dit des surfaces : & d'autant que les solides sont terminez par des surfaces, au lieu de dire que ces petits solides sont au grand solide pris autant de fois, je dis, l'infinité des surfaces sont à la plus grande prise autant de fois, comme le cube au quarré-quarré de son costé, ou comme 1 à 4.

Par tout ce discours on peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes, & compose la ligne entiére. L'infinité de lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale. L'infinité des superficies represente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

NOus posons que le diamétre AB du cercle AEFGB se meut parallelement à soy-mesme, comme s'il estoit emporté par quelqu'autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extremité dudit diamétre marche par la circonference du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, en sorte que quand le diamétre est en CD, le point A est venu en B, & la ligne AC se trouve égale à la circonference AGHB. Or cette course du diamétre se divise en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonference AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a esté dit. En aprés je considére le chemin qu'a fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un du diamétre en avant, l'autre du sien propre dans la circonference. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il est venu en E il est élevé audessus de son premier lieu duquel il est parti ; cette hauteur se marque tirant du point E au diamétre AB un sinus E1, & le sinus Verse A1 est la hauteur dudit A quand il est venu en E. De mesme quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F2, & A2 sera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonference, & tirant le sinus G3, le sinus Verse A3 sera la hauteur de A quand il est parvenu en G, & faisant ainsi de tous les lieux de la circonference que parcourt A, je trouve toutes ses hauteurs & élevemens pardessus l'extremité du diamétre A, qui sont A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 ; donc, afin d'avoir les lieux par où passe

ledit point A, & sçavoir la ligne qu'il forme pendant ses deux mouvemens, je porte toutes ses hauteurs sur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M 1, N 2, O 3, P 4, Q 5, R 6, S 7 sont les mesmes que celles qui sont prises sur A B. Puis je prends les mesmes sinus E 1, F 2, G 3, &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extrémitez de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je sçay comme s'est fait la ligne A 8 9 D: mais pour sçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que A B a parcouru la ligne A C, le point A est monté par la ligne A B, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que A B est venu en M, le second pendant que A B est venu en N, & ainsi toûjours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamétre soit arrivé en C D; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, estant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extrémitez A D. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle A E B contenuë dans la circonférence d'iceluy; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur A 1, A 2, &c. & des sinus E 1, F 2, &c. qui sont les mesmes que ceux des diamétres M, N, O, &c. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle A H B. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallelograme A B C D en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne A C à la ligne B D: & partant, selon Archiméde, la moitié est égale au cercle, auquel ajoustant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'espace A 8 9 D C; & faisant de mesme pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.



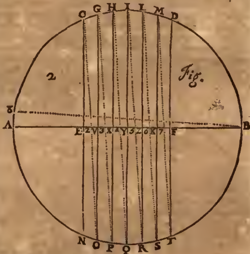
Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considére ensuite le mouvement que nous avons donné à nostre point emporté par le diamétre marchant parallelement à soy-mesme. Tirant du mesme point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallelogramme (qui doit toûjours avoir les quatre

quatre costez égaux lors que le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamétre A B par la ligne A C) & si du mesme point je tire la diagonale, j'ay la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procéde en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit posez en quelqu'autre raison, comme si lors que l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcouroit dans le mesme temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison.

PROPORTION

de la circonférence du cercle à son diamétre.

SOIT le cercle A I B Q, son diamétre A B, & soient tirez les sinus C E, G V, H X, I Y, L Z, M K, D F. Que les arcs C G, G H, H I, I L, L M, M D soient égaux: je dis que la ligne E F est à la circonférence C D, comme tous les sinus ensemble, sçavoir C E, G V & tous les autres, sont à autant de sinus totaux ou demidiamétres. Je le montre ainsi. Je continuë C E jusques en N, G V jusques en O, & ainsi des autres. Je tire ensuite la diagonale de C en O qui coupe la ligne E V en passant. Je tire aussi toutes les autres diagonales, & partant je fais des triangles semblables, ausquels triangles semblables les lignes D F & N E ne sont



point employées, mais cela n'importe à cause de la division infinie dans laquelle nul fini ne porte préjudice. Je tire par-aprés la ligne B 8 faisant l'arc 8 A égal à C G; & du point 8 j'abaisse la perpendiculaire 8 A pour avoir un triangle semblable aux triangles C 2 E, G 3 V, & aux autres suivans. Nous feignons que la circonférence C D est divisée par infinis sinus, & que la ligne 8 A estant si proche de la circonférence 8 A, devient elle-mesme circonférence & égale à 8 A, ou à C G, & à chacune des autres qui ont esté divisées en infini. De plus, nous disons que la ligne B 8 peut estre tant aprochée par une division infinie de la ligne A B diamétre, qu'elle devient elle-mesme diamétre.

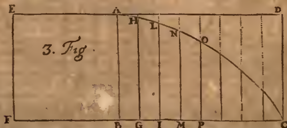
Puis on dira : Comme C E est à E 2, ainsi O V est à V 2, & ainsi de

tous les triangles qui suivent la mesme régle. En aprés, le triangle C E 2 est semblable au triangle G V 3, parce qu'ils ont les angles C & G égaux, soûtenant circonférences égales N O, O P, car toutes sont égales depuis N jusques en T, & partant comme tous les doubles sinus C N & autres sont à la ligne E F, ainsi C E à E 2 : or comme C E à E 2, ainsi B 8, qui est devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence, qui sera égale à C G & aux autres. Ainsi, comme tous les sinus à la ligne E F, ainsi le diamétre B 8 devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence; & au lieu de dire 8 A, je dis C G; & coupant les antécédens en deux, je dis, comme les sinus d'enhaut à la ligne E F, ainsi le demi-diamétre ou sinus total à C G; & multipliant C G autant de fois que la ligne C D contient de divisions, tous les sinus d'enhaut seront à E F, comme autant de demi-diamétres ou sinus totaux qu'il y a de parties égales à C G depuis C jusques en D, sont à la circonférence C D : & changeant, comme tous les sinus d'enhaut sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres, ainsi la ligne E F est à la circonférence C D.

Que si la ligne E F avoit esté le demi-diamétre, & que les sinus eussent esté abbaissez du quart de la circonférence, le demi-diamétre eust esté au quart de la circonférence comme tous les sinus divisans la circonférence sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres.

FIGURÉ COURBE
égale au Quarré.

SUPPOSANT que le demi-diamétre du cercle est au quart de cercle comme tous les petits sinus infinis à tous les sinus totaux, c'est-à-dire, autant de petits sinus à autant de sinus totaux : je trouve que le quarré du demi-diamétre est égal à la figure qui est faite par tous les sinus posez à angles droits sur la circonférence; car en la figure A B C, les lignes G H, I L, M N, P O, qui sont les sinus de toute la circonférence B C, font par l'extrémité de leur sommet la ligne A C; & continuant de faire & prolonger lesdits sinus en sorte qu'ils soient égaux au sinus total ou demi-diamétre, ils forment la figure A B C D. Je fais aussi sur A B son quarré A B E F.

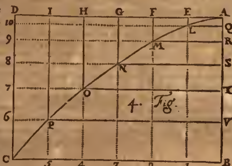


Puis je dis : Comme le demi-diamétre A B est à la circonférence B C, c'est-à-dire au quart de la circonférence, ainsi tous les sinus sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres; & par les infinis, comme la figure A B C sera à la figure A B C D composée des infinis sinus totaux & du quart de la circonférence B C; donc, comme le demi-diamétre est à la circonférence, ainsi la figure A B C est à la figure A B C D. Mais comme la ligne A B est à la ligne B C, ainsi le quarré d'icelle est au rectangle fait de

AB & BC; donc la figure ABC est à la grande ABCD comme le quarré ABEF est au rectangle ABCD; ainsi le quarré de AB a mesme raison au rectangle AC que la figure ABC; & partant le quarré de AB qui est ABFE est égal à la figure ABC, ce qu'on vouloit prouver.

DE LA PARABOLE.

SOit la Parabole BALMNOPC, le sommet A, le diamétre AB, la ligne touchante AD, laquelle soit divisée en infinies parties égales AE, EF, FG, GH, HI, ID, & de tous les points soient tirées les lignes paralleles au diamétre AB jusques à la ligne CB, sçavoir E 1, F 2, G 3, &c. & des points où lesdites lignes coupent la Parabole, soient tirées les ordonnées LQ, MR, NS, OT, PV. Mais les lignes AQ, AR sont entr'elles comme le quarré de la ligne LQ au quarré de la ligne MR; & la ligne AR est à AS comme le quarré de MR au quarré de NS, & ainsi de toutes les autres lignes. Or la ligne AD estant divisée en parties égales, & les parties d'icelles estant égales aux lignes ordonnées, sçavoir AE à QL, AF à RM, AG à SN, AH à TO, & AI à VP, il s'ensuit que chaque quarré d'icelles lignes surpassera le précédent selon la progression des nombres impairs, que les quarrez seront faits des costez differens toûjours de l'unité, & que le costé du premier estant 1, les autres costez seront 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les portions du diamétre comprises & coupées par les ordonnées sont les mesmes que EL, FM, GN, HO, IP, DC; & par ainsi ces lignes sont entr'elles comme les quarrez 1, 4, 9, 16, 25, 36 sont entr'eux. Je dis donc que toutes ces lignes prises ensemble seront à la ligne DC prise autant de fois qu'icelles lignes, comme la somme des quarrez (suivant l'ordre que j'ay dit, c'est-à-dire, à commencer à l'unité, & suivre toûjours en augmentant de l'unité) est au quarré DC pris autant de fois qu'il y a de divisions en la ligne AD, c'est-à-dire en la présente division, six fois. Or multiplier un quarré autant de fois que vaut son costé, c'est-à-dire, par son costé, c'est faire un cube: il est donc vray que la somme de toutes ces lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC est à la ligne DC prise autant de fois qu'il y a desdites lignes, comme la somme des quarrez susdits est au cube du plus grand nombre. Mais le cube est le triple de la somme des quarrez, partant le triligne CPONMLAD sera le tiers du rectangle CDAB, & par ainsi la Parabole ABCPONMLA sera les deux tiers du parallelogramme ou quarré CDAB; ce qui a esté démonstré par Archiméde d'une autre maniére.



Que si nous voulons considérer une autre nature de Parabole comme M. Fermat, faisant que les portions du diamétre soient l'une à l'autre comme le cube au cube, il se trouvera que la mesme Parabole que dessus, ou plû-

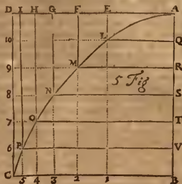
toſt le dehors d'icelle C O A D, ſera au rectangle A B C D comme la ſomme des cubes à un quarré-quarré, c'eſt-à-dire, comme 1 à 4. Si nous feignons que les portions du diamétre, c'eſt-à-dire, les petites lignes, E L, F M, G N, H O, I P, D C ſont l'une à l'autre comme les quarré-quarrez entr'eux, il ſe trouvera que la ſomme de toutes ces lignes ſeront à la ligne C D priſe autant de fois, comme la ſomme des quarré-quarrez au quarré-cube, c'eſt-à-dire, comme 1 à 5, & par ainſi la Parabole vaudra 4 & le rectangle 5; & de cette ſorte on pourra continuër & trouver des Paraboles qui changent de valeur, & cela ſe peut faire de toutes les puiſſances juſques où on voudra.

Quant au ſolide de noſtre Parabole, il ſe fait en feignant que tout le rectangle tourne ſur ſon axe, & qu'il ſe fait un grand cylindre par la révolution de A B C D. La révolution de la premiére partie E A B 1 ſe peut nommer cylindre, mais celle de chacune des autres ſe nomme Rouleau, parce que nous les devons conſidérer chacune à part, & cecy eſt pour les grands cylindres; mais en conſidérant les petits, comme la révolution que fait E A Q L, F A R M, & tous les autres, nous rejettons ce qui eſt au dedans de la Parabole, & ne conſidérons que ce qui eſt dehors; car toutes les parties de ces petits cylindres ou rouleaux qui ſont dans la Parabole ne peuvent faire une partie auſſi grande que fait le rouleau D I 5 C; & par ainſi nous rejettons toutes ces parties qui n'en valent pas une, qui n'eſt de nulle conſidération dans les indiviſibles.

Et par les petites lignes, c'eſt-à-dire par les portions du diamétre, nous conſidérons l'eſpace qui eſt hors la Parabole, & compris dans ces lignes. Tous ces cylindres ſont entr'eux comme leurs baſes, c'eſt-à-dire, comme leurs cercles; mais les cercles ſont entr'eux comme le quarré du demi-diamétre de l'un au quarré du demi-diamétre de l'autre: comme en noſtre figure le quarré de la ligne A E eſt au quarré de A F comme le premier quarré au ſecond quarré, & le quarré de A F eſt à celuy de A G comme le ſecond quarré au troiſiéme, &c. Mais un quarré ſurpaſſe ſon prochain de deux fois ſon coſté, ſçavoir le coſté du moindre quarré, plus l'unité: il arrive donc que toutes les lignes, ſçavoir A E, E F, F G, G H, H I, I D ſont toutes différences des quarrez, c'eſt-à-dire, chacune priſe deux fois plus l'unité; or toutes ces unitez ne ſe conſidérent point dans les indiviſibles comme choſe finie. Nous prenons donc toutes ces lignes comme deux fois un coſté chacune, puis aprés nous diſons que les petites lignes E L, F M, G N, & les autres ſont entr'elles comme des quarrez; nous les conſidérons comme des quarrez, & diſons que l'eſpace E L Q vaut deux coſtez d'un quarré par ſon quarré E L, & le quarré de F M par le double de ſon coſté F A fait l'eſpace F M R, & pareillement le quarré de G N par deux G A fait l'eſpace G N S, &c. Or un quarré par deux fois ſon coſté vaut deux fois le cube; donc toutes ces petites lignes enſemble, ou l'eſpace qu'elles contiennent hors la parbole ſont comme deux fois la ſomme des cubes au quarré de C D pris autant de fois qu'il y a de diviſions en la ligne D A, c'eſt-à-dire, au quarré de C D par le quarré du meſme C D, c'eſt-à-dire, au quarré-quarré.

Il faut maintenant conſidérer A B C D, ou la Parabole C P O M A B ſe tournant ſur ſon axe comme la précédente, mais avec cette différence, que la ligne A B eſt diviſée en parties égales entr'elles. Nous conſidérons le ſolide ou cylindre que fait D C qui a pour baſe le cercle duquel le demi-diamétre eſt la ligne D A, les petits cylindres ont pour demi-diamétre de leurs cercles les lignes E A ou L Q ſon égale, M R, N S, O T, P V, &c. or tous ces petits cylindres ſont entr'eux comme leurs baſes, c'eſt-à-dire, leurs cercles, & les cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs demi-diamétres;

diamétres : or les quarrez de ces petites lignes sont entr'eux comme les lignes A Q, Q R, R S, S T, T V, sçavoir en égale différence de l'unité, c'est-à-dire, que les quarrez de toutes ces lignes sont entr'eux comme l'ordre des nombres naturels. Ainsi le quarré de L Q estant 1, celuy de M R vaudra 2, celuy de N S 3, celuy de O T vaudra 4, & celuy de R V vaudra 5. Or les cylindres estant entr'eux comme les quarrez des demi-diamétres de leurs bases ou cercles, il s'ensuit que tous les quarrez de ces petites lignes sont au quarré de la grande B C pris autant de fois, comme la somme de la suite des nombres naturels, à commencer à l'unité, sont au quarré du dernier.



Mais le conoïde parabolique, c'est-à-dire, le solide fait par la révolution de C N L A B, est au cylindre total, sçavoir à celuy qui est fait par la révolution de A B C D, comme toutes les petites lignes à la grande prise autant de fois ; partant le conoïde parabolique est au cylindre, comme la somme des nombres, c'est-à-dire le triangle, est au quarré, ou bien comme la moitié à son tout ; car la somme des nombres est au quarré (en terme d'indivisible) comme la moitié au tout ; comme si la somme est 10 triangle de 4, le quarré est 16, dont la moitié 8 est excédée de 2 par ledit triangle. Or cela passe pour estre la moitié de l'autre ; car si ou continuoit dans la suite des nombres on verroit que le triangle excéderoit toûjours la moitié du quarré d'une moindre portion, laquelle partant s'anéantiroit enfin dans l'infini.

Maintenant il faut considerer la figure A B C D comme faisant son tour sur A D, lors la ligne C D sera le demi-diamétre de la base ou cercle du cylindre total : les lignes P I, O H, N G, M F, L E sont les demi-diamétres du cercle ou base de chacun de leurs cylindres. Or par la propriété de la Parabole, la ligne E L est à F M comme le quarré au quarré, & ainsi toutes les autres petites lignes de suite ; partant le quarré de E L sera au quarré de F M comme un quarré-quarré à un quarré-quarré, & ainsi toutes les autres petites ; donc toutes ensemble elles seront entr'elles comme le quarré-quarré de D C pris autant de fois qu'il y a de petites lignes, c'est-à-dire, comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube ; & telle est la raison du solide fait par la révolution de C D A au cylindre total fait par la révolution de C B, c'est-à-dire, qu'ils sont entr'eux comme 1 à 5. Voyez la Figure 4.

Maintenant nous considérons que la figure tourne sur la ligne C D parallele à l'axe. Par cette révolution la ligne A D est le demi-diamétre de la base ou cercle du grand cylindre ; les lignes 10 L, 9 M, 8 N, 7 O, 6 P sont chacune le demi-diamétre du cercle ou base de leur cylindre qui sont l'une à l'autre comme leursdites bases ou cercles, & les cercles sont entr'eux comme les quarrez desdites lignes : donc tous les quarrez de ces petites lignes seront au quarré de la grande ligne prise autant de fois, comme les petits cylindres au grand cylindre. Mais je ne connois pas la raison des petits quarrez aux grands quarrez, laquelle je cherche par une grandeur qui leur

soit égale, & je dis que le quarré de L 10 vaut le quarré de Q 10 & le quarré de Q L moins le rectangle de Q 10 Q L pris deux fois; le quarré de M 9 vaut le quarré de R 9, & celuy de M R moins le rectangle de 9 R M pris deux fois, & ainsi des autres jusques à l'infini. Or faisant la comparaison, nous disons que les quarrez de Q 10 & Q L comparez au seul quarré Q 10 sont égalité de raison entre les deux grands qui sont égaux: le mesme soit entendu de tous les autres quarrez. Les grands estant égaux, il ne reste qu'à connoistre la valeur des petits L Q, M R, &c. Mais nous avons veû cy-devant qu'ils sont au grand quarré comme la moitié au tout: si donc nous joignons un tout avec sa moitié, & le comparons à un autre tout, nous ferons une raison de 3 à 2. Posons que le grand quarré vaille 2, l'autre qui est composé du grand & de sa moitié vaudra 3; partant la raison sera de ce dernier au premier de $\frac{3}{2}$ ou de 3 à 2: & poursuivant, on ostera ce qui estoit de trop dans les deux quarrez mis cy-dessus pour trouver la valeur du quarré L 10, & nous avons dit que deux fois le rectangle Q 10 Q L estoit de trop pardessus le quarré L 10, & ainsi des autres; il faut donc oster les rectangles deux fois à chaque quarré. Or tous ces rectangles ont pour mesme hauteur Q 10, donc ils seront entr'eux comme leurs bases ou petites lignes, & les solides entr'eux comme leurs bases. Mais nous avons veû que ce solide fait par le tour de la parabole estoit le tiers du cylindre total: or il faut oster deux fois le rectangle, partant il faudra diminuër de deux tiers la raison que nous avons trouvée de 3 à 2, & metant 9 à 6 au lieu de 3 à 2 & de $\frac{3}{2}$ on en ostera $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$, & restera $\frac{1}{6}$ pour la valeur de C A B tourné sur D C, & le reste au cylindre entier, sçavoir C A D, vaudra $\frac{5}{6}$ du grand cylindre A B C D.

DE LA CONCHOÏDE.

LA Conchoïde se fait, quand d'un point on tire plusieurs lignes qui coupent une mesme ligne soit courbe ou droite, & que toutes les lignes tirées depuis ladite ligne sont toutes égales, telles que sont B 1, D 2, E 3, F 4, G 5, &c. tirées par le moyen du cercle C G B R divisé (selon la regle des indivisibles) en parties infinies égales, & par iceluy a esté composée la Conchoïde 19 C 1, en laquelle, comme en toutes les autres, les lignes depuis la circonférence du cercle jusques à ladite Conchoïde sont toutes égales. Or toutes ces lignes qui divisent la circonférence du cercle commençant au point C & finissant en 1, 2, 3, 4, 5, &c. divisent tant la Conchoïde que le cercle en triangles semblables, lesquels par la force des indivisibles se convertissent & deviennent secteurs, & sont l'un à l'autre comme quarré à quarré (quoy-que dans le fini il y ait quelque chose à dire;) ainsi le secteur C 1 2 est au secteur C B D ou C B V son égal, comme le quarré de C 1 au quarré de C B. En aprés, le secteur C B D ou C B V son égal est au secteur C 19 18 comme le quarré de C B au quarré de C 19. Mais pour joindre les deux quarrez qui appartiennent à la Conchoïde afin de les comparer aux quarrez du cercle, je regarde la valeur du quarré de C 1 qui vaut les quarrez de C B, B 1, plus le rectangle deux fois sous C B B 1; le quarré C 19 est égal aux quarrez de C B, B 19 ou B 1 son égal (car B 19 commence à la circonférence du cercle, & va au point de la Conchoïde 19, & partant doit estre égale à B 1 qui part de la mesme circonférence, & va au point 1 de la Conchoïde) moins deux fois le rectangle C B B 19. Or le plus détruisant le moins, ces deux grandeurs jointes ensemble font le quarré C B deux fois, plus le quarré de B 1 deux fois; par ainsi le secteur C 1 2, & le secteur C 19 18 seront aux secteurs C B D, C B V, comme deux fois les

quarrez C B, B 1 à deux fois le quarré C B, & prenant la moitié, le quarré C B + le quarré B 1 sera au quarré C B comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs C B D, C B V; & tout l'espace de la Conchoïde est à l'espace du cercle comme les quarrez C B, B 1 au quarré C B, ou bien comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs C B D, C B V.

Je fais un demi-cercle de l'intervale B 1, & je le divise en autant de triangles semblables qu'il y en a au cercle premier; & au lieu de compter le quarré B 1, je dis le quarré 20 21; donc comme le quarré C B + le quarré 20 21 sont au quarré C B: ainsi l'espace du cercle & demi-cercle ensemble sont à l'espace du cercle. Mais nous avons montré que toute la Conchoïde est au cercle comme le quarré C B + le quarré B 1 ou leurs secteurs, est au quarré C B; par ainsi, toute la Conchoïde est au cercle en mesme raison que le cercle & demi-cercle est au mesme cercle; & partant la Conchoïde est égale au cercle & demi-cercle pris ensemble.

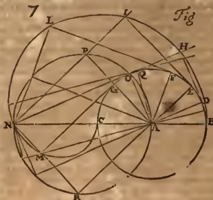


Conchoïde.

SOIT la base d'un cône oblique le cercle B F C duquel le centre est A; le sommet du cône est en l'air, avec telle obliquité, que de ce sommet la perpendiculaire tombe sur le point N. Nous supposons par les indivisibles, que par tous les points du cercle soient tirées des touchantes, comme D H, E I, F L, G M, &c. Nous disons que si du sommet du cône on tire une perpendiculaire sur chacune de ces touchantes, & que si du point N sur lequel tombe la perpendiculaire tirée du sommet, on tire une ligne à ce mesme point de la touchante, l'angle sera droit, & ladite ligne perpendiculaire à ladite touchante; & la ligne qui passe par l'extremité de chacune desdites touchantes & où se fait le susdit angle droit, sçavoir la ligne B H I L N M C, se trouve estre une Conchoïde.

Pour le prouver, il faut construire un cercle qui ait pour diamétre N A, lequel cercle soit N P O A R, & faire voir que toutes les lignes comprises entre sa circonférence A P N R & la ligne B H I L N M C, sont toutes égales entr'elles; nous prouvons que A O H D est un parallelogramme; car l'angle D est droit, puis que D H est touchante & A D demi-diamétre; l'angle H est aussi droit pour avoir esté tiré tel du point N sur lequel tomboit la perpendiculaire tirée du sommet du cône; l'angle O est droit pour estre fait dans le demi-cercle N P O A, & partant le quatriéme O A D le sera aussi; & partant c'est un parallelogramme, & les costez

opposez sont égaux; & par ainsi A D sera égale à O H comprise entre l'autre cercle & la ligne courbe, & A D est égale à A B pour estre toutes deux le rayon d'un mesme cercle. Passons outre, & considérons P I E A. L'angle E est droit, estant fait par la touchanre; l'angle I est droit, ayant esté fait tel par la ligne N I; l'angle P est droit, comme estant fait dans le demi-cercle, & partant le quatriéme l'est aussi, & les costez opposez du parallelogramme, sçavoir P I & A E ou son égale O H, sont égaux; & partant A B, O H, P I sont égales, & ce sont les lignes comprises entre les deux circonférences, sçavoir entre le cercle N P A R, & la ligne courbe B H I L N M C, & on prouvera le mesme de toutes les autres lignes; & partant cette ligne courbe est une Conchoïde.



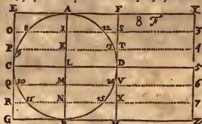
DES ANNEAUX.

SI on décrit alentour d'une figure un parallelogramme (nous avons pris un cercle en cét exemple) & qu'on fasse tourner le tout sur un des costez du parallelogramme, le solide fait par ce parallelogramme est au solide fait par la figure, comme le plan du parallelogramme est au plan de la figure.

Nous expliquerons cecy par un cercle autour duquel est écrit le parallelogramme E F H G: au milieu du cercle on a tiré la ligne A B parallele au costé F H du parallelogramme; la nature de cette ligne doit estre telle, que toutes les lignes tirées dans le cercle soient coupées en deux également par cette ligne. Supposant donc que le tout a tourné sur la ligne F H, dans ce tour le parallelogramme a fait pour solide un cylindre, & le cercle a fait pour solide un Anneau bouché qu'on nomme *Annulus strictus*, c'est-à-dire, qu'il se diminuë peu à peu en sorte que rien n'y peut entrer. Or ces deux solides sont égaux entr'eux, excepté les vuides, qui estant remplis au grand solide sont de plus en iceluy qu'au petit; il faut donc tirer lesdits vuides du grand pour sçavoir ce qu'il reste pour le petit, & tout se mesure par les quarrez des lignes qui sont dans la figure. Je commence donc par la moitié du parallelogramme, & je considére que cette moitié fait un cylindre dans sa révolution, & que le demi-cercle fait une figure différente de ce cylindre, de ces petits espaces qu'il faut oster du cylindre. Considérant les quarrez du cylindre, je dis que le quarré de I S est égal aux quarrez de S 12 & I 12 plus deux fois le rectangle de S 12 I 12; le quarré T K est égal aux deux quarrez T 13, K 13 plus deux fois le rectangle K 13 T; le mesme se doit entendre des autres quarrez appartenant au

au cylindre A F H B. Mais si nous ostons chaque quarré qui compose le vuide, & qui sont hors le cercle de chacun des quarrez du solide, il nous restera tout le dedans du cercle, c'est-à-dire, du petit solide. Si donc du quarré S I on oste le quarré S 12, il restera le quarré I 12 plus deux fois le rectangle S 12 I : cecy est tiré du premier quarré du cylindre. Quand je tire du second quarré du cylindre le quarré T 13, il me reste le quarré K 13 plus deux fois le rectangle K 13 T, & ainsi des autres. Puis donc que j'ay de reste le quarré 12 I plus deux fois le rectangle S 12 I, je joins le quarré avec une fois le rectangle, & par là j'ay le rectangle S I 12, & le rectangle S 12 I. Je retiens ces restes; & passant à l'autre moitié du cercle pour la joindre avec lesdits restes, je considére ce qu'elle fait quand le tout tourne sur la mesme ligne qu'auparavant, & ce que font les grands quarrez S 8, T 9 & les autres. Je regarde combien ils surpassent les petits quarrez I 8, K 9, & les autres qui sont dans le demi-cercle, & je dis ainsi : Le quarré S 8 est égal aux deux quarrez S I, I 8 plus deux fois le rectangle S I 8; le quarré T 9 est égal aux quarrez T K, K 9 plus deux fois le rectangle T K 9, & ainsi des autres. Or il faut oster de tous ces quarrez les quarrez du cylindre, sçavoir de S I, T K, & autres, & nous aurons de reste le quarré de I 8 plus deux fois le rectangle S I 8, le quarré de K 9 plus deux fois le rectangle T K 9, & ainsi des autres, & cecy se doit joindre à l'autre espace du demi-cercle.

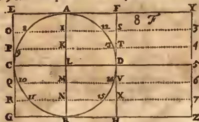
Pour faire cette jonction, je prens le quarré de 8 I que je joins au rectangle S 12 I que j'avois de reste à l'autre demi-cercle, & je fais le rectangle S I 12 que j'avois déja une fois, & partant je l'ay deux fois. Au second demi-cercle, les quarrez 8 I, 9 K estant ostez, il m'est resté deux fois le rectangle S I 8 qui est le mesme que le précédent, & par ainsi j'auray quatre fois le rectangle S I 8; donc quatre fois ce rectangle sera au quarré de S O, comme le solide de l'anneau est au cylindre total; & au lieu de dire quatre fois le rectangle, je double les lignes ou costez du rectangle, & je dis que le rectangle tout seul S O par 8 12 est au quarré S O, comme le solide de l'anneau est au cylindre total. Mais tous ces rectangles pris à l'infini sont tous d'égale hauteur entr'eux & avec le parallelogramme total; ils seront donc entr'eux comme leurs bases ou lignes, c'est-à-dire, comme l'espace de ces lignes comprises dans le cercle est à l'espace des grandes lignes qui composent le parallelogramme : donc comme le solide au cylindre, ainsi le plan du solide est au parallelogramme; ce qu'il falloit prouver.



Nous trouverons la mesme chose en faisant tourner toute la figure sur la ligne Y Z. Il faut premiérement éxaminer ce que fait A B Z Y par sa révolution, & ce qu'il différe d'avec A B H F. Le quarré Z B vaut les quarrez de Z H & H B plus deux fois le rectangle Z H B; le quarré 7 N est égal aux quarrez 7 X, X N plus deux fois le rectangle 7 X N, & ainsi de chacun des autres grands quarrez. Il en faut oster tous les quarrez qui composent l'espace H Y, sçavoir le quarré F Y, S 3, T 4, & les autres, lesquels estant ostez, resteront le quarré S I plus deux fois le rectangle 3 S I, & le quarré de T K plus deux fois le rectangle 4 T K; prenant le quarré

S I, & le joignant à l'un des rectangles, je feray le rectangle 3 I S, & le rectangle 3 S I; puis à 4 T, si on joint le quarré de K T à l'un des rectangles, on fera le rectangle 4 K T, & le rectangle 4 T K. Il faut retenir tout cecy, & passer à la considération du solide qui se fait par la révolution de A B G E tournant sur la mesme Y Z. Nous disons que le quarré de 3 O est égal aux deux quarrez de 3 I & I O plus deux fois le rectangle 3 I O; que le quarré 4 P vaut les quarrez de 4 K, K P plus deux fois le rectangle 4 K P, & ainsi des autres. De la valeur de ces quarrez il en faut oster tous les quarrez qui remplissent l'espace A B Z Y, sçavoir les quarrez 3 I, 4 K, 5 L, & les autres; & partant il reste le quarré O I plus deux fois le rectangle 3 I O; & ajoustant au rectangle 3 S I qui estoit resté au calcul de l'autre cylindre le quarré O I, je feray le rectangle 3 I O; & par ainsi dans le précédent cylindre j'auray deux fois le rectangle 3 I S; & dans ce dernier, le quarré O I estant osté, il reste deux fois le rectangle 3 I O qui est le mesme que 3 I S; partant le tout ensemble sera quatre fois le rectangle 3 I O; partant le quadruple du rectangle 3 I O sera au quarré de E Y, comme le cylindre, ou plûtost le rouleau G E F H est au cylindre total E G Z Y.

Il faut maintenant considérer ce que fait le cercle par sa révolution, tournant sur la mesme ligne Y Z, & le comparant au cylindre total; ce qui se doit faire en considérant une portion, sçavoir la moitié de la figure A 12 B 9 A. Nous prendrons donc premiérement la moitié A 12 15 B, & dirons;



Le quarré de 3 I vaut les quarrez 3 12, & 12 I plus deux fois le rectangle 3 12 I; le quarré de 4 K vaut les quarrez 4 13, & 13 K plus deux fois le rectangle 4 13 K, & ainsi des autres. De cette équation il faut oster les quarrez 3 12, 4 13, & tous les autres qui sont hors le cercle. Au rectangle 3 12 I j'ajouste le quarré I 12, & je fais le rectangle 3 I 12, & le rectangle 3 12 I. J'ajouste pareillement le quarré K 13 au rectangle 4 13 K; & je fais le rectangle 4 K 13, & le rectangle 4 13 K; ce qu'il faut retenir afin de l'ajouster à l'autre moitié que je cherche maintenant, & je dis que le quarré de 3 8 vaut les quarrez de 3 I & I 8 plus deux fois le rectangle 3 I 8; le quarré 4 9 vaut les quarrez 4 K & K 9 plus deux fois le rectangle 4 K 9. Or il faut ajouster tout cecy à la quantité que j'avois trouvée dans l'autre moitié du cercle, laquelle est le rectangle 3 I 12 & 3 12 I; & ajoustant au rectangle 3 12 I le quarré 8 I, je fais le rectangle 3 I 8, tellement que j'ay le rectangle 3 I 12 deux fois, & j'ay trouvé en la discussion de la seconde moitié (les vuides estant ostez, c'est-à-dire, les quarrez de I 3, K 4, &c.) le quarré 8 I (que j'ay ajousté au rectangle que j'avois trouvé auparavant) plus deux fois le rectangle 3 I 8 qui est le mesme que 3 I 12; tellement que j'ay quatre fois le rectangle 3 I 8, qui est au quarré de E Y comme l'anneau ou solide fait par le cercle roulant sur Y Z, au cylindre total. Le rectangle 4 K 13 pris quatre fois est au mesme quarré E Y comme le solide du cercle est au cylindre total fait par E G Z Y.

Il faut considérer le rapport que nous avons trouvé du rouleau par le tour du parallelogramme E G H F au grand cylindre. La proportion est

comme quatre fois le rectangle 3 I O au grand quarré E Y, ainsi le rouleau E G H F au cylindre total. Pour conclure, nous disons que quatre fois le rectangle 3 I O trouvé dans le rouleau G F, est au grand quarré E Y, comme le mesme rouleau G F au grand cylindre G Y. En suite j'ay quatre fois le rectangle 3 I 8 qui est au grand quarré E Y, comme le solide fait par le cercle A 8 B 12 au cylindre total. Il se trouve que le grand quarré est conséquent en lune & en l'autre des comparaisons; partant les solides seront entr'eux comme les rectangles entr'eux : mais les rectangles sont tous d'égale hauteur; rejettant la hauteur ils seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme les lignes du cercle aux lignes du rouleau : or ces lignes, en cas d'indivisibles, comprennent l'espace de chaque figure; donc comme le solide ou anneau est au rouleau G F, ainsi le plan A 8 B 12 est au plan G F; ce qu'il falloit démontrer.

Par tout ce discours nous n'avons trouvé que des raisons entre les solides & entre les plans : maintenant nous considérons si les solides sont égaux ou non. Je parleray premiérement du cylindre que fait le parallelogramme E F H G quand il roule sur la ligne F H : sa base est un cercle qui a pour demi-diamétre la ligne G H; sa hauteur est la ligne H F : au lieu du cercle je prens ce qui luy est égal, sçavoir le parallelogramme qui a le demi-diamétre pour un costé, & la moitié de la circonférence pour l'autre; & par ainsi j'ay trois costez ou lignes, qui me doivent servir pour les comparer avec le solide que je prétens estre égal à ce cylindre. Le solide donc a pour base le parallelogramme E F H G, pour hauteur la circonférence d'un cercle duquel le demi-diamétre est L D. Or les solides, selon Euclide, sont entr'eux en la raison composée de leur base & de leur hauteur; il faut donc considérer ce qu'ils ont de commun. Je trouve que dans le cylindre il y a trois lignes, sçavoir G H, H F, & la demi-circonférence du cercle qui a pour demi-diamétre la ligne G H : dans l'autre solide j'ay les lignes G H, H F, & la circonférence du cercle qui a pour demi-diamétre la ligne L D. Mais dans l'un & dans l'autre j'ay deux lignes communes, sçavoir G H & H F, entre lesquelles il ne peut avoir autre raison que d'égalité, puis qu'elles sont égales, & partant on les peut oster, & la composition des raisons demeurera entre la circonférence d'un cercle & la demi-circonférence de l'autre. Mais les circonférences sont entr'elles comme leurs diamétres : or le diamétre total du cercle entier qui est D C est égal au demi-diamétre G H; partant la circonférence entiére appartenant à D C sera égale à la demi-circonférence appartenant au demi-diamétre G H; & par ainsi le cylindre sera égal au solide; ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut considérer toute la figure, lors que le parallelogramme E Y Z G se tournant sur la ligne Y Z fait le grand cylindre. Je dis que le rouleau G F est égal au solide qui a pour base le parallelogramme G F, & pour hauteur la circonférence d'un cercle qui aura pour demi-diamétre la ligne L 5. Je dis encore que l'anneau (c'est-à-dire le solide qui se fait par la révolution du cercle quand le tout roule sur Y Z) est égal au solide qui a pour base le cercle A C B D, & pour hauteur la circonférence d'un cercle qui a pour demi-diamétre la ligne L 5.

Pour prouver cette égalité il faut faire voir que les quatre solides suivans sont proportionnaux, sçavoir le rouleau qui se fait quand le parallelogramme E F H G roule sur la ligne Y Z. Le second est l'anneau qui se fait par le cercle quand le grand parallelogramme G Y tourne sur la ligne Y Z. Le troisiéme est celuy qui a pour base le parallelogramme E F H G, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamétre est la ligne Z B. Et le quatriéme est celuy qui a pour base le cercle A C B D, & pour hau-

teur la circonférence du cercle dont le demi-diamétre est la la ligne L 5; & par ainsi, faisant voir comme le premier desdits solides est égal au troisiéme, le second par conséquent doit estre égal au quatriéme. Or nous avons montré que comme quatre fois le rectangle Z B H est au quarré de G Z, ainsi le rouleau G F est au grand cylindre G Y. Maintenant il nous faut examiner comment la figure qui a pour base le parallelogramme E F H G, & pour hauteur la circonférence du cercle dont le demi-diamétre est la ligne L 5, est égale au mesme grand cylindre G Y.

Nous sçavons que les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur: je considére quelles sont les parties de l'un & de l'autre des solides, & je trouve que le grand cylindre a deux parties, sçavoir la ligne G Z qui est le demi-diamétre de sa base qui est un cercle, l'autre ligne est H F. Mais d'autant que nous avons besoin de trois costez en ce solide ou grand cylindre, pour le comparer au solide qui a pour base le parallelogramme G F, & pour hauteur la circonférence du cercle duquel la ligne L 5 est demi-diamétre, lequel solide a trois lignes, sçavoir G H, H F, & la circonférence du cercle qui a L 5 pour demi-diamétre. Pour avoir trois costez au grand cylindre, au lieu de prendre son demi-diamétre qui représente son cercle, je prens ce qui est égal au cercle, sçavoir le demi-diamétre G Z, & la demi-circonférence du mesme cercle (le rectangle fait de ces lignes est égal au cercle selon Archiméde.)

J'auray donc trois costez ou lignes au grand cylindre, sçavoir G Z, H F, & la demi-circonférence du cercle dont G Z est le demi-diamétre. Il y a donc dans ces deux solides deux costez qui sont semblables, sçavoir H F en chacun d'iceux; & partant ils ne servent de rien pour la composition des raisons qui demeurera entre les lignes G H, G Z antécédent & conséquent, & la circonférence entiére du cercle qui a L 5 pour demi-diamétre, à la demi-circonférence du cercle qui a G Z pour demi-diamétre. Mais d'autant que les circonférences sont entr'elles comme leurs diamétres, au lieu des circonférences je prens le diamétre entier qui est deux fois L 5, & pour la demi-circonférence je pose son demi-diamétre G Z; partant la raison sera composée des raisons de la ligne G H à G Z, & de la ligne L 5 doublée à la ligne G Z.

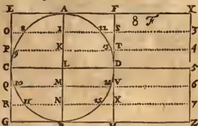
Or si on multiplie les antécédens l'un par l'autre, & pareillement les conséquens, on aura ladite raison composée; donc G Z par G Z, c'est-à-dire le quarré de G Z est au rectangle de G H par le double de L 5 ou Z B en ladite raison composée; partant les solides seront entr'eux comme le rectangle de Z B deux fois par G H au quarré de G Z. Au lieu de Z B deux fois par G H, on prendra G H deux fois par Z B: or Z B par G H deux fois, est quatre fois le rectangle Z B G; partant le solide qui a pour base le parallelogramme G F, & pour hauteur la circonférence du cercle qui a L 5 pour demi-diamétre est au cylindre total, comme quatre fois le rectangle Z B G est au quarré G Z; donc le rouleau & le solide auront mesme raison au cylindre total; & par ainsi le rouleau qui se fait quand le parallelogramme E F H G roule sur la ligne Y Z est égal au solide qui a pour base le mesme parallelogramme E F H G, & pour hauteur la circonference du cercle qui a pour demi-diamétre la ligne Z B.

Puisque ces deux solides sont égaux, qui sont le premier & le troisiéme dans les quatre proportionnaux, les deux autres qui sont le second & le quatriéme seront aussi égaux entr'eux. Ces deux solides sont l'anneau qui se fait par le cercle, quand le grand parallelogramme tourne sur la ligne Y Z: l'autre solide est celuy qui a pour base le cercle A C B D, & pour hauteur la circonférence du cercle duquel le demi-diamétre est la ligne L 5.

Il

Il faut maintenant voir ce qui se fait quand le roulement se fait sur la ligne A B. Nous avons icy representé la figure comme un cercle; le mesme se doit entendre d'une ellipse: & partant il faut voir ce que fait la sphére qui se forme par la révolution du demi-cercle A B C sur le diamétre A B, ou le sphéroïde qui se forme par la révolution de la demi-ellipse sur la mesme ligne A B.

Il faut entendre que le quarré de I 12 est au quarré de K 13, comme le rectangle B I A est au rectangle B K A, & le quarré K 13 est au quarré L D, comme le rectangle B K A au rectangle B L A, & ainsi des autres, tant au cercle qu'en l'ellipse. Or, tant la sphére que le sphéroïde qui sont formez par le roulement, sont au cylindre qui se fait en mesme temps, comme tous les quarrez I 12, K 13 & autres petits, au grand quarré B H pris autant de fois. Mais pour la raison des petis quarrez, j'ay pris la raison des petits rectangles qui est la mesme: il faut donc avoir un grand rectangle pour le comparer aux petits rectangles, afin de laisser les grands quarrez. Je prendray le rectangle B L A qui vaut le quarré de L D ou M V, sçavoir les grands quarrez; & pour faire la comparaison, je dis que le rectangle B I A avec le quarré de L I est égal au quarré de L A ou L D son égal, ou quelqu'autre des grands quarrez; le rectangle B K A plus le quarré de L K est égal au mesme grand quarré L D, & ainsi de tous les petits rectangles qui se pourront faire; partant les grands quarrez excéderont les petits rectangles de tous les petits quarrez L I, L K qui vont toûjours en diminuant, & par ainsi font une pyramide que nous sçavons estre la troisiéme partie de son parallelipipede ou cube. Si donc nous ostons le tiers, il restera les deux tiers pour la valeur de la sphere ou spheroïde, qui seront par cette raison les deux tiers de leur cylindre; ce qu'il falloit prouver.



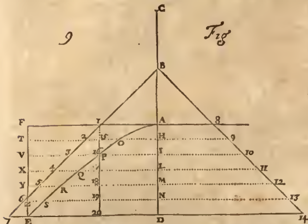
DE L'HYPERBOLE.

DANS l'Hyperbole A E D B C le sommet est C, c'est-à-dire que du point C on commenceroit l'hyperbole opposée; A C est le diamétre transversal coupé en deux au point B qui s'appelle le centre de l'Hyperbole. Il faut voir quand l'Hyperbole tourne sur la ligne A D, qui est l'axe, quelle raison le solide ou conoïde hyperbolique qui se fait, peut avoir avec son cylindre, c'est à dire, le solide qui se fait quand le parallelogramme F D tourne aussi sur l'axe A D.

Nous sçavons que le conoïde est au cylindre, comme tous les quarrez ensemble compris dans l'espace A E D, sçavoir le quarré de H O, de I P, L Q, & les autres, sont au quarré de E D pris autant de fois qu'il y en a de petits. Il reste à chercher la raison des quarrez entr'eux avec le grand.

La propriété de l'Hyperbole est que le quarré H O est au quarré I P, comme le rectangle C H A est au rectangle C I A; le quarré I P est au quarré L Q, comme le rectangle C I A au rectangle C L A, & ainsi des autres; & par ainsi tous les petits rectangles sont au grand rectangle C D A pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme tous les petits quarrez sont

au grand quarré pris autant de fois qu'il y en a de petits. Mais pour ſçavoir quelle eſt cette raiſon, je change les petits rectangles en leurs égaux, & au lieu du rectangle C H A je poſe le rectangle C A H plus le quarré H A; au lieu du rectangle C I A, je poſe le rectangle C A I plus le quarré I A, & ainſi des autres; pour le grand, il n'y faut rien changer. On fera enſuite la comparaiſon, premiérement des rectangles C A H, C A I, & des autres petits entr'eux & au grand C D A pris autant de fois qu'il y en a de petits; & nous trouvons que tous les petits rectangles ſont de meſme hauteur, ſçavoir C A, & par ainſi ils ſeront entr'eux comme leurs baſes. Nous avons donc pour les petits rectangles un ſolide qui a pour hauteur la ligne C A, & pour baſe tous les nombres naturels qui compoſent un triangle. Si au lieu de la ligne C A je prens ſa moitié A B, j'auray un ſolide qui aura pour baſe le quarré de A D, & pour hauteur la ligne B C; cecy eſt pour les petits rectangles. Pour le grand rectangle, ſon ſolide a pour hauteur D C, & pour baſe D A pris autant de fois qu'il y a de petits rectangles, c'eſt-à-dire le quarré D A; partant les deux ſolides ont tous deux le meſme quarré D A pour baſe; & partant nous n'avons à conſiderer que leur hauteur D C pour le grand, & B C pour le petit; partant tous les petits rectangles ſont au grand rectangle pris autant de fois, comme D C eſt à B C.



Il reſte maintenant à conſiderer comment tous les petits quarrez ſont au meſme grand rectangle. Or tous les petits quarrez, ſçavoir ceux de A H, A I, A L, A M, A N, ſont une pyramide qui a pour baſe le quarré de A D, & pour hauteur la meſme A D. (car les quarrez diminuez à l'infini ſont une pyramide) Mais la pyramide eſt le tiers de ſon parallelipipede; c'eſt-à-dire du ſolide qui a pour baſe le meſme quarré que la pyramide, & qui ſe hauſſe autant que la pyramide, ſçavoir de la ligne D A; donc au lieu de la hauteur D A, j'en prens le tiers, & j'ay le ſolide qui a pour baſe le quarré D A, & pour hauteur le tiers de D A; joignant donc ce tiers de D A avec B C que j'avois trouvé devant, j'ay le tiers de D A plus B C ou A B ſon égale, à la toute D C.

Pour le faire plus élégamment, je diray: Comme le tiers de A G (car

j'ay ajousté à A C la ligne C G égale à B C) avec le tiers de D A qui est comme le tiers de D G à la ligne D C; ainsi le conoïde hyperbolique ou petit solide est au cylindre fait par A F E D. Que si nous voulons avoir la raison du cône qui se feroit, si le triangle A E D se tournoit sur la ligne D A (pour avoir ce triangle il faut tirer la ligne droite A E.) Euclide dit que le cône est le tiers de son cylindre: prenant donc le tiers de la ligne D C, elle sera au tiers de la ligne D G, ou toute la ligne D C à toute la ligne D G, comme le cône au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

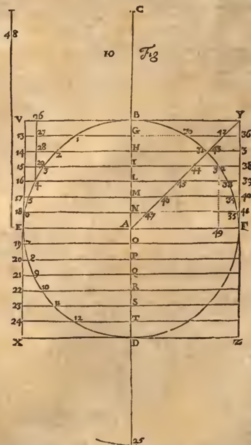
Autre spéculation sur l'Hyperbole

DU centre de l'Hyperbole B j'ay tiré les asymptotes B 7, B 14. Si par le point A je tire la touchante 8 A 1, & que je tire d'un asymptote à l'autre infinies paralleles, comme les lignes 9 H 2, 10 I 3, & les autres, le rectangle 8 A 1 est égal au rectangle 9 O 2, 10 P 3; & ainsi tous ces rectangles sont égaux entr'eux. Quand le triangle B 7 D tourne sur D A, il se fait un cône qui est égal à tous les quarrez qui sont dans le plan, sçavoir au quarré de A 1, H 2, I 3, & à tous les autres, & dans le plan 1 B A. Si donc de tous ces quarrez j'en oste premiérement le vuide 1 B A, & tout ce qui est au dehors du plan E D A, il me restera le conoïde hyperbolique qui se fait par E D A tournant sur D A. Or le quarré H 2 vaut le rectangle 9 O 2 plus le quarré de H O; le quarré I 3 vaut le rectangle 10 P 3 plus le quarré de I P; le quarré de L 4 vaut le rectangle 11 Q 4 plus le quarré de L Q, & ainsi des autres. Mais chacun des rectangles est égal au quarré de A 1, lequel pris autant de fois qu'il y a de rectangles, fera le cylindre 1 20 D A; partant ostant ce cylindre, il restera les quarrez de H O, I P, L Q, qui sont égaux au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

PROPORTION DE LA SPHERE ou Sphéroïde, ou de leurs portions, au Cylindre circonscrit, & au Cône inscrit.

ON considérera icy ce que fait la figure qui est en la page suivante tournant sur B D, & ne prenant que la portion 26 B L 4 que fait le cylindre & la portion de la Sphére ou Sphéroïde qui se fait par la révolution de la figure 4 1 B L. Le quarré de G 1 & les autres petits sont au grand quarré 4 L pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme la portion de la Sphére ou sphéroïde (car c'est la mesme raison en l'une & en l'autre) est au cylindre 26 B L 4. Il est donc question de chercher la raison de ces petits quarrez au grand quarré. Or tous les petits quarrez sont au grand, comme les rectangles D L B, D I B, D H B, D G B sont au grand rectangle D L B; partant tous lesdits petits rectangles sont au grand rectangle D L B pris autant de fois, comme tous les petits quarrez sont au grand quarré pris autant de fois. Pour trouver la raison des petits rectangles au grand rectangle pris autant de fois, je change la valeur des petits rectangles en d'autres qui vaillent autant, & je dis ainsi: Le rectangle D B L moins le quarré B L vaut le rectangle D L B; le rectangle D B G moins le quarré B G vaut le rectangle D G B; le rectangle D B H moins le quarré B H vaut le rectangle D H B; le rectangle D B I moins le quarré B I vaut le rectangle D I B; partant dans les petis rectangles je trouve un solide qui a pour hauteur D B, & pour bases les petites lignes L B, L G, L H, L I qui font la somme de nombres naturels qui est un triangle lequel est toûjours la moitié de son quarré; partant

je double le triangle pour avoir le quarré; & par ainsi j'auray un solide qui aura pour hauteur DA moitié de DB (car doublant le triangle j'ay osté la moitié de DB) & pour base le quarré de LB comme l'autre solide. Pour le grand rectangle, sçavoir DLB pris autant de fois, il compose un solide qui a pour hauteur la ligne DL, & pour base le mesme quarré LB. Les bases estant égales, il n'y a que les hauteurs à considérer, sçavoir DB & BL. Mais



il faut oster des petits rectangles les quarrez qui estoient de moins : or ces petits quarrez composent une pyramide qui a pour base le quarré de LB, & pour hauteur LB. Au lieu de la pyramide je prens un parallelipipede qui luy

luy soit égal : je retiens le mesme quarré L B, & pour hauteur le tiers de L B, qui est la hauteur du parallelipipede égal à la pyramide (car toute pyramide est le tiers de son parallelipipede.) Il faut oster ce solide de l'autre qui a mesme base, & partant il suffit d'oster la hauteur du dernier de la hauteur de l'autre. Voilà touchant le solide fait par les petits rectangles. Il reste maintenant à chercher le solide du grand rectangle. Or ce solide n'est autre que celuy qui a le quarré L B pour base, & D L pour hauteur. Celuy-cy n'a point d'autre base que les autres, partant nous ne regarderons que la hauteur D L en celuy-cy, puis nous dirons que comme le tiers de la ligne 25 L (car D A moins le tiers de L B vaut le tiers de la ligne 25 L) est à la ligne D L, ainsi le solide fait par la figure 4 2 B L est à son cylindre fait par le parallelogramme 26 4 L B.

Que si nous voulons avoir le cône qui se feroit par la mesme révolution, si on tiroit une ligne B 4. Nous sçavons que le cône est le tiers de son cylindre ; je prendray donc le tiers de D L (laquelle représente le cylindre) & je diray que comme le tiers de la ligne 25 L est au tiers de la ligne D L, ainsi nostre solide est au cône : or qui dit le tiers d'une ligne au tiers d'une autre, dit la ligne entière à la ligne entiére ; partant le solide sera au cône, comme la ligne 25 L est à la ligne D L ; ce qu'il falloit trouver. Dans la mesme figure il faut considérer que, lors qu'elle tourne sur la ligne A B quand le cylindre V E F Y se fait, il se fait aussi un solide par la révolution du plan A B F, qui s'appelle un creux. Il se fait encore un autre solide par le plan B 30 F Y. Nous en avons encore un autre qui se fait sur le triangle A Y B qui est un cône. Il faut voir quel rapport ont entr'eux tous lesdits solides.

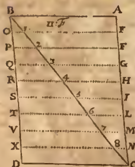
Les divisions estant faites à l'infini, & toutes les lignes tirées telles qu'on les voit en la figure, les figures sont entr'elles comme les quarrez de ces lignes sont entr'eux. Or pour ce qui est du cône que nous voulons égaler au solide fait par B 30 F Y, il faut dire que la grande ligne du cylindre total est coupée en deux également au point I, sçavoir la ligne 15 I 38, & en deux parties inégales au point 32 ; partant le rectangle 15 32 38 avec le quarré I 32, vaut le quarré I 38. Si donc du quarré I 38 j'oste le quarré I 32, il me reste le rectangle 15 32 38 qui appartient au solide B 30 F Y.

Puis aprés nous entrons dans les propriétez de l'ellipse ; (car ce que je concluray s'entendra du cercle comme de l'ellipse.) Le diamétre E F, le diamétre B D & le costé droit du diamétre E F, sçavoir la ligne 48, sont trois proportionnelles ; & la premiére E F est à la troisiéme 48, comme le quarré de la premiére E F est est au quarré de la seconde D B. De plus, le rectangle E 49 F est au quarré de l'ordonnée 49 32 comme la ligne E F est à la ligne 48 costé droit d'icelle ; partant le rectangle E 49 F est au quarré 49 32, comme le quarré E F est au quarré D B, ou le quarré de A F au quarré de A B. Au lieu de A F je pose son égale B Y ; donc le quarré B Y est au quarré B A, comme le rectangle E 49 F au quarré 49 32 ; ou bien prenant leurs égaux, le rectangle 15 32 38 au quarré I A égal au quarré 49 32. Mais le quarré B Y est au quarré B A, comme le quarré I 44 est au quarré I A ; partant le rectangle 15 32 38 sera au quarré I A, comme le quarré I 44 est au mesme quarré I A ; partant le rectangle 15 32 38 sera égal au quarré I 44 ; & par ainsi le cône sera égal au solide de B 30 F Y. Mais le cône est le tiers de son cylindre ; si donc j'oste le tiers du cylindre total, il restera les deux tiers pour le solide ou le creux qui se fait par le plan A F B, qui est ce qu'on cherchoit.

Or, non-seulement le cône est égal au solide extérieur, mais chaque partie est égale à chaque partie ; c'est-à-dire que le solide fait par N 47 46 M, est égal au solide fait par 35 41 40 34 ; le solide 45 L M 46 est égal au solide 33 39 40 34, & ainsi des autres. Par tout cecy nous venons à la con-

noissance du centre de gravité de tous ces solides ; car le centre de gravité du cylindre A Y est au milieu de la ligne A B : or le centre de gravité du cône est aux $\frac{1}{4}$ de la ligne A B ; le centre de gravité du solide qui luy est égal, se trouve au mesme lieu dans la ligne B A aux $\frac{1}{4}$ d'icelle ; partant, selon Archimède, le centre de gravité de la Sphére ou Sphéroïde restant du cylindre sera connu, parce qu'il est en la raison réciproque des deux solides, sçavoir de la Sphére ou Sphéroïde, au solide de dehors, c'est-à-dire à B 30 F Y, aux lignes qui sont depuis le centre de gravité du grand cylindre, au centre de gravité du petit solide, & à la ligne qui part du centre de gravité du mesme grand cylindre au centre de gravité de la figure restante que je cherche, qui est de la Sphére ou Sphéroïde.

PROPORTION
du Cône au Cylindre.



En cette figure le triangle est au parallelogramme, comme tous les nombres naturels sont au quarré du plus grand ; c'est-à-dire, comme 1 à 2. Que si vous le faites tourner sur la ligne B D, le cône qui se fera de B D C sera au cylindre qui se fera sur A B D C comme 1 à 3 selon Archimède.

DE LA CONCHOÏDE.

Nous considérons premiérement le grand triligne A 7 14. Le centre de la Conchoïde est A ; la Conchoïde 14 7 est la premiére, & la seconde Conchoïde est 16 17 ; la régle qui les sépare B C ; les lignes qui partent de cette régle ou ligne & qui vont aux deux Conchoïdes, sçavoir C 7, M 6, L 5, & les autres, sont toutes égales entr'elles, & pareillement les lignes C 17, M 22, L 19 sont égales entr'elles & aux autres cy-dessus, sçavoir à C 7, M 6, &c. Nous disons donc ainsi :

Le grand triligne est divisé (selon les indivisibles) en secteurs semblables infinis qui ressemblent aux triangles, mais par les indivisibles nous les prenons pour secteurs : or les secteurs semblables sont entr'eux comme leurs quarrez ; nous devons donc chercher la raison & la valeur des quarrez pour tirer nos conséquences. Au lieu de chaque quarré nous considérons son égal ; & par ainsi nous trouvons que le quarré A 7 vaut les quarrez A C, C 7 plus deux fois le rectangle A C 7 ; le quarré A 17 vaut les quarrez A C, C 7 ou C 17 moins le rectangle A C 17 pris deux fois. Tout cecy mis ensemble vaut le quarré C 7 deux fois, plus le quarré A C deux fois, les rectangles qui sont par plus & moins se détruisant l'un l'autre ; or ces quarrez nous représentent les deux trilignes, sçavoir A 7 14, & A 17 16.

Je dis que le grand triligne A 7 14, & le petit A 17 16 sont égaux à deux fois les quarrez A C, & C 7. [La petite figure qui est icy a esté faite,

d'autant que dans l'espace C 7 B 14 il n'y a point de secteurs qui remplissent ledit espace, mais seulement des quarrez qui sont entr'eux comme les secteurs. Je prens donc des secteurs tous semblables, dont les angles soient égaux aux angles en A, & la hauteur égale aux lignes C 7, M 6, & autres : ces secteurs sont aux grands secteurs, comme les quarrez de C 7, M 6, L 5, & autres, sont aux grands quarrez A 7, A 6, A 5, & autres.] Ayant donc l'égalité susdite entre les trilignes A 7 14 & A 17 16, & les quarrez A C & C 7 pris deux fois: au lieu des quarrez C 7 je prens des secteurs semblables, qui garderont la mesme raison entr'eux que lesdits quarrez ; partant au lieu de dire, deux fois les quarrez C 7, M 6, & les autres, je prens deux fois les secteurs compris dans la petite figure T V Y X, & je dis, deux fois les petits secteurs avec deux fois le triangle A C B sont égaux au triligne A 7 14, & au triligne A 17 16 ; & c'est icy la premiére conséquence ou conclusion.

Pour la seconde, c'est quand nous ostons du grand triligne A 7 14 le petit triligne A 17 16, alors nous avons d'un costé l'espace 16 17 7 14 pour comparer avec deux fois les petits secteurs, le triangle A B C, & l'espace 16 17 C B. Alors l'espace d'une conchoïde à l'autre, c'est-à-dire 16 17 7 14, est égal à deux fois les petits secteurs plus deux fois l'espace 16 17 C B ; & c'est icy une autre conclusion.

J'avois omis de dire que quand du grand triligne & du petit triligne j'en oste le petit, il reste le grand A 7 14 qui est égal à deux fois les petits secteurs, au triangle A C B & à l'espace 16 17 C B, qui est une autre conclusion.



Que si on veut retrancher du grand triligne A 7 14 le triangle A C B, il restera l'espace 7 C B 14 qui sera égal à deux fois les petits secteurs avec une fois C B 16 17, qui est une quatriéme conclusion.

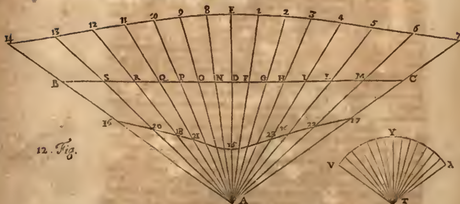
Maintenant il nous faut voir quelle raison il y a entre le triangle A B C & l'espace B C 7 14. Cela se fera considérant le quarré A 7 duquel nous osterons le quarré A C. Ayant donc divisé le triligne A 7 14 en secteurs tous semblables & infinis, ainsi qu'il a esté fait cy-dessus aux autres conclusions, & sçachant que les secteurs sont entr'eux comme leurs quarrez, nous disons que le quarré A 7 est égal aux quarrez A C & C 7 plus le rectangle A C 7 pris deux fois. Si j'en oste le quarré A C, il me reste le quarré

C 7 plus le rectangle A C 7 deux fois. Il faut considérer quels solides ils sont.

Tous les quarrez C 7, M 6, & les autres sont tous égaux; & par ainsi tous joints ensemble font un parallelipipede ou solide qui a pour hauteur & largeur la ligne C 7, & pour longueur une ligne telle qu'on voudra, sçavoir autant qu'on aura pris de fois & ajousté les quarrez l'un à l'autre; c'est le premier solide qui se forme.

L'autre se fait du rectangle A C 7 pris autant de fois que les susdits quarrez, & forme un solide qui a pour hauteur C 7 comme l'autre, mais sa longueur est diverse, sçavoir des lignes A C, A M, A L, & des autres qui toutes sont inégales.

Or ces deux solides se doivent mettre ensemble afin de les comparer à celuy qui est composé des quarrez A C, A M & autres qui tous sont inégaux; & partant ce solide sera racourci de deux costez. Or ce solide se peut considérer comme si j'avois fait un cercle du centre A & de l'intervalle A D: car alors la ligne B C sera une touchante dudit cercle au point D; la ligne A D sera le sinus total; & les lignes A N, A O, A P seront toutes des secantes, & ainsi le solide sera formé des quarrez des secantes. Or ces deux solides estant de mesme hauteur, sçavoir de la ligne C 7 & autres, il est aisé de les joindre ensemble, & de tous deux en faire un solide composé de tous les quarrez C 7, M 6, &c. d'une part, & de la ligne C 7 multipliée par la somme des lignes A C, A M, & les autres prises deux fois (parce que le rectangle A C 7 est deux fois dans le quarré A 7) c'est-à-dire, qu'il faut doubler les lignes A C, A M, & autres.



12. Fig.

Le solide qu'il faut comparer à celuy-cy est fait par la somme des quarrez des lignes A C, A M, & des autres qui toutes sont inégales. Nous disons donc, Comme le solide fait par la somme des quarrez A C, A M, & autres, est au solide composé des deux cy-devant mis; ainsi le triangle A B C est à la figure C 7 14 B. Mais dans le premier solide les lignes C 7, M 6 me sont données, & partant leurs quarrez: de plus les lignes AC, AM, & autres me sont aussi données, d'autant que la ligne A D (que je prens pour sinus total ou demi-diamétre d'un cercle que je feins estre fait) m'est donnée, & la ligne D E sur lesquelles j'ay formé ma Conchoide; & par le moyen de A D sinus total & de l'angle B A D, je connois toutes les secantes de ce cercle

que

que je pose estre décrite sur le rayon A D: ces sécantes sont A N, A O, A P, & les autres qui suivent. Dans le dernier solide tous les quarrez de A C, A M me seront donnez, puisque les lignes sont données; & ainsi je joins les quarrez C 7, M 6 avec le rectangle fait de A C doublé & C 7, le tout pris autant de fois qu'il y a de quarrez. Or C A, & M A sont sécantes; donc par le calcul il nous sera facile d'en trouver la valeur que nous comparerons avec le second solide qui est composé de l'aggrégé ou somme des quarrez des sécantes; & telle sera la raison de A B C à l'espace B C 7 14.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT un espace égal à un Quarré donné, & ce d'un seul trait de Compas.

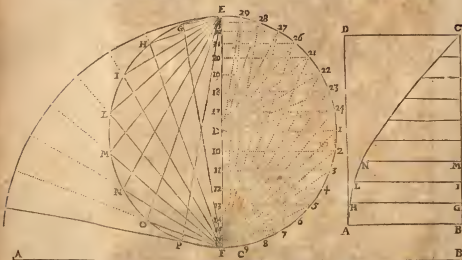
ON demande qu'il soit tracé sur un cylindre droit d'un seul trait de compas un espace égal au quarré de la ligne A B. Pour le faire je coupe en deux également la ligne A B au point C, & je décris le cercle F M E, le diamétre duquel F E soit égal à A C. Sur ce cercle j'éleve un cylindre dont la hauteur soit du moins le double de F E, & au milieu de cette hauteur soit le point F; puis ouvrant le compas de l'intervale F E, je décris un espace sur la superficie du cylindre. Je dis que cét espace vaut le quarré de A B.

Pour le prouver, je divise le cercle en parties infinies aux points E G H I & autres: de chacun de ces points j'éleve des perpendiculaires au plan du cercle en nombre infini, comme les points sont infinis: du point E qui est l'extrémité du diamétre, je tire à chaque point de la division des lignes droites E G, E H, E I, & autres qui sont dans le demi-cercle E L F. Or toutes ces petites lignes sont des sinus du quart d'une circonférence; ce qui se connoistra, faisant du rayon F E & du centre F un cercle qui ait pour diamétre le double de E F; mais icy je me contente de la quatriéme partie de la circonférence. Si donc du centre F je tire des lignes en nombre infini qui soient toutes égales à F E, elles iront jusques à la circonférence de ce cercle, & couperont toutes les petites lignes E G, E H & les autres à angles droits, car l'angle se trouve dans le demi-cercle E L F; & partant toutes les petites lignes sont les sinus du quart d'une circonférence.

Nous sçavons que le demi-diamétre du cercle est au quart de la circonférence, comme tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Nous sçavons aussi que le quarré du demi-diamétre est égal à la figure qui est faite par les infinis petits sinus qui divisent ce quart de circonférence. Or le demi-diamétre est F E qui est égal à la ligne droite A C moitié de A B; partant son quarré quatre fois vaudra le quarré de A B. Or les sinus E G, E H, &c. sont égaux aux perpendiculaires élevées des points G H, &c. jusques au tetranchement fait par le compas, comme il sera montré; & par ainsi la figure ou l'espace tracé par le compas qui est ouvert de la grandeur E F, l'un des pieds posé sur F qui est un point pris en quelqne endroit que ce soit de la surface du cylindre, & l'autre pied, par exemple sur le point E, & tournant sur la superficie du cylindre tant qu'il revienne au mesme point E: cét espace compris sur le cylindre vaut quatre fois l'espace compris des petits sinus qui divisent le quart de la circonférence; car le compas parcourt les quatre quarts de la circonférence du cylindre, s'il se peut ainsi dire. Or le cylindre est présumé prolongé tant en haut qu'en bas autant qu'il faudra, dessus & dessous ledit point F, & le cercle F M E parallele à sa base pour satisfaire à la question.

On considere icy deux triangles qu'on veut prouver estre égaux: l'un est F H E; l'autre a pour base F H, pour costes la perpendiculaire tirée du point H jusques au retranchement fait par le compas, & l'hipotenuse sera égale à F E, puis que c'est l'ouverture du compas.

Reste à montrer que la ligne E H est égale à la perpendiculaire élevée du point H, quand elle a esté retranchée par le compas ouvert de la grandeur F E. Pour cét effet, il faut tirer la ligne F H, & concevoir deux triangles, l'un de la ligne F H & F E portée a l'extrémité de la perpendiculaire tirée du point H, & qui monte vers le haut du cylindre & de ladite perpendiculaire qui sort de H jusques au retranchement fait par F E portée sur la surface du cylindre. Ces trois lignes font un triangle rectangle qui est égal au triangle F E H; car en tous les deux triangles la ligne F H est commune; l'angle en H est droit, car il se fait de la ligne F H & de la perpendiculaire sur le point H en l'un des triangles, sçavoir en celuy qu'on veut montrer égal à F E H, & pareillement l'angle en H de l'autre triangle F E H est droit, estant dans le demi-cercle; la ligne F E qui a coupé la perpendiculaire élevée sur le point H est égale à F E; partant la ligne E H est égale à ladite perpendiculaire qui part du point H, & qui est coupée par la ligne F E par la révolution du compas. Le mesme se prouvera de toutes les autres lignes E G, E I, E L, E M, & autres.



Or cette figure se trouve estre la mesme que la troisiéme figure cy-devant, si on suppose que la circonférence E H L F est égale à B C dans la troisiéme figure, & qu'elle est divisée infiniment en sinus G E, H E, I E, & les autres, tout ainsi que la ligne B C de la troisiéme figure est divisée en sinus infinis, sçavoir G H, I L, M N, &c. Or nous devons considérer cette troisiéme figure ou bien la présente, car il n'importe pas, & voir ce qu'elles font. Par exemple, quand la troisiéme figure tourne sur la ligne B C, elle fait un cylindre avec le rectangle B D, & un autre solide avec la figure courbe A C B. Je trouve que le cylindre est double du petit solide fait de la figure courbe. Pour le prouver je me sers de la treiziéme figure présente, & je feins avoir tiré une infinité de lignes du point F à tous les points, comme F P, F O, F N, & autres, qui sont toutes égales aux premiéres tirées du point E aux mesmes

points, sçavoir à EG, EH, EI, &c. Je dis en suite que les quarrez de GE & GF sont égaux au quarré de FE: il en est de mesme des quarrez de EH & HF, & ainsi des autres; partant tous ces quarrez ensemble seront égaux au quarré de EF pris autant de fois. Mais dans ces petits quarrez je n'ay besoin que de ceux qui composent la figure, sçavoir des quarrez de EG, EH, EI, & autres tirez du point E, qui sont la moitié de tous ceux que j'avois comparez avec le grand quarré FE; partant tous ces petits quarrez seront à autant de fois le grand quarré FE comme la moitié au tout. Mais les solides sont entr'eux comme tous les quarrez pris ensemble; partant le petit solide fait de la figure courbe ABC en la troisiéme figure, sera au cylindre fait de BD, comme 1 à 2; ce qu'il falloit démontrer.

On considérera encore en la mesme figure un autre trait de compas. Je pose une des pointes sur le point F que je prens dans la circonférence du cercle F 1 E L, lequel cercle est la base mitoyenne du cylindre qu'on suppose toûjours prolongé en haut & en bas autant qu'il est nécessaire. On met donc l'un des pieds du compas en F, & l'ouverture d'iceluy est F 1 qui est la soutendante du quart de la circonférence torale F 5 1. Or cette circonférence est divisée en parties égales & infinies aux points 2, 3, 4, &c. sur chacun desquels j'éleve des perpendiculaires, comme cy-devant: des mesmes points je tire des perpendiculaires sur le demi-diamétre FD qui le divisent en une infinité d'autant de parties inégales. Il faut maintenant considérer les propriétez de toutes ces lignes. Nous voyons qu'il se fait plusieurs triangles rectangles dont les costez sont F 2, F 1, & la perpendiculaire sur le point 2, laquelle est en l'air; le second, F 3, F 1, & la perpendiculaire en l'air sur le point 3; F 4, F 1, & la perpendicle en l'air sur le point 4, & cette perpendiculaire tirée en l'air s'augmente à mesure que la soutendante diminuë. Car les quarrez des deux lignes F 2 & la perpendiculaire en l'air sur le point 2, sont égaux au quarré de F 1; les quarrez de F 3, & de la perpendiculaire sur 3 en l'air sont égaux au mesme quarré F 1, & ainsi des autres. Mais le quarré F 1 est égal au rectangle EFD, le quarré F 2 est égal au rectangle EF 10, le quarré F 3 au rectangle EF 11, & ainsi des autres quarrez & rectangles; partant tous les rectangles EFD, EF 10, EF 11, & les autres, sont entr'eux comme les quarrez F 1, F 2, F 3, &c. & partant tous les rectangles EF 10, EF 11, & autres tous ensemble sont au grand rectangle EFD, comme tous les quarrez F 2, F 3, &c. sont au grand quarré F 1. Quand du rectangle EFD j'oste le rectangle EF 10, il reste le rectangle EF par 10 D qui est égal au quarré de la perpendicleulaire tirée du point 2 en l'air; quand du mesme rectangle EFD j'en oste le rectangle EF 11, il reste le rectangle EF par 11 D qui est égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 3 en l'air. (Or j'ay besoin des quarrez de ces perpendiculaires, d'autant qu'en tournant la troisiéme figure sur BC, ces lignes représentent les demi-diamétres des cercles qu'il faut comparer avec le quarré du demi-diamétre de la base du cylindre.) Mais tous les rectangles susdits ont une mesme hauteur, sçavoir FE; & partant ils sont entr'eux comme les lignes FD, F 10, F 11. Si on oste de la base d'un rectangle la base d'un autre rectangle, il restera leur différence: comme si de FD j'oste F 10, il restera D 10; si de FD j'oste F 11, il restera D 11, & ainsi des autres. Or ces restes sont homologues avec les quarrez des lignes perpendiculaires qui restent quand j'ay osté le quarré F 2 du quarré F 1: du mesme quarré F 1 j'ay osté le quarré F 3, puis F 4, &c. il reste les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air des points 2, 3, 4, &c. partant les lignes D 10, D 11, & autres garderont entr'elles la mesme raison que les quarrez desdites perpendiculaires. Mais les lignes D 10, D 11, D 12, &c. sont sinus; car les lignes 2 10, 3 11, 4 12, &c. sont perpendiculaires sur le diamétre EF; donc les quarrez des perpendiculaires

HH h ij

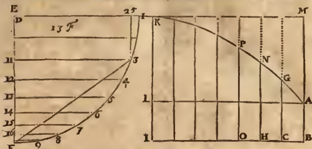
Il faut entendre icy que la figure A B C est faite de toutes les perpendiculaires élevées sur les points 2, 3, 4, &c. & que A B est égale à F 1.

sont au quarré de la grande F I prise autant de fois, comme tous les petits sinus sont au sinus total D F pris autant de fois. Mais les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, comme le demi-diamétre du cercle est au quart de la circonférence ; partant le solide fait par la révolution de la figure courbe A C B sur la ligne B C, sera au cylindre fait du rectangle B D, comme le demi-diamétre du cercle est au quart de la circonférence.

Considérons maintenant le trait du compas fait de l'intervale F 3, gardant toûjours le point F pour poser ledit compas. Il se trouve que le quarré F 4 avec le quarré de la perpendiculaire tirée du point 4 en l'air, est égal au quarré de F 3 ; le quarré F 5 avec celuy de la perpendiculaire sur le point 5 en l'air, sont égaux au mesme quarré F 3, & ainsi des autres. Or le rectangle E F 11 est égal au quarré F 3, & le rectangle E F 12 est égal au quarré F 4, & ainsi des autres rectangles & quarrez. Si donc du rectangle E F 11 j'oste le rectangle E F 12, il reste le rectangle E F par 12 11 égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 tirée en l'air. Si du mesme rectangle E F 11 on oste le rectangle E F 13, il reste le rectangle E F par 13 11 qui est égal au quarré de la perpendiculaire tirée sur 5, & ainsi des autres. Que si nous feignons une parabole estre tirée du sommet 11 vers la circonférence du cercle, & que des points 11, 12, 13, 14, 15, pris sur son axe 11 F on tire des ordonnées jusques à la circonférence de ladite parabole, les quarrez de telles ordonnées seront égaux aux rectangles ; sçavoir le quarré de la ligne tirée du point 12 à la parabole, sera égal au rectangle fait par le costé droit de ladite parabole qui est F E, & la portion de l'axe 11 12 ; le quarré de l'ordonnée tirée du point 13 à la parabole, sera égal au rectangle E F par 11 13, & ainsi des autres. Ce qui fait voir que les quarrez des ordonnées sont égaux aux quarrez des perpendiculaires qu'on a tirées en l'air des points 3, 4, 5, &c. & par conséquent les ordonnées seront égales ausdites perpendiculaires. Mais d'autant que les perpendiculaires sont en égale distance l'une de l'autre, & les ordonnées inégalement distantes l'une de l'autre, cela est cause qu'on ne peut pas comparer le plan fait par les perpendiculaires avec le plan qui se fait par les ordonnées, d'autant que les perpendiculaires divisent la ligne en parties égales, mais les ordonnées ne divisent pas l'axe également, mais inégalement ; & ainsi le plan qui se fait des perpendiculaires ne peut pas estre comparé avec le plan fait par les ordonnées pour en sçavoir la raison.

Maintenant il faut considérer la raison des solides, si la figure se tournoit sur la ligne F 5 3 étenduë en ligne droite, supposant que le trait du compas se fasse du point F, & de l'ouverture F 3. Or nous avons trouvé par le précédent discours, que le rectangle E F par 11 12 est égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 en l'air ; le rectangle E F par 11 13, égal au quarré de la perpendiculaire sur 5 en l'air, & ainsi des autres : partant toutes ces lignes seront homologues avec les quarrez desdites perpendiculaires. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. ne sont point sinus, parce qu'elles ne partent pas du demi-diamétre D 1, car il s'en faut la ligne D 11 qu'elles ne viennent jusques à D 1. Que si elles estoient des sinus, nous ferions la raison comme en l'autre précédente raison des solides, sçavoir comme les petits sinus au sinus total D 1 pris autant de fois. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. sont les mesmes que si du point 4 on menoit une perpendiculaire sur 11 3, & du point 5 & 6 sur la mesme 11 3, & ainsi de tous les autres points qui divisent la circonférence. Or toutes ces lignes ne sont point sinus, car il s'en faut la ligne 11 D, ou la perpendiculaire qui seroit tirée du point 3 sur la ligne D 1, sçavoir 3 25. Comme donc la ligne 11 3, ou D 25 son égale, à la circonférence F 5 3, ainsi tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Mais pour trouver l'équation des solides il faut avoir la différence des sinus,

nus, sçavoir D 12, D 13, D 14, D 15, D 16 moins autant de fois D 11; partant toutes les différences des petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, moins le mesme espace D 11 pris autant de fois, comme le solide fait par les quarrez des perpendiculaires au cylindre qui se fait. Cecy sera mieux



représenté par la petite figure qui est icy. Que I B soit égal à la circonférence F 5 3; A B à D 11 ou à 3 25; & les lignes C G, H N, O P, &c. égales à D 12, D 13, D 14, & autres sinus, desquels il faut retrancher A B ou D 11 pris autant de fois, c'est-à-dire, le parallelogramme A B I L. Tout cela se doit comparer au sinus total pris autant de fois, qui est D F en la grande figure, mais en la petite c'est I K qui fait le parallelogramme I K B M duquel il faut oster le mesme parallelogramme A B I L; & partant il reste le parallelogramme L A M K, & de I K A B il restera le triligne L A P K; & partant le solide fait par les quarrez des perpendiculaires est au cylindre de la grande, comme le triligne L A K au parallelogramme L K M A. Mais ne nous contentant pas de cela, nous cherchons des raisons en lignes; & retournant à la grande figure, nous disons: Comme tous les petits sinus sont au grand sinus pris autant de fois; ainsi le sinus 11 3 est à la circonférence F 3. Or il faut oster de cette raison ce qui y est de trop, & dire: Comme tous les petits sinus moins 11 D pris autant de fois, au sinus total pris autant de fois, moins le mesme 11 D pris autant de fois; & changeant la proportion on dira: Comme le sinus total D F est à D 11, ainsi la circonférence F 5 3 sera à quelque portion de la mesme circonférence F 5 3, laquelle portion il faut oster de la ligne ou sinus 11 3; & par ainsi la ligne 11 3, quand on en a osté ce qui avoit esté retranché de ladite circonférence F 5 3, est à ce qui reste de ladite circonférence F 5 3, comme le petit solide fait des quarrez de perpendiculaires est à leur cylindre. Or tous les sinus & la circonférence me sont donnez; & partant la raison des solides sera connuë, ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut considérer sur la mesme figure la raison des solides entr'eux quand elle roule sur la ligne circulaire F 2 21 étenduë comme droite, & quand l'ouverture du compas est F 21, sans répéter ce qui a esté dit cy-devant: on trouve que les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air des points 21, 22, 23, 24, &c. sont entr'eux comme les lignes 20 19, 20 18, 20 17, &c. Or toutes ces lignes se doivent considérer en cette sorte, 20 D — 19 D; 20 D — 18 D; 20 D — 17 D, & ainsi des autres. Les suivantes se considérent ainsi, 20 D + 10 D; 20 D + 11 D; 20 D + 12 D; 20 D + 13 D, &c. en sorte que 20 D est pris autant de fois qu'il y a de divisions en la circonférence F 2 21 & les autres sinus, sçavoir D 10, D 11 D 12, D 13 &c. sont pris autant de fois qu'il y a de divisions au quart de *Voyez la figure suivante.*

la circonférence F 5 1. De tout cecy il en faut oster les lignes D 19, D 18, D 17, & les autres prises autant de fois qu'il y a de divisions dans la circonférence 1 21. Voilà une des équations; l'autre est la ligne F 20 prise autant de fois qu'il y a de divisions en la circonférence F 2 21.

Pour mieux entendre ce discours, on fera la figure qui est icy à costé du demi-cercle, en laquelle A B vaut F 1, quart de la circonférence; B C vaut 1 21; & la toute A C vaut la circonférence F 3 21; A N vaut F 20, & par ainsi le parallelogramme N C vaut ce qui est contenu dans 20 F 2 21; N G vaut F D sinus total; A G ou son égale N I vaut D 20; N H égale à O P vaut la circonférence 1 21. Nous disons donc que comme le rectangle A N P C est au rectangle I N P L + le triligne N G O — le triligne I N H ou O M P son égal, ainsi le cylindre est au solide qui se fait quand la figure retranchée du cylindre tourne sur la circonférence F 1 21 étenduë en ligne droite; ce qu'il falloit démontrer.

Nous venons maintenant à une considération qui est que prenant toûjours le mesme point F, & l'ouverture du compas telle que son quarré soit égal aux quarrez de F E & de la ligne 30, il se trouve, par éxemple, que les quarrez de F E & de 30 sont égaux aux quarrez de F 22 & de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22, & ainsi de tous les autres. Or le quarré F E vaut les quarrez E 22 & 22 F; partant les quarrez de E 22, 22 F, & de 30 sont égaux au quarré de 22 F & à celuy de la perpendiculaire tirée de 22 en l'air. J'oste des deux équations ce qui est commun, sçavoir le quarré F 22, & il me reste d'une part le quarré E 22 + le quarré 30 égal au

quarré de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22; & ainsi tous les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air de tous le points qui divisent la demi-circonférence, sont égaux aux quarrez des lignes qui partent du poinr E, & se terminent ausdits points, plus le quarré de la ligne 30. Il faut remarqner que la ligne 30 ne change point, mais les autres changent toûjours, puisque les quarrez E 22 & 22 F, E 23 & 23 F, & tous les autres sont égaux au quarré F E pris autant de fois. Mais de tous ces quarrez je n'ay besoin que de la moitié; partant cette moitié sera égale à la moitié du quarré F E pris autant de fois. (On ne prend que la moitié de cette somme de quarrez, parce qu'on n'en a pas besoin d'autre chose; car joignant lesdits qnarrez au quarré de 30 pris autant de fois, on aura la valeur des quarrez des perpendiculaires en lair, qui est ce qu'il faut avoir.)

Nous conclurons donc que le solide qui se fait par la révolution des perpendiculaires qui tournent sur la circonférence étenduë comme une ligne droite, est égal à deux cylindres, le premier desquels a d'une part la ligne F E, & de l'autre la mesme circonférence étenduë; & de celuy-cy il n'en faut prendre que la moitié. L'autre cylindre a la mesme circonférence étenduë, & la ligne 30 pour hauteur; car en l'un & l'autre cylindre, la figure tourne sur la circonférence étenduë; & ainsi le cylindre des perpendiculaires est égal à ce petit cylindre & à la moitié du grand tout ensemble; ce qu'il falloit démontrer.

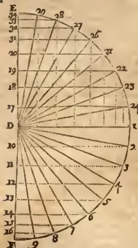
Il faut voir maintenant la comparaison des plans, & comment ils sont entr'eux. Nous avons trouvé que les quarrez de E 22 & de 30 sont égaux au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22, & le rectangle F E 19 est égal au quarré E 22. Je fais un rectangle égal au quarré 30 sur la ligne EF, & sur quelqu'autre ligne tirée depuis E en K, & ainsi les deux rectangles joints ensemble, sçavoir F E 19, & F E K, qui valent le rectangle F E K 19 sont égaux aux quarrez de E 22 & de la perpendiculaire 30, comme aussi au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22. Or si du point K comme sommet je décris nne parabole, dont le costé droit soit égal à F E, & K F soit l'axe: le quarré de l'ordonnée qui partira du point 19 sera égal au rectangle F E par 19 K, & ainsi de toutes les autres; partant les quarrez desdites ordonnées seront égaux aux quarrez des perpendiculaires tirées en l'air, & les mesmes ordonnées égales aux perpendiculaires; c'est pourquoy le plan occupé par les perpendiculaires devroit estre égal au plan occupé par les ordonnées.

Mais la comparaison ne se peut pas faire de la sorte, parce que les perpendiculaires sont également distantes l'une de l'autre; mais les ordonnées le sont inégalement, puis qne la ligne F E est toute coupée en parties inégales, & partant le plan ne peut estre comparé au plan.

Nous venons maintenant à considérer qu'elle est la raison, ou comparaison des quarrez des sinus avec le quarré du diamétre F E. La circonférence F 1 E est divisée en parties infinies & égales, & les lignes 24 17, 23 18, 22 19, 21 20, 26 31, 27 32, 28 33, & 29 34 sont toutes sinus droits. Je dis que le quarré D 24 demi-diamétre vaut le quarré 17 24, & le quarré 17 D qui est sinus de complément égal à la ligne tirée du point 24 perpendiculaire sur le demi-diamétre D 1, & est égale au sinus 29 34. Le mesme quarré du demi-diamétre D 23 est égal aux quarrez de 18 23, & de 18 D sinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 23 sur D 1, & ansi au sinus droit 28 33. Le quarré de D 22 est égal aux quarrez de 22 19, & de 19 D sinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 22 sur D 1 & au sinus 27 32, & ainsi de tous les aurres, en telle sorte que tous les sinus de complément sont égaux aux sinus droits, cy-devant marquez; & ainsi les quarrez

Voyez la figure suivante.

de tous les sinus pris deux fois (ce qui se doit faire, puis que les uns sont égaux aux autres) sont égaux au quarré du demi-diamétre D 1 pris autant de fois qu'il y a de sinus. Mais le quarré du demi-diamétre n'est que le quatt du quarré du diamétre ; partant le quarré du diamétre sera huit fois la somme des quarrez des sinus, c'est-à-dire, que les quarrez des sinus sont au quarré du diamétre pris autant de fois comme 1 à 8. Voilà la premiére partie.

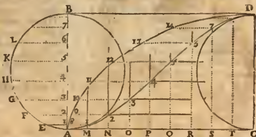


Pour la seconde. Le quarré de F E est égal aux quarrez de F 33 & 33 E, plus deux fois le rectangle F 33 E, qui est à dire le quarré 28 33 deux fois ; le mesme quarré F E est égal aux quarrez F 32 & 32 E, plus deux fois le rectangle F 32 E, ou deux fois le quarré 32 27 ; le mesme F E est égal aux quarrez F 31 & 31 E, plus deux fois le rectangle F 31 E, ou le quarré 31 26 ; le mesme quarré F E est égal aux quarrez F 20 & 20 E, plus deux fois le rectangle F 20 E, ou le quarré 20 21, & ainsi de tous les autres tant en haut qu'en bas : & de cette sorte le quarré F E vient à estre égal à deux fois tous ces petits quarrez F 34, 34 E ; F 33, 33 E ; F 32, 32 E, & tous les autres, en telle sorte que le quarré F E pris autant de fois est double de tous ces quarrez, & de plus, à deux fois les quarrez de 34 29, 33 28, 32 27, & les autres. Nous avons veû comme tous les quarrez de ces sinus 34 29, 33 28, &c. sont au quarré du diamétre F E pris autant de fois, comme 1 à 8. Or ils sont icy deux fois, & les sinus verses aussi deux fois ; partant deux fois les quarrez des sinus verses, & deux fois les quarrez des sinus droits sont égaux à huit fois les quarrez des sinus droits ; & ostant de part & d'autre deux fois les quarrez des sinus droits, restera d'une part deux fois les quarrez des sinus verses égaux à six fois les quarrez des sinus droits ; & prenanr la moitié, les quarrez des sinus verses seront égaux à trois fois les quarrez des sinus droits ; partant les quarrez des sinus verses sont à ceux des sinus droits, comme 3 à 1, mais le quarré de F E pris autanr de fois est aux quarrez des sinus droits, comme 8 à 1 : donc le quarré de F E pris autant de fois est aux quarrez des sinus verses, comme 8 à 3, ce qu'il faloit trouver.

La précédente conclusion nous servira pour trouver la raison du solide que fait la Roulette, quand elle tourne sur la citconférence du cercle générateur étenduë en ligne droite. Car le solide fait par les sinus verses (voyez la figure de la Roulette, qui est placée cy-aprés page suivante) sçavoir par M 1, N 2, O 3, P 4, &c. est au solide fait par le parallelogramme composé du diamétre du cercle, & de la circonférence d'iceluy étenduë en ligne droite, comme 3 à 8 par la conclusion précédente. Nous sçavons aussi que l'espace compris entre les deux lignes A 11 D & A 4 D est égal au demi-cercle A H B, parce que les lignes d'un des espaces sont égales aux lignes de l'autre espace par la construction : partant le double de l'espace est égal au cercle entier A H B A, de sorte que tout ce qui se dira du cercle se doit entendre dudit espace doublé. Mais il a esté démontré que le cylindre de A B est au solid-

lide qui se fait lors que la figure A 12 D 5 A tourne sur la ligne ou circonference A C, comme 8 à 2, lesquels 2 joints à 3 qu'on a trouvez cy-devant, font 5, qui est la raison qu'il y a du solide entier de la roulette, à son cylindre A B D C doublé; car A B D C n'est que la moitié de l'espace parcouru par la roulette.

Remarquez que ce solide qui est au cylindre A D tourné sur C, comme 1 à 4, ou 2 à 8: est celuy que fait l'espace compris entre les deux lignes A 12 D & A 4 D, qui est égal à celuy que feroit le demi-cercle A H B par la mesme révolution, parce que l'une & l'autre figure a ces lignes égales, & posées en mesme distance de A C, & partant est le

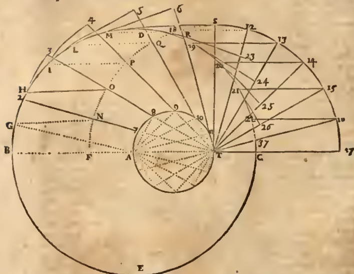


quart dudit cylindre A D; & joignant ledit solide à celuy qui se fait par l'espace compris entre les lignes A 4 D & A C, qui est audit cylindre comme 3 à 8, on aura le solide fait par l'espace compris entre A 12 D & A C, qui sera 5, ledit cylindre A D estant 8.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique donné; & d'un seul trait de compas.

Le cercle B D C E est la base d'un cylindre oblique, les costez duquel partans des points B, G, H, I, &c. vont obliquement rencontrer un autre cercle en haut, qui est l'autre base du cylindre, & est parallele au premier B D C E: (ce cercle peut estre représenté par le cercle F N O P, &c. mais il est en l'air & à plomb audessus de celuy-cy) l'axe du mesme cylindre sort du centre A, & va rencontrer obliquement le centre dudit cercle supérieur. Or nous feignons que du sommet de l'axe soit tirée une perpendiculaire qui tombe sur le point T, & que du sommet de tous les costez du cylindre s'abaissent des perpendiculaires qui tombent aux points F, N, O, P, &c. qui font la circonférence d'un cercle dont le centre est le point T, & lequel est égal au premier B D C, comme il est aisé à voir. Or divisant les deux cercles ou bases du cylindre en parties infinies aux points G, H, I, L, &c. & feignant des lignes tirées G H, H I, I L, &c. ces petites lignes passent pour la circonférence mesme, & le cylindre en cette sorte se trouve divisé en infinies parallelogrammes; car les costez du cylindre avec la portion de la circonférence des deux cercles font des parallelogrammes qui composent tout l'espace du cylindre; de sorte qu'il faut comparer tous ces parallelogrammes au grand parallelogramme pris autant de fois. Si du point G je tire une ligne touchante G 2, & du point correspondant à G, sçavoir de N, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, qui la rencontre au point 2; si du sommet du costé du cylindre (j'entens du costé qui commence en G, & va finir à l'autre cercle au-dessus du point N) je tire une ligne au point 2: cette ligne

ſera perpendiculaire à la ligne G 2. Du point H je tire une ligne touchante, & du point O correſpondant à H, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, ſçavoir O 3, & ainſi des autres points I & P, L & Q, &c. je ne parle plus de la ligne tirée d'enhaut, car il ſuffit d'avoir dit une fois qu'elle ſera perpendiculaire à la meſme touchante. Ayant ainſi tiré autant de perpendiculaires qu'il y a de touchantes à chaque point, ces lignes ſeront N 2, O 3, P 4, Q 5, &c. Si chacune de ces lignes eſt continuée comme 2 N 7, 3 O 8, 4 P 9, &c. elles iront toutes finir au point T centre du cercle F S 17. Pour la preuve, nous feignons qu'il y a une ligne A G, laquelle avec 2 7 compoſe un quadrilatere : en iceluy l'angle 7 2 G par la conſtruction eſt droit; l'angle A G 2 eſt droit, ſçavoir du centre au point d'atouchement; partant 2 N, & G A ſont paralleles. Soit tirée N T, l'arc G B eſtant égal à l'arc N F. Il s'enſuit que l'angle G A B eſt égal à l'angle N T F, puis qu'ils ſont faits tous deux aux centres T & A des deux cercles égaux B D C & F S 17, & partant la meſme G A ſera parallele à N T; donc 2 N 7, & N T ſont paralleles entr'elles; mais elles ſe joignent au point N, & partant elles ne ſont enſemble qu'une meſme ligne.



Maintenant il faut conſidérer les parallelogrammes, au lieu deſquels je prens la perpendiculaire qui tombe du ſommet ſur les touchantes cy-devant, comme du ſommet du coſté du cylindre qui part de G & va en l'air, j'abaiſſe la perpendiculaire ſur le point 2, laquelle eſt la hauteur ou perpendiculaire du parallelogramme compoſé de la ligne G 2, qui paſſe dans les indiviſibles pour circonférence, & du coſté du cylindre qui part de G & va en l'air, lequel coſté vaut pour deux coſtez du parallelogramme, ſçavoir commençant en G & 2, & finiſſant en la circonférence de la baſe ſupérieure du cylindre; & par ainſi on a les quatre lignes du parallelogramme, ſçavoir G 2 (qui paſſe pour circonférence) & ſon égale en la circonférence de la baſe

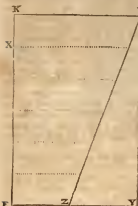
supérieure, & les deux costez du cylindre. Mais au lieu du parallelogramme nous considérons un triangle qui a pour un de ses costez la perpendiculaire tirée du sommet du costé sur le point 2, & qui se peut nommer la perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme; & pour les deux autres costez, la ligne G 2, & le costé du cylindre tiré de G en l'air. Or en ce triangle le costé du cylindre vaut en puissance la ligne G 2, & la perpendiculaire tirée du sommet & finissant en 2. Il faut ensuite considérer un autre triangle, dans lequel la mesme perpendiculaire tombant en 2 soit un des costez; 2 N soit un autre costé; & le troisiéme soit la ligne tombante perpendiculairement du sommet du costé sur le plan du cercle au point N. Or en ce triangle la perpendiculaire qui tombe sur 2 peut autant que les deux lignes 2 N, & la perpendiculaire qui tombe du sommet sur N. Mais cette perpendiculaire qui tombe du sommet sur N, O, P, Q, & autres points de la circonférence est toûjours égale: mais les lignes 2 N, 3 O, 4 P, 5 Q, &c. sont inégales; car 2 N vaut 7 T; 3 O vaut 8 T; 4 P est égale à 9 T, & ainsi des autres qui toutes sont inégales.

Au premier triangle G 2 & l'autre point qui est au cercle supérieur le costé du cylindre qui va de G en l'air à l'autre cercle supérieur, vaut la ligne tirée du sommet (qui est ce troisiéme point en l'air) & qui finit en 2, & la ligne G 2. (on doit entendre cecy de tous les autres points & triangles qui se peuvent former de la mesme sorte.) Mais les lignes G 2, H 3, I 4 &c. vont toûjours augmentant; car G 2 est égale à la soûtendante A 7, la ligne H 3 à A 8, I 4 à A 9; toutes lesquelles lignes A 7, A 8, A 9 sont inégales. Mais avant que de conclure il faut prouver que la ligne G 2 est égale à A 7, H 3 à A 8, & ainsi des autres; de plus que 2 N est égale à 7 T, 3 O à 8 T, &c. Pour cét effet, il faut considérer les triangles 2 G N, & A T 7, ausquels l'angle 2 N G est égal à l'angle A T 7; car les lignes G N, A T sont paralleles, l'angle N 2 G est droit, par la construction, & pareillement T 7 A qui est dans le demi-cercle, & partant le troisiéme angle est égal au troisiéme; la ligne G N est égale à A T, & partant tout le triangle à l'autre triangle, & partant la ligne 2 N à 7 T, & G 2 à la soutendante A 7; ce qu'il falloit démontrer.

Il nous reste à voir le rapport & la raison de tous les petits parallelogrammes à leur plus grand pris autant de fois. Or il faut considérer que les petits parallelogrammes bien qu'ils ayent les costez égaux, car ils sont composez des costez du cylindre & de la portion de la circonférence divisée en parties égales infinies, & cette division est faite aux deux cercles ou bases d'iceluy cylindre; & d'autant que les angles sont inégaux, les parallelogrammes sont inégaux, & ainsi leur hauteur sera inégale, & c'est par cette hauteur qu'il faut considérer lesdits parallelogrammes. Il faut voir premiérement le plus grand de tous qui est fait de B G, tant en la base du cylindre B D C, qu'en l'autre qui est en l'air, & des costez du cylindre. Or en ce parallelogramme il faut remarquer que la perpendiculaire qui est la hauteur dudit parallelogramme, & qui du sommet tombe sur le point B, n'est autre chose que le costé du cylindre; & considérant le second parallelogramme qui a pour costez GH & les costez du cylindre, on voit que ce costé du cylindre vaut en puissance la ligne G 2, & la perpendiculaire ou hauteur du mesme parallelogramme; & partant ladite perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme est plus petite que la perpendiculaire du premier, qui est égale au costé du cylindre; & par ainsi ces hauteurs ou perpendiculaires vont toûjours en diminuant jusques au quart de cercle, & puis aprés vont en croissant au quart suivant.

Remarquez que les lignes G 2, H 3, I 4, L 5 qui sont touchantes, passent pour la circonférence des divisions du cercle, & pour costez des parallelogrammes.

Il faut entendre en cette figure rectiligne, que K V est égale à la plus grande des perpendiculaires, & aussi au costé du cylindre, & qui tombe perpendiculairement sur le costé B G au point B : la ligne K X & les autres divisions representent & sont égales à celles de la circonference, comme K X à B G, & ainsi des autres ; car K E est supposée égale au quart de la circonference B H D. Le plus grand des parallelogrammes est fait des lignes K V, K X ; & quand il est pris autant de fois qu'il y en a de petits, il occupe l'espace K V Y E ; partant toutes ces lignes sont à la grande K V prise autant de fois, comme la figure K V Z E est au quart de la superficie du cylindre qui est icy representé par le parallelogramme K V Y E.



Il faut passer plus avant, & considérer les perpendiculaires qui sont tirées du sommet sur les points 2, 3, 4, 5, &c. du cercle B D C. Or chacune de ces perpendiculaires, par exemple celle qui part du point 2, vaut la ligne qui tombe perpendiculairement sur le point N & la ligne N 2 ; la perpendiculaire qui tombe sur le point 3 vaut en puissance celle qui tombe perpendiculairement sur O, & la ligne O 3, & ainsi des autres. Cecy s'explique mieux dans le petit cercle A 9 T. Il faut donc concevoir la ligne qui part du point A centre du grand cercle B D C base du cylindre oblique, & qui va trouver le centre de l'autre cercle qui est la base supérieure du mesme cylindre, duquel centre on abaisse la perpendiculaire qui tombe sur la circonférence du petit cercle A 9 T au point T. Ayant trouvé le point T, de l'intervale A T comme diamétre je forme le cercle A 9 T ; la demi-circonférence duquel est divisée en autant de parties égales qu'il y en a au quart B D de la circonférence du cercle B D C. Puis aprés, du point duquel j'ay tiré la perpendiculaire sur le point T, je tire des lignes aux points 11, 10, 9, 8, 7, &c. qui font la division du cercle, comme il a esté dit. Du point T je tire des lignes aux mesmes points 11, 10, 9, 8, 7. Je dis davantage que le cercle A 9 T nous représente la base d'un cylindre droit qui a son autre base en l'air, sçavoir un cercle dont la circonférence passe par le point d'où est tiré la ligne qui tombe sur T, & est aussi le centre de la base supérieure du cylindre oblique, & on nommera icy ledit point qui est en l'air, sommet. Nous disons donc que la ligne tirée en l'air dudit sommet sur le point 7, est égale en puissance aux deux lignes dont l'une est celle qui tombe perpendiculairement dudit sommet sur le point T ; & l'autre est T 7. La ligne qui part dudit sommet, & va au point 8, est égale en puissance à la susdite qui tombe dudit sommet sur T, & à T 8, & ainsi de toutes les lignes qui vont au point du cercle A 9 T. Or la ligne qui tombe sur le point T est toûjours la mesme, & est la hauteur perpendiculaire du cylindre oblique ; & toutes ces lignes qui partent dudit sommet, & vont sur les points 7, 8, 9, 10, 11, &c. forment un cône dont ledit point d'où sortent toutes ces lignes, & aussi celle qui tombe sur T, est le sommet ; & chacune desdites lignes qui vont dudit sommet sur 7, 8, 9, &c. sont chacune égales en puissance à ladite ligne qui tombe sur T, & à celle qui de T va sur le point de la circonférence A 9 T, auquel celle qui part du sommet aboutissoit aussi.

Or en tout cecy on doit considérer la figure du discours précédent, qui

est

est icy décrite, en laquelle nous feignons que l'ouverture du compas se doit faire sur un cylindre droit posant un pied du compas pour pole sur le point F, & traçant de l'autre sur le cylindre, & faisant ladite ouverture plus grande que le diametre F E : la pointe du compas va toucher la plus petite des perpendiculaires, laquelle partira du point E, & montera le long du cylindre, & les perpendiculaires suivantes qui partent des points 29, 28, 27, 26, 21, 22, 23, &c. jusques au mesme point F, auquel lieu la perpendiculaire est égale à l'ouverture du compas, & partant la plus grande de toutes ces perpendiculaires. Or la ligne qui est l'ouverture du compas est égale en puissance à la ligne F E, & à la moindre perpendiculaire, sçavoir à celle qui va du point E le long du cylindre. Prenons maintenant quelqu'autre point comme 22. Nous disons que la ligne qui est l'ouverture du compas vaut les quarrez de la ligne F 22, & de la perpendiculaire du point 22 en l'air; partant les quarrez de F E & de la perpendiculaire sur E en l'air, sont égaux aux quarrez F 22 & de la perpendiculaire sur 22 en l'air. Au lieu du quarré F E, je prends les quarrez de F 22, & de 22 E; partant les quarrez de F 22, & de la perpendiculaire sur 22 en l'air, valent les quarrez de F 22, 22 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air. Des deux grandeurs ostez ce qui est commun, sçavoir le quarré de F 22, restera le quarré de la perpendiculaire sur 22 en l'air, égal aux quarrez de 22 E & de la perpendiculaire sur E en l'air; & faisant le mesme aux autres points 23, 24, 25, 26, 27, &c. on aura le quarré de la perpendiculaire sur 23, par exemple, égal aux quarrez de 23 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air, & ainsi des autres: par ainsi nous trouvons que les quarrez desdites perpendiculaires en l'air sont égaux aux quarrez de la perpendiculaire sur E en l'air, & des soutendantes 23 E, 22 E, 26 E, &c.

Or si on suppose que le cercle A 9 T soit aussi grand que F 22 E de la présente figure, & qu'ils soient tous également divisez, & que l'ouverture du compas vaille en puissance le diametre F E, & la hauteur du cylindre oblique, sçavoir la ligne qui tombe perpendiculairement sur T, alors les perpendiculaires bornées par le trait du compas, & tirées en l'air des points E, 29, 28, 27, 26, &c. sont toutes égales aux lignes qui tombent sur les points T, 11, 10, 9, 8, 7, A, & qui sont tirées du centre de la base supérieure du cylindre oblique, qui est le sommet d'où tombe perpendiculairement la ligne sur le point T, & cette ligne est la plus courte de toutes celles qui tombent dudit point sur le cercle A 9 T, & est égale à la perpendiculaire tirée sur le point E en l'air, & coupée par ladite ouverture du compas; la ligne qui aboutit au point 11, & vient du mesme sommet, est égale à la perpendiculaire sur le point 29 en l'air, & coupée par le compas; & ainsi toutes les lignes tirées du sommet, ou centre de la base superieure du cylindre obli-

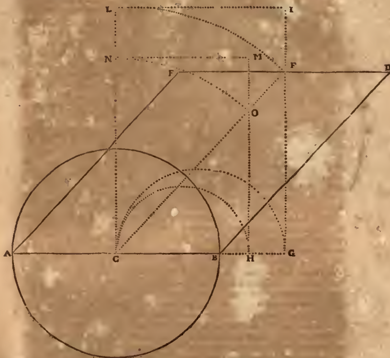
Voyez la figure de la page 222.

que sont égales aux perpendiculaires retranchées par le compas sur la surface du cylindre droit. Or les lignes ainsi tirées du centre oblique sur le cercle A 9 T sont égales aux lignes qui tombent sur les points 2, 3, 4, &c. & qui sont tirées de la circonference de ladite base superieure du cylindre oblique, sçavoir des points de ces perpendiculaires aux points F, N, O, P, &c. & les soutendantes T 7, T 8, T 9, &c. sont égales aux lignes N 2, O 3, P 4, &c. Nous disons donc que les parallelogrammes qui sont en mesme hauteur, & dont les bases sont égales, doivent estre égaux, & contiennent des espaces égaux. Or pour mieux entendre cette égalité, nous devons feindre que le cercle A 9 T va jusques au centre du cercle F P S 17, & que son diamétre A T est égal à B A demi-diamétre du cercle BDC; & ainsi le demi-cercle A 9 T sera égal au quart de cercle B D. Or le trait du compas qui s'est fait en la derniére figure F 22 E, se rapporte entiérement à ce qui s'est fait dans le cercle A 9 T de l'autre figure; & partant le trait du compas fait sur le cylindre droit est égal au quart de la circonference du cylindre oblique.

Pour conclusion. Si le cercle de la derniére figure F 22 E est égal à celuy de l'autre figure, sçavoir B D C, & que la perpendiculaire retranchée par le compas, & qui part du point E en l'air (quand le compas est plus ouvert que F E) est égale à la perpendiculaire tirée de la base supérieure du cylindre oblique à l'autre base, & qui est la vraye hauteur dudit cylindre oblique, & qu'on a supposé tomber de la base supérieure sur les points F, N, O, P, &c. & mesme sur C : toutes les perpendiculaires retranchées par le compas sur le cylindre droit dont la base est F 22 E, seront égales aux perpendiculaires tirées du cercle supérieur du cylindre oblique sur les points B, 2, 3, 4, 5, &c. & la figure retranchée par le compas sera égale à la superficie du cylindre oblique duquel la base est le cercle BDC, & la hauteur perpendiculaire double de la perpendiculaire sur E en l'air, & retranchée par le compas, sçavoir de la perpendiculaire tant dessus que dessous ledit point E.

Voyez la figure suivante. Que la ligne CG soit le diamétre d'un cercle qui serve de base à un cylindre droit duquel on ait retranché une superficie; ACB soit le diamétre d'un cercle qui soit la base d'un cylindre oblique proposé; CF soit l'axe dudit cylindre oblique; F le centre de la base supérieure, duquel tirant la ligne FG perpendiculaire sur AB, ladite FG sera la hauteur du cylindre oblique. Mais si on éleve ledit axe CF perpendiculairement sur C, on aura son égale CL qui est la hauteur qu'il faut donner au cylindre droit qui a la ligne CG pour diamétre de sa base; & si on tire de L en I une parallele à CG, & du point I la ligne IFG, le cylindre droit est achevé, sur lequel du point C, & intervalle CL on retranchera avec le compas la superficie LF, &c. Or nous avons veû cy-devant que ce qui est retranché sur la superficie du cylindre droit CLIG, est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diamétre du cylindre droit CG, sçavoir de la base au demi-diamétre de la base du cylindre oblique AC ou CB. Or si le diamétre du cylindre droit est égal au demi-diamétre de l'oblique, alors ce qui est retranché du cylindre droit sera égal à la superficie du cylindre oblique. Mais l'un n'estant pas égal à l'autre, pour trouver un retranchement qui soit égal à la superficie du cylindre oblique, il est nécessaire de trouver un cylindre droit semblable au premier CLIG, comme est CNMH. Pour le trouver, on prend une moyenne proportionnelle entre CB, & CG, laquelle est CH: du point H j'éleve la perpendiculaire HOM qui coupe la ligne CF en O, & fait le triangle CHO semblable au triangle CGF: ces triangles semblables servent à faire le petit cylindre droit semblable au grand cylindre droit; car du petit cylindre CNMH, on retranche

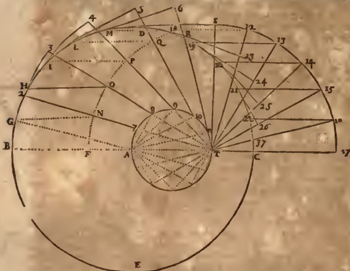
N E O, &c. & ce qui est retranché est égal à la superficie du cylindre oblique proposé; car le retranché L F du cylindre droit C L I G est à la superficie du cylindre oblique proposé A E D B, comme le diamétre C G au demi-diamétre C B. Mais le petit cylindre C N M H estant semblable au grand cylindre C L I G, le retranché de l'un sera semblable au retranché de l'autre: les superficies des cylindres sont entr'elles en raison doublée de leurs diamétres; partant la superficie du grand cylindre est à celle du petit en raison



doublée de C G diamétre du cercle du grand cylindre à C H diamétre du cercle du petit; la superficie de l'un sera donc à celle de l'autre en raison doublée de C G à C H, c'est-à-dire, comme C G à C B. Mais les cylindres droits estant semblables, le retranché de l'un sera au retranché de l'autre, comme toute la superficie de l'un à toute la superficie de l'autre; partant le retranché du cylindre droit C L F est au retranché du petit cylindre droit C N E O, comme C G à C B. Mais le retranché du grand cylindre droit est à la superficie du cylindre oblique, comme C G à C B; partant le retranché du petit cylindre est égal à la superficie du cylindre oblique, puis que l'un & l'autre a mesme raison au retranché du grand cylindre.

Tout ce qui a esté dit cy-devant pour couper sur un cylindre droit un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique, se peut réduire à ce qui s'ensuit.

Soit fait la figure suivante dans laquelle le diamétre du petit cercle, sçavoir A T, doit estre égal au demi-diamétre du grand cercle B D C base inférieure, & de F P S 17 representant sa base supérieure en l'air du cylindre oblique dont le centre est perpendiculaire sur T joint au point C. Je dis que



si on ouvre le compas autant que le costé du cylindre oblique, & que laissant un des pieds du compas sur le point F joint au point A, on trace une ligne sur le cylindre droit dont la base est A 9 T, l'espace compris entre ladite ligne, & ladite base A 9 T, sera égal à la superficie du cylindre oblique.

Soient divisées les bases desdits cylindres oblique & droit en une infinité de parties égales, sçavoir, faisant autant de divisions sur le quart de cercle B L D que sur le demi-cercle A 9 T, & ce, tant aux bases supérieures qu'aux inférieures desdits cylindres; & tirant des lignes par les points desdites divisions, on fera plusieurs parallelogrammes qu'on prendra au cylindre oblique d'une base à l'autre; mais au cylindre droit on les prendra depuis la base inférieure jusques à la section faite par le compas. Or lesdits parallelogrammes sont égaux en multitude en l'un & l'autre cylindre, & on les démontrera aussi égaux en quantité, comme il s'ensuit.

Puisque les parallelogrammes susdits ont mesme base, puisqu'ils contiennent égale portion ou quantité en la circonférence de la base de chacun des cylindres, reste à montrer que leur hauteur est égale. Cette hauteur est facile à connoistre au cylindre droit, puisque le costé mesme du cylindre coupé par le compas, la dénote: mais au cylindre oblique cette hauteur est la ligne tirée de la base supérieure représentée par les points N, O, P, &c. perpendiculairement sur la tangente tirée du point correspondant en la base inférieure; ainsi

ainsi la ligne tirée de N en l'air sur la touchante G 2 (qui part du point G de la base inférieure correspondant au point N de la supérieure) en sorte qu'il se fasse un angle droit au point 2, est la hauteur du parallelogramme tiré de G au point N en l'air de la base supérieure. Et de mesme, la hauteur du parallelogramme tiré du point H au point qui est audessus de O en l'air en la base supérieure, est la ligne tirée du mesme point O en l'air au point 3 sur la touchante H 3 où elles font ensemble un angle droit; & ainsi les hauteurs de tous les parallelogrammes sont les lignes tirées des points de la base supérieure prpendiculairement sur les tangentes qui partent des points correspondans en la base inférieure; & ainsi, le moindre de tous les parallelogrammes sera celuy qui du point D de la base inférieure, est tiré au point correspondant à S en la supérieure: car il n'a pour hauteur simplement que la hauteur du cylindre oblique, sçavoir les lignes tirées perpendiculairement des points C, F, N, O, &c. à la base supérieure. Comme le plus grand desdits parallelogrammes est celuy qui de B est tiré vers F en l'air; car sa hauteur est le costé entier du cylindre oblique: il reste à démontrer que ces perpendiculaires sont égales en l'un & en l'autre cylindre.

Premiérement, il est certain que l'ouverture du compas, qui fait le retranchement sur le cylindre droit, estant égale au costé du cylindre oblique, la perpendiculaire sur A au cylindre droit, bornée par le trait du compas, sera égale à celle qui va du point B au point correspondant de la base supérieure du cylindre oblique, qui est aussi le costé du cylindre oblique. Et pareillement la perpendiculaire sur le point T au cylindre droit est égale à la hauteur du cyliudre oblique, & à la ligne tirée perpendiculairement du point S à sa base supérieure; car l'axe du cylindre oblique qui du centre A de la base inférieure va à celuy de la supérieure qui est audessus de T, est égal au costé du cylindre oblique, & partant à l'ouverture du compas: mais ledit point T en l'air, centre de la base supérieure, est le point du cylindre droit retranché par le compas; partant ladite perpendiculaire sur T au cylindre droit, sera égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la perpendiculaire sur S.

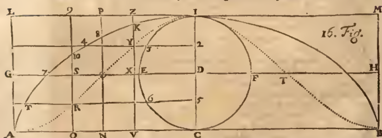
On le démontreroit encore autrement, imaginant un triangle rectangle dont un des costez soit DS; le second, la perpendiculaire qui va de S à la base supérieure; & le troisiéme qui va de D audit point sur S en l'air; car ce triangle est entiérement égal à celuy qui se fait au-dedans du cylindre droit dont un des costez est AT; l'autre, la perpendiculaire sur T jusques au retranchement; & le troisiéme est l'ouverture du compas, qui va de A à T en l'air, & est égale au costé du cylindre oblique, sçavoir à la ligne qui va de D au point S en l'air: la ligne AT est égale à DS, comme il est aisé de le montrer; les angles en T & en S sont droits; & partant les triangles sont égaux, & la ligne sur T égale à la ligne sur S.

On montrera, comme cy-devant, l'égalité des autres perpendiculaires, sçavoir, celle sur 7 au cylindre droit, à celle qui tombe sur 2 à l'oblique; celle sur 8, à celle sur 3, &c. & nous le répéterons encore icy. L'ouverture du compas est égale en puissance aux quarrez de AT & de la perpendiculaire sur T du cylindre droit; & pareillement elle est égale aux quarrez de A7 & de la perpendiculaire sur 7, & aux quarrez de A8 & de la perpendiculaire sur 8, &c. Donc les quarrez de AT & de la perpendiculaire sur T sont égaux aux quarrez de A7 & de la perpendiculaire sur 7; & si au lieu du quarré AT on prend les quarrez de A7 & 7T qui luy sont égaux, on aura les quarrez de 7T, 7A, & de la perpendiculaire sur T égaux aux quarrez de 7A, & de la perpendiculaire sur 7; & ostant de part & d'autre le quarré 7A, on aura le quarré de la perpendiculaire sur 7 égal aux quarrez de 7T, & de la perpendiculaire sur T.

De plus, on a montré que 2 N est égal à 7 T par le moyen du rectangle 7 A G 2. Il faudra donc pour la perpendiculaire sur 2 imaginer un triangle rectangle en l'air sur le point N dont un des costez sera N 2; le second, la perpendiculaire qui du point N va trouver le point correspondant en la base supérieure du cylindre oblique; & le troisiéme est la perpendiculaire cherchée, qui du point N en l'air est menée au point 2, & ce troisiéme costé estant opposé à l'angle droit en N, vaut en puissance les quarrez de la perpendiculaire sur N (égal à celuy de la perpendiculaire sur T) & de la ligne N 2 égale à 7 T; donc la perpendiculaire sur 7 sera égale à la ligne qui du point N en l'air tombe sur 2. Mais ces lignes désignent la hauteur des parallelogrammes faits sur les cylindres; & partant lesdits parallelogrammes ayant la base égale & la hauteur égale sont égaux; & partant la surface du cylindre oblique égale à ce qui est coupé du cylindre droit. Mais si la perpendiculaire tirée du centre de la base supérieure ne tombe pas sur la circonférence de la base inférieure, en sorte que A T ne soit pas égal au demi-diamétre de ladite base, alors il faut proportionner, comme on a montré au discours sur la figure de la page 227.

DU SOLIDE DE LA ROULETTE.

QUE A I B soit le chemin de la Roulette; A L M B le parallelogramme fait du diamétre I C, & de la circonférence A B étenduë en ligne droite. Nous cherchons la raison qu'il y a du cylindre fait par le parallelogramme, au solide fait par la roulette A I B, lors que le tout tourne sur ladite circonférence A C B. Pour cét effet, je tire la ligne G D H parallele à A C B; &



cette ligne se prend pour le chemin du point D centre de la roulette. Or cette ligne G D H coupe la figure A O I 4 & le demi-cercle C E I, chacune en deux parties semblables: or il y a un Théoréme qui porte que, quand deux figures sont ainsi coupées par une ligne parallele à la ligne sur laquelle les figures font leur tour, les solides des figures sont entr'eux comme les figures; & partant le solide fait par la figure A O I 4 est égal au solide fait par la demi-circonférence I E C; car nous avons veû comme le plan A O I 4 est égal au demi-cercle I E C que nous avons trouvé estre le quart du parallelogramme; & ainsi ces solides seront chacun le quart du cylindre fait par le parallelogramme. Mais ne prenant que le seul solide fait par A O I 4 qui sera le quart du cylindre, & ayant tiré la ligne Q R S qui représente toutes les lignes tirées perpendiculairement de A N premier quart de la circonférence A C B sur G D H, & la ligne V X Y qui représente toutes les lignes tirées de N C second quart, sur la ligne courbe O Y I: nous disons que le quarré de Q R est égal aux quarrez de Q S & S R, moins deux fois le re-

ctangle Q S R, & ainsi des autres lignes tirées sur ledit quart A N; & de plus que le quarré de V Y est égal aux quarrez de V X, & X Y plus deux fois le rectangle V X Y, & ainsi des autres lignes tirées sur le second quart N C. Or les rectangles qui se trouvent dans l'espace A O sont égaux à ceux de l'espace N I; & estant de plus d'un costé & moins de l'autre, on les ostera de part & d'autre. Il restera donc que les quarrez de Q R, V Y & des autres lignes tirées de A C sur la ligne courbe A R O Y I pris tous ensemble, seront égaux aux quarrez du demi-diamétre Q S ou V X pris autant de fois, & aux quarrez de S R, X Y, & autres lignes tirées de G D sur la ligne courbe A O I pris aussi autant de fois. Or lesdites lignes S R, X Y, &c. sont des sinus droits dont les quarrez sont au qnarré du diamétre pris autant de fois, comme 1 à 8, & les quarrez du demi-diamétre sont aux quarrez du diamétre, comme 2 à 8. Si on joint ces raisons, on aura celle de 3 à 8 qui est celle des quarrez des lignes tirées de A C sur la ligne contbe A O I au quarré du diamétre pris autant de fois; & si on y joint la raison de la figure A O I 4 au parallelogramme A I, qui est comme 2 à 8, on aura la raison de 5 à 8, qui est celle du solide que fait la roulette A I B, au cylindre A M, le tour tournant sur A C B.

On conclura la mesme chose en considerant les quarrez des sinus verses Q R, V Y, & les autres, lesquels sont au quarré du diamétre pris autant de fois, comme 3 à 8; & l'espace A R I 4 est au parallelogramme A I, comme 2 à 8, qui joint avec la raison de 3 à 8, font celle de 5 à 8; & telle est la raison du solide de la roulette au cylindre, comme en l'autre conclusion.

Maintenant il faut voir quelle raison il y aura entre le solide de la mesme roulette & son cylindre, lors qu'elle tourne sur L M parallele à A B, où il faut considerer que le quarré de N 8 vaut les quarrez de N P & P 8 moins deux fois le rectangle N P 8; & ainsi le quarré N 8 plus deux fois le rectangle N P 8 est égal aux quarrez N P, P 8. On sçait que les quarrez de N 8, V K, & de toutes les autres sont au quarré du diamétre C I ou N P son égal pris autant de fois, comme 5 à 8, à quoy il faut joindre deux fois les rectangles N P 8, V Z K, & tous les autres: or ces rectangles ont tous pour hauteur N P, & partant ils seront entr'eux comme toutes les lignes P 8; Z K, 9 10, & les autres. Mais tout l'espace rempli de ces lignes, ou plutost toutes ces lignes sont au diamétre pris autant de fois, comme 2 à 8 : & il faut prendre deux fois ces rectangles; partant ils seront au quarré du diamétre pris autant de fois, qu'il y a de lignes V K, N 8, Q 10, &c. comme 4 à 8; laquelle raison jointe à celle de 5 à 8 cy-devant, font celle de 9 à 8, ou $\frac{9}{8}$; & parce que les quarrez Q 9, N P, V Z, &c. representent les 8, il s'ensuivra que les quarrez 9 10, P 8, Z K, &c. vaudront $\frac{1}{8}$ car puisque les qnarrez Q 10, N 8, V K, &c. avec deux fois les rectangles Q 9 10, N P 8, V Z K, &c. (qui tous ensemble avec lesdits quarrez vallent $\frac{9}{8}$) sont égaux aux quarrez Q 9, 9 10, N P, P 8, V Z, Z K, &c. ceux-cy vallent aussi $\frac{9}{8}$. Si donc on en oste les quarrez Q 9, N P, V Z, qui vallent $\frac{8}{8}$, restera $\frac{1}{8}$ pour les quarrez 9 10, P 8, Z K, qui ostez encore des mesmes quarrez Q 9, N P, V Z, restera $\frac{7}{8}$ pour le solide de la roulette, qui sera au cylindre comme 7 à 8.

La mesme chose se peut conclure d'une autre façon, en disant que le quarré P 8 est égal aux deux quarrez P N, N 8 moins deux fois le rectangle P N 8, & tous les autres de mesme, sçavoir le quarré de Z K égal aux quarrez de Z V, & K V moins deux fois le rectangle Z V K, & ainsi des autres. On a veû que les quarrez de N 8 & les autres, sont au quarré du diamétre pris autant de fois, comme 5 à 8; & joignant le quarré de N P qui est 8, avec 5, on aura la raison de 13 à 8. De cette somme il faut oster le moins, sçavoir les rectangles P N 8 & autres, tous lesquels ont mesme hauteur, sçavoir P N; ils seront donc entr'eux comme leurs bases V K,

N 8, Q 10, & les autres. L'espace A 8 I D C rempli par les petites lignes V K, N 8, &c. est au grand parallelogramme A I, comme 6 à 8; & le rectangle pris deux fois sera audit parallelogramme, comme 12 à 8; & ostant la raison de 12 à 8 de celle de 13 à 8, restera celle de 1 à 8, comme cy-devant pour la valeur des quarrez Z K, P 8, 9 10, & les autres.

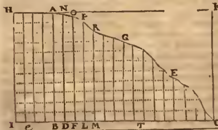
Il faut maintenant considerer les solides qui se font quand la figure tourne sur L A, où on remarquera que la ligne I C parallele à ladite L A, coupe le parallelogramme A M & la figure A I B en deux également; & partant les solides sont entr'eux comme les plans; & ainsi le solide fait par A I B sera au cylindre formé par le parallelogramme A M, comme le plan de l'un est au plan de l'autre. Mais les plans sont entr'eux comme 4 à 3; partant le cylindre sera au solide de la roulette comme 4 à 3.

Considerons maintenant le solide fait par le plan de la compagne de la roulette A O I T B. On voit que la ligne I C coupe en deux également tant le parallelogramme A M, que ladite figure A O I T B; partant les solides seront entr'eux comme les plans: mais les plans sont entr'eux comme 2 à 1, partant le cylindre sera au solide fait par A O I T B, comme 2 à 1, c'est-à-dire double.

On conclura de là que le solide fait par la figure A O I 10 est au cylindre A I, comme 1 à 4; car puisque le solide fait par A 8 I D C est au cylindre A I comme 3 à 4: si on en oste le solide fait par A O I D C qui est au mesme cylindre A I comme 2 à 4, restera la raison de 1 à 4, pour celle du solide fait par A O I 10, au mesme cylindre A I.

PROPORTION DES SOLIDES composez de lignes courbes, avec le cylindre qui aura mesme base & mesme hauteur, ensemble de leur centre de gravité.

QUE A G E C soit une ligne irréguliére telle qu'on voudra, pourveu toutefois qu'elle baisse toûjours vers C; & soient tirées les lignes A B, B C, qui fassent un angle en B, lequel soit icy supposé estre droit, car cela n'est pas nécessaire, & on aura le triligne A B C. Que les lignes A B, B C soient divisées en une infinité de parties égales, & chaque partie de A B soit égale à chaque partie de B C: de chaque point de la division soient tirées des paralleles aux lignes A B, B C, qui divisent le triligne, comme on voit icy.



Du point C j'éleve en l'air une perpendiculaire au plan A B C égale à B C; puis je conçois un plan sur la ligne A B, tellement incliné, qu'il vienne rencontrer l'extremité de la perpendiculaire sur C en l'air. Ensuite j'éleve de chaque point de la ligne B C une perpendiculaire qui rencontre ce plan incliné, & chacune de ces perpendiculaires est égale à sa correspondante, sçavoir à celle qui va du point dont elle a esté tirée, jusques à la ligne A B: comme la perpendiculaire tirée sur D sera égale à B D, celle

celle qui est elevée sur F est égale à BF, & ainsi des autres. Il faut aussi concevoir un triangle rectangle isocelle qui se fait par la ligne B C, la perpendiculaire en l'air sur C qui est égale à B C, & la ligne qui va de B à l'extremité de ladite perpendiculaire : le plan de ce triangle est égal à la moitié du quarré B C ; le mesme doit estre entendu de tous les triangles qui se font par le moyen du plan incliné, qui tous sont égaux à la moitié du quarré de leurs costez égaux.

Il faut en suite considerer une perpendiculaire élevée sur le point A qui chemine sur la ligne A G E C, & qui rencontre le plan incliné : cette ligne par son chemin décrit une superficie ; & par consequent on a quatre superficies qui enferment un solide, la premiere est le plan du trilignc A C B ; la deuxiéme, le plan incliné qui commence à A B ; la troisiéme est le triangle sur B C en l'air & perpendiculaire sur le plan A B C ; la quatriéme est celle que fait la perpendiculaire en parcourant la ligne A G E C. Ce solide est distingué & comme composé d'une infinité de triangles tous paralleles & semblables à celuy qui est élevé perpendiculairement sur B C, & qui est une des faces du solide ; partant ce solide partagé de cette sorte est formé de la moitié de tous les quarrez de la ligne B C, & de ses paralleles.

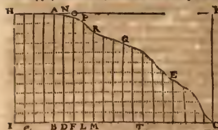
Que si on veut couper ce solide d'un autre sens, sçavoir par des plans paralleles à la ligne A B, alors on fera dans le solide des parallelogrammes égaux aux parallelogrammes B D N, B F O, B L P &c. partant tous ces parallelogrammes ensemble seront égaux aux demi-quarrez de la ligne B C & de ses paralleles ; car c'est le mesme solide qui ne change point. On peut donc établir, que tous les demi-quarrez de la ligne B C & de ses paralleles, sont égaux à tous les parallelogrammes N D B, O F B, P L B &c.

Soit tiré une parallele à A B en quelque part qu'on voudra : que ce soit H I, sçavoir hors de la figure, & soit achevé le parallelogramme H I C K, & soit élevé un plan sur la ligne H I, incliné en telle sorte, qu'il rencontre comme le précedent, l'extremité de la perpendiculaire sur C en l'air prise de la longueur de I C ; & soit aussi prolongé les lignes de la figure jusques à la ligne H I : on trouvera que les demi-quarrez de la ligne I C & des autres paralleles à cette ligne, qui aboutissent à H I, sont égaux à tous les parallelogrammes compris dans la figure A B C, en les prolongeant jusques à H I, & dans l'espace H I B A, sçavoir A B I, N D I, O F I, &c.

Nous considérerons maintenant la figure quand elle tourne sur H I. Alors elle forme trois solides, sçavoir un cylindre par H I B A ; un solide qui se nomme creux par la figure A C B ; un autre par H A C B I ; & le grand cylindre H I C K. Nous cherchons les raisons de ces solides entr'eux. Pour le petit cylindre, il est au grand cylindre comme le quarré de H A est au quarré de H K ; le solide fait de H I B C A est au grand cylindre, comme le quarré de I C & des autres paralleles jusques à H A, sont au quarré de H K pris autant de fois ; le solide de la figure A B C est au grand cylindre comme le quarré de I C & des autres paralleles moins le quarré I B, pris autant de fois, est au quarré H K pris autant de fois : & si on prend la moitié du solide, elle sera au grand cylindre, comme la moitié des quarrez I C, & des autres moins la moitié du quarré I B pris autant de fois, est au quarré H K pris autant de fois. Au lieu des demi-quarrez je prends ce qui leur est égal, sçavoir tous les parallelogrammes moins les petits de la figure H A B I, & ils seront au grand quarré H K pris autant de fois, comme la moitié du solide de la figure est au grand cylindre. Que si on fait tourner la figure A B C sur A B, alors la moitié du solide fait par A B C sera au cylindre fait par A B C K, comme la moitié des quarrez de B C

& de ses paralleles, sont au quarré de BC pris autant de fois ; & en general, sur quelque ligne qu'on fasse tourner la figure, pourveu qu'elle soit parallele à AB, on aura toûjours la mesme équation ; sçavoir, que la moitié du solide fait par la figure, sera à son cylindre, comme la moitié des quarrez compris dans la figure, sera au grand quarré pris autant de fois. J'entens que la figure commence à la ligne sur laquelle elle tourne, & que le parallelogramme commence à la mesme ligne.

Tout cela posé je viens à chercher le centre de gravité du plan de la figure ABC. Pour cét effet je suppose que la ligne BC est un levier dont le point B est l'appuy & en C la puissance : tous les points sont les lieux sur lesquels les pesanteurs pesent ; on nommera ces points centres de gravité de chaque portion de la figure, laquelle se divise en parallelogrammes qui tous ont chacun leur centre, sçavoir le point sur lequel chacun d'iceux pese ; & tous ces centres ensemble viennent à estre égaux (eu égard à la pesanteur qu'ils supportent) au centre total de la figure. Or nous disons que le premier point, sçavoir D, est le centre de gravité du premier parallelogramme ; F, du second parallelogramme ; L, du troisiéme &c. Les centres de gravité sont entr'eux en raison composée des costez de leurs figures ; par exemple, le centre D est au centre F en raison composée de celle de ND à FO, & de celle de BD à BF ; ce qui veut dire que comme le rectangle ou parallelogramme des antécedens est à celuy des consequens, sçavoir comme le parallelogramme NDB est au parallelogramme OFB : ainsi toutes les pesanteurs sur tous lesdits points ou centres de gravité sont entr'elles, comme tous les parallelogrammes sont entr'eux. Au lieu des parallelogrammes je prens leurs hauteurs, sçavoir les lignes AB, ND, OF, & je pose chacune de ces lignes pour le fardeau étendu, & qui pese sur chacun de ces points. Pour trouver le centre de gravité de la figure, sçavoir le point sur la ligne BC où les parties sont contrepesées les unes aux autres, je feins par l'analize qu'il est en M, & j'attache à ce point M un poids égal à tous les autres cy-dessus representées par toutes les lignes qui sont sur les points. Ce poids est donc une ligne égale à toutes les lignes cy-dessus, & je dis ainsi, Toutes les pesanteurs, ou centres de gravité ensemble sont au poids de toute la figure qui est en M, comme tous les parallelogrammes de la figure sont au grand parallelogramme qui a un costé égal à toutes les lignes cy-dessus, & la ligne BM pour l'autre costé (car on prend icy les parallelogrammes qui estant perpendiculaires sur les lignes ND, OF, PL ; &c. vont rencontrer le plan qui part de la ligne AB, & en montant va rencontrer le point sur C en l'air élevé à la hauteur de CB, comme il a esté dit cy-devant.) Mais toutes les pesanteurs assemblées sont égales à la pesanteur qui est en M ; partant tous les parallelogrammes de la figure sont égaux au parallelogramme qui a toutes les lignes BA, DN, FO, &c. pour un de ses costez, & BM pour l'autre : estant égaux ils auront mesme raison à une autre grandeur ; c'est pourquoy tous les rectangles sont au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle qui a toutes



les lignes susdites A B, N D, O F, &c. pour un de ses costez, & B M pour l'autre, est au mesme quarré pris comme cy-devant.

Au lieu de tous les rectangles susdits je prens ce qui leur est égal, sçavoir les demi-quarrez des lignes B D, B F, B L, B M, B C, &c. ils seront donc au grand quarré B C pris autant de fois, comme le grand rectangle susdit qui a B M pour un de ses costez, & pour l'autre toutes les lignes A B, N D, O F, &c. est audit quarré B C pris &c. Mais nous avons veû que comme le cylindre fait par A B C K est à la moitié du solide fait quand la figure tourne sur A B, ainsi le quarré B C pris autant de fois, est aux demi-quarrez des lignes B D, B F, B L, &c. Donc le rectangle qui a les lignes A B, N D, O F, &c. pour un de ses costez, & B M pour l'autre, est au quarré B C pris autant de fois, comme la moitié du solide fait par A B C est au cylindre. Par les indivisibles je fais des solides de tous ces plans, & je dis que la moitié du solide fait par A B C est au cylindre fait par A B C K, comme le solide qui a pour base la figure A B C, & B M pour hauteur, est au solide qui a pour base le parallelogramme A B C K, & B C pour hauteur. Or les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur; partant la moitié du solide de A B C, & le cylindre du parallelogramme A B C K, sont la raison composante des deux solides, qui sont entr'eux en la raison composée du parallelogramme A B C K à la figure A B C, & de celle de la ligne B C, à B M. Nous connoissons la raison composante, c'est à dire de la moitié du solide au cylindre; car (si c'est une parabole) son solide est à son cylindre comme 8 à 15: icy nous n'avons que la moitié du solide; c'est pourquoy ce sera comme 4 à 15. Pareillement la raison du plan de la parabole à son parallelogramme est connuë, qui est comme 2 à 3, ostant donc de 4 à 15 la raison de 2 à 3 ou de 4 à 6, il reste celle de 6 à 15; & telle est la raison de B M à B C, & le point M est le centre.

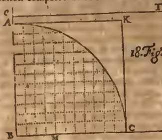
Que si nous feignons un cylindre tel qu'il soit la moitié d'un solide, & que nous disions, Comme le cylindre est à la moitié du solide, ainsi quelque ligne, comme *e* T est à la ligne B M; & comme le parallelogramme A B C K est au plan A B C, ainsi la mesme ligne *e* T est à la ligne B C: ces trois lignes composent la raison qui est entre la moitié du solide & le cylindre, qui sera la raison composée de *e* T à B C, & de B C à B M; & ainsi le point M sera le centre de gravité.

Auparavant que de proceder selon cette derniere façon il faut avoir trouvé cette ligne *e* T, faisant que, comme le plan A B C est au parallelogramme A B C K, ainsi la ligne B C soit à *e* T; & puis dire, Comme le cylindre fait par A B C K est à la moitié du solide fait par A B C tournant sur A B, ainsi la ligne *e* T soit à B M: le point M marque le centre de gravité. Cette méthode est pour agir plus élegamment, & plus briévement que par la premiere qui est plus seure, sçavoir par la composition de raison des deux solides qui sont entr'eux en la raison composée de celle de leur base, & de celle de leur hauteur, comme il a esté dit cy-devant.

Il nous faut maintenant chercher le centre de gravité d'un quart de cercle par le solide qui se fait quand un quart de cercle qui partiroit du point A & viendroit en C, puis aprés du point C l'autre quart de cercle viendroit rencontrer la ligne A B prolongée tant que de besoin. Quand ce quart de cercle tourne sur A B, il se fait un solide de ce quart, & il se fait un cylindre du parallelogramme A B C K, lequel, en cette figure, est un quarré; car A B est égale à B C, & chacune est le demi-diametre du cercle. Je trouve premierement le centre de gravité sçavoir le point M, en la façon ordinaire, sçavoir, que le demi-solide du quart de cercle, est à son cylindre comme le solide qui a pour base le quart de cercle, & pour hau-

Voyez la figure suivante.

teur la ligne B M, est au solide qui est composé du quarré B C pris autant de fois qu'il y a de divisions en B C. Mais les solides sont entr'eux en la raison composée de celle de leur hauteur, & de celle de leur base, sçavoir comme le quart de cercle, au quarré B C, & comme la ligne B M, à B C; en telle sorte que ces quatre termes composent la raison de la moitié du solide fait par le quart de cercle, à son cylindre, laquelle est connuë; car le cylindre est au solide comme 6 à 4; mais icy il n'y a que la moitié, & partant la raison sera comme 6 à 2. La raison du plan au plan, & de la ligne à la ligne, sera donc comme 2 à 6; la raison du plan au plan est connuë; car en cette figure, selon Archimede, elle est comme 11 à 14. Si donc je soustrais la raison de 11 à 14, de celle de 2 à 6, ou de 11 à 33, il restera la raison de 14 à 33 pour celle des lignes B M à B C; & le point M vient à estre le lieu du centre de gravité, en la premiere maniere.



La deuxiéme façon est en disant, Comme le cylindre de A B C K est à la moitié du solide du quart de cercle, ainsi la ligne *e* T est à B M; (on trouvera la ligne *e* T comme cy-devant, sçavoir en faisant comme le plan du quart de cercle est au parallelogramme, ainsi la ligne B C est à *e* T) c'est pourquoy nous voyons que la moitié du solide est à son cylindre, en la raison composée de *e* T à B C, & de B C à B M; & ainsi le point M est encore le centre de gravité, selon la seconde methode.

La troisiéme methode est la plus subtile, & elle est telle: comme le quart & demi de la circonference, sçavoir A C & sa moitié, le tout pris comme ligne droite, est à B C demi-diamétre, ainsi B C est au tiers de la ligne *e* T trouvée comme cy-dessus; & il se trouvera que B M sera le tiers de ladite *e* T; & ainsi le point M sera le centre de gravité. Il faut montrer que B M est le tiers de *e* T; de plus, que le quart & demi de la circonference est à son demi-diamétre, comme le mesme demi-diamétre est à B M tiers de *e* T.

Pour le premier, il est aisé à voir; car faisant que comme la moitié du solide est au cylindre, ou bien comme le cylindre fait par A B C K, est à la moitié du solide fait par le quart de cercle, ainsi la ligne *e* T soit à B M. Nous sçavons que le cylindre est triple de la moitié du solide; partant la ligne *e* T sera triple de B M, ce qu'il falloit prouver.

Il faut maintenant prouver que les trois lignes, sçavoir le quart & demi de la circonference pris comme ligne droite, le demi-diamétre & le tiers de *e* T sont proportionnelles. Cecy se démontre par la proportion troublée que je dispose comme il s'ensuit. Que le quart & demi de la circonference soit *a*; le demi-quart de la mesme circonference soit *b*; le demi-diamétre soit *c*; le mesme demi-diamétre soit aussi *d*; la ligne *e* T soit *e*; & le tiers de la ligne *e* T ou la ligne B M, soit *m*. On fera les proportions suivantes.

Comme *a* est à *b*, ainsi *e* est à *m*; & comme *b* est à *c*, ainsi *d* est à *e*; partant comme *a* est à *c*, ainsi *d* est à *m*; partant les trois lignes *a*, *c*, *m* sont proportionelles, ce qui restoit à démontrer.

Tout ce qui a esté dit jusques à present ne sert que pour trouver le centre de gravité des plans par le moyen d'un solide. Maintenant nous chercherons le centre de gravité d'une ligne telle qu'elle puisse estre, soit droite, circulaire, ou irréguliere.

TROUVER

TROUVER LE CENTRE DE GRAVITE' de la ligne AGEC.

SOIT divisé la ligne AGEC en une infinité de parties égales; & ayant tiré les lignes AB, BC, comme cy-devant, soit aussi tiré des paralleles à AB de chaque point de la division, qui diviseront la ligne BC en parties inégales. Les parties de la ligne AGC ont chacune leur pesanteur; & le poids d'une partie n'est pas égal au poids de l'autre. Or le poids de chaque portion est representé par le point de sa division: les paralleles portent chaque pesanteur sur le levier BC aux points de sa division; & c'est sur ces points de BC que pesent toutes les parties de la ligne AGC. Nous sçavons que les poids sont entr'eux comme les rectangles; c'est à dire que le poids du point D est au poids du point H, comme le rectangle fait de AD & de BF, au rectangle fait de AD ou son égale DH, & de BI. Au lieu de dire, comme les rectangles, je dis, comme la ligne BF est à BI, parce que les rectangles ont tous un costé égal, sçavoir la portion de la ligne AGC.

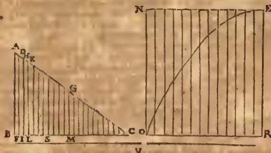
Je feins que le centre soit en M, duquel point je fais pendre une ligne égale à AGC qui représente sa pesanteur; puis je dis que le poids du point F est au poids du point M centre, comme la ligne BF est à la ligne BM; le poids du point I est au poids de M, comme la ligne BI à BM, & ainsi des autres. De là nous reviendrons aux rectangles, & nous dirons que tous les points pesans sur ceux de la ligne BC sont au poids universel pesant sur le point M centre total, comme le rectangle fait d'une seule portion de la ligne AGC & de toutes les lignes BF, BI, BL, BM, &c. est au rectangle fait par la ligne AGC penduë au point M, & par la ligne BM. Or tous les petits poids ramassez ensemble sont égaux au poids en M, qui est le poids de toute la ligne; & partant les deux rectangles sont égaux, & leurs costez sont quatre lignes proportionnelles. Pour faciliter la résolution de la question du rectangle fait par une portion de la ligne AGC & des lignes BF, BI, BL, &c. j'oste par les indivisibles la portion de la ligne AGC: cette portion estant une & terminée, ne diminuë rien dans l'infini; (car tout ce qui est fini & terminé comme 1, 2, 3, 4, & tant de nombres terminez qu'on voudra, n'augmente ny ne diminuë rien dans les infinis) ayant donc retiré cette unique portion du rectangle, il me reste l'espace com-

pris par les lignes B F, B I, B L, &c. qui est égal au mesme rectangle de A G C par B M. Je pose que la ligne A G C soit la droite T N, laquelle estant divisée infiniment, j'éleve sur chaque point de la division perpendiculairement la ligne R S égale à B F, Q X égale à B I, & ainsi des autres. Les lignes ainsi élevées composent une figure égale au rectangle T P dont le costé N P est égal à B M, & T N égal à A G C, puis je cherche un quarré qui soit égal à la figure ou à ce rectangle, (car l'un est égal à l'autre.) Que son costé soit la ligne marquée V. Nous dirons que comme la ligne A G C est à la ligne V, ainsi la ligne V est à la ligne B M cherchée; & cecy est la proposition universelle. Comme la ligne proposée à la ligne dont le quarré est égal à la figure ou plan fait par toutes les lignes B F, B I, B L, &c. ainsi cette mesme ligne qui est le costé dudit quarré, est à la ligne B M cherchée; & ainsi ces trois lignes, sçavoir la donnée, celle qui est le costé du quarré susdit, & la cherchée B M sont continuellement proportionnelles.

Cherchons maintenant le centre de gravité du quart de circonference A G Z. Alors il faudra dire, Comme la ligne A G Z étenduë en ligne droite est à son demi-diamétre B Z, ainsi ce demi-diamétre est à la ligne cherchée B M. Mais le quart de la circonference est au demi-diamétre, comme tous les sinus tirez par les points esquels est divisée la circonference, sont au sinus total pris autant de fois; or tous ces sinus sont les lignes B F, B I, B L, &c. répondans aux points de la circonference divisée en parties égales infinies; & tous ces sinus sont égaux au quarré du demi-diamétre, comme il paroist par la troisiéme Proposition.

Voyez la figure suivante. Mais si on suppose que la ligne A C soit droite, pour en trouver le centre de gravité je la divise en une infinité de parties égales, & de chaque point de la division je tire des lignes paralleles à A B, qui tombent sur le levier B C & le divisent en parties égales entr'elles, & divisent la figure A B C en triangles semblables : les points de la ligne B C marquent les centres de gravité de chaque portion de la ligne proposée A C. Or tous ces centres ou pesanteurs sont entr'elles, comme les rectangles sont entr'eux, c'est à sçavoir, comme le rectangle B F par A D est au rectangle B I par D H ou son égale A D; & d'autant que la portion de A C est toûjours la mesme en tous les rectangles, les centres sont entr'eux, comme les lignes B F, B I, B L, &c. de sorte que ces petits centres ou pesanteurs particulieres sont au centre ou pesanteur totale qui est au point M (d'où on a pendu une ligne égale en grandeur & pesanteur à la ligne A C) comme toutes les lignes B F, B I, B L, &c. sont au rectangle A C par B M; car par les indivisibles on a retranché du rectangle fait de la portion de la ligne A C, sçavoir de A D & de toutes les lignes B F, B I, B L, &c. prises ensemble, ladite portion A D. Il faut trouver une ligne qui soit égale en puissance à l'espace fait par toutes les lignes B F, B I, B L, & les autres; puis je dis que comme la ligne donnée, sçavoir A C, est à cette ligne dont le quarré est égal à l'espace & plan susdit fait par toutes les lignes B F, B I, B L, &c. ainsi cette ligne ou costé de quarré est à B M; en sorte que la ligne susdite qui peut l'espace fait par les lignes B F, B I, B L, &c. soit moyenne proportionnelle entre la ligne proposée A C, & la cherchée B M. Mais toutes ces lignes sont à B C pris autant de fois, comme le triangle au quarré de la somme ou multitude desdits points, c'est à dire, comme 1 à 2; partant la ligne B M vaudra en puissance le quart du quarré B C; & partant B M est la moitié de B C; & ainsi le centre de ladite ligne proposée est au milieu d'icelle : car du point M tirant une ligne parallele à A B, elle passera par le point G milieu de la ligne A C, & marquera le lieu de son centre de gravité.

Je viens maintenant à chercher le centre de gravité d'une figure solide, soit cône, cylindre, conoïde parabolique & hyperbolique, solide elliptique, ou de quelqu'autre solide connû. Parlons premiérement du cône qui est representé par la ligne A C, & par C B tirée perpendiculairement sur A B. Le sommet du cône est C, l'axe est C B, & la ligne A B estant doublée vient à estre le diamétre du cercle, ou base du cône. Que l'axe de ce cône, sçavoir B C, soit coupé par des plans perpendiculaires à cette axe en une infinité de parties égales; toutes ces divisions sont autant de cercles, qui tous en-

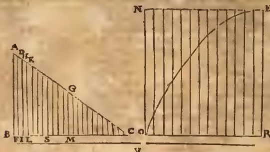


semble par les indivisibles composent le cône, & sont entr'eux comme les quarrez de leur diamétres; sçachant donc comme les diamétres sont entr'eux, on sçaura aussi la proportion des quarrez. Or cette division fait dans le cône & sur son axe des triangles semblables, comme A B C, D F C, H I C, K L C, &c. c'est pourquoy les demi-diamétres A B, D F, H I, K L &c. sont entr'eux, comme les portions de l'axe B C, F C, I C, L C sont entr'elles: or ces portions ayant différences égales, elles gardent entr'elles l'ordre naturel des nombres; les demi-diamétres garderont donc entr'eux l'ordre naturel des nombres. Si les diamétres gardent l'ordre naturel des nombres; leurs quarrez garderont l'ordre naturel des quarrez desdits nombres; & partant ces cercles seront entr'eux comme les quarrez des nombres qui suivent l'ordre naturel; c'est à dire comme 1, 4, 9, 16, 25, &c.

Cela posé, pour trouver le centre de ce cône, il faut chercher un plan dans lequel les lignes tirées gardent la mesme proportion, c'est à dire que la ligne soit à la ligne comme un quarré à un quarré; car le plan qui aura cette condition ne manquera pas d'avoir le centre de gravité au mesme lieu que le solide. Je prens pour le plan une parabole qui a pour sommet le point E; son axe est E R; & la touchante E N representera l'axe du cône B C. Je divise E N en parties infinies & égales, & de chaque point je tire des lignes paralleles à N O (representant A B) qui divisent le plan ou triligne E O N. On a montré que ce triligne est à son parallelogramme comme 1 à 3: on dira donc, Comme le triligne est à son parallelogramme, ainsi N E sera à une autre ligne V; partant V sera triple de N E; & si N E vaut 4, V vaudra 12. Je dis ensuite, Comme le cylindre fait par le parallelogramme de la parabole, est à la moitié du solide fait par le triligne O E N qui est renfermé dans le cylindre, ainsi 4 à 1; & ainsi la ligne V qui vaut 12 est à 3 qui sera la ligne C S, & le point S montrera le centre de gravité. Or B C estant 4, B S sera 1, & C S sera 3.

CENTRE DE GRAVITÉ du Conoïde parabolique.

SI je cherche le centre de gravité du Conoïde parabolique, je le coupe-ray, ou son axe, en parties infinies & égales par des plans qui diviseront tout le solide en cercles (car dans le conoïde parabolique aussi bien que



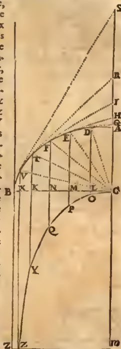
dans le cône, les sections faites par un plan parallele à la base, engendrent des cercles.) Or tous ces cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs diamétres; & partant sçachant comme les diamétres sont entr'eux, nous sçaurons comment sont leurs quarrez. Mais dans la parabole les quarrez des ordonnées sont entr'eux comme les portions de l'axe : icy les portions sont égales; & partant ils sont entr'eux comme les nombres naturels; les quarrez des diamétres seront donc entr'eux en l'ordre des nombres naturels; & le premier quarré estant 1, le second sera 2, le troisiéme sera 3 &c.

Par nostre doctrine il faut trouver une figure ou plan qui ait cette mesme proprieté. Je trouve que le triangle fait la mesme chose; il faut donc feindre que A B C est un triangle. Je divise B C en parties égales & infinies, & par les points je tire des paralleles à A B : or B C represente l'axe du solide dont on cherche le centre. Cela fait je dis, Comme le plan du triangle est à son parallelogramme, ainsi B C est à la ligne V. On sçait que le triangle est au parallelogramme comme 1 à 2; partant V sera double de B C; si B C est 3, V sera 6. Aprés on dit, Comme le cylindre fait par le parallelogramme du triangle est à la moitié du solide, ou du cône fait par le triangle, ainsi la ligne V sera à BM qui marquera le centre. Or le cylindre susdit est à la moitié du cône comme 6 à 1; partant B M sera $\frac{1}{6}$ de la ligne V, & le tiers de B C; le centre de gravité du conoïde parabolique sera donc au tiers de son axe du costé de la base; & ainsi divisant l'axe en trois parties égales, le premier point du costé de la base sera le centre de gravité.

Il faut observer en général, que quand on veut trouver le centre de quelque solide, aprés avoir divisé son axe en une infinité de parties égales, & par conséquent tout le solide, sçachant quelle proportion ou raison gardent toutes les sections faites par le plan qui a divisé le solide : il faut trouver un plan duquel la proprieté soit telle, que les lignes qui le divisent en une infinité de parties égales, soient entr'elles comme toutes les sections du solide sont entr'elles : si les sections, ou plans du solide sont entr'eux comme le quarré au quarré, les lignes du plan doivent estre entr'elles comme le quarré

au quarré. Si la proportion ou raison est autre dans le solide, elle doit estre telle dans le plan : observant toûjours dans le solide que si le plan est au plan comme le quarré de son demi-diamétre, au quarré du demi-diamétre de l'autre, dans le plan la ligne soit à la ligne, comme un quarré à un quarré. Voilà ce qu'il faut remarquer.

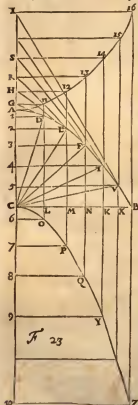
Soit la ligne courbe ou circulaire B T E A divisée en une infinité de parties égales aux points V, T, F, E, D, &c. & de chaqu'un desdits points soit tiré une touchante comme V S, T R, F I, E H, D G, &c. à telle condition que la derniére comme D G estant tirée, toutes les autres rencontrent plus haut la ligne C S, sçavoir plus loin du point C, comme aux points H, I, R, S, &c. qui partant seront tous pluséloignez de C que le point G dans la ligne C S. Outre cela, du point B je tire la touchante, qui vient à estre parallele à C S. Cela fait, des points d'atouchement comme de D, je tire une ligne, sçavoir D O, qui soit égale & parallele à C G; du point E, la ligne E P égale & parallele à H C; de F, la ligne F Q égale & parallele à I C; semblablement la ligne T Y égale à R C, & V Z égale à S C, & ainsi des autres points infinis, la ligne C S estant prolongée tant qu'il faudra, & la touchante en B tirée à l'infini, laquelle viendra à estre asymptote au regard de la ligne qui se forme par l'extrémité des lignes tirées des points de la division paralleles à C S, qui est la ligne courbe C O P Q Y Z. Puis aprés, si du point C on tire des lignes à chaque point de la division de la courbe B F A, tout l'espace A F B C viendra à estre divisé en secteurs infinis, lesquels par les indivisibles se convertissent en triangles, à cause que les petites portions des lignes courbes deviennent droites par la division infinie. Je dis davantage que tout l'espace B F A C Q Z jusques au bout de la courbe C Q Z tirée à l'infini, & qui est entre ladite courbe, & la touchante B tirée aussi à l'infini, se trouve divisé en parallelogrammes infinis, l'un desquels est D O C G qui represente le moindre. C'est un parallelogramme, parce que dans les indivisibles la touchante D G passe pour la partie de la ligne courbe D A, comme il a esté dit cy-devant dans une autre Proposition : or D O a esté faite égale & parallele à G C, & pareillement de tous les autres points, on a tiré les lignes égales & paralleles à leurs correspondantes en C S.



Pour venir à la conclusion, les parallelogrammes ont tous un mesme costé que les triangles, qui est chaque portion égale de la ligne courbe A E B. Je dis donc que les triangles qui ont pour sommet le point C duquel partent les deux costez du triangle, & dont le troisiéme est la portion de la courbe B F A divisée à l'infini; tous ces triangles, dis-je, qui remplissent l'espace A F B C, partent du point C comme de leur sommet. Mais les parallelogrammes qui sont sur bases égales & entre mesmes paralleles que

les triangles, sont doubles desdits triangles, & les uns & les autres sont entre les paralleles C O & D G & entre C P & E H &c. (ces lignes C O, C P sont seulement imaginées pour montrer que les triangles, & les parallelogrammes sont entre les mesmes paralleles, & sur des bases égales; car les bases des uns & des autres sont les portions de la ligne courbe divisée à l'infini, & les portions des touchantes comprises entre les paralleles à C A passent & sont prises pour ces portions de courbes comprises aussi entre les mesmes paralleles.)

Puisque les parallelogrammes sont doubles des triangles, par les indivisibles, l'espace qui est occupé par lesdits parallelogrammes, lequel se trouve compris entre la courbe A E B d'une part, & la courbe C Q Z produite à l'infini, d'autre part; & entre les lignes droites A C & la touchante B tirée à l'infini, tout cet espace, sçavoir le quadriligne Z B F A C Q Z sera double de l'espace A F B C. Mais l'espace A F B C est celuy qui est fait par les triangles; partant il sera égal à l'autre espace compris dans Z B C Q Z, les deux lignes B Z & C Z estant tirées à l'infini; ce qu'il falloit démontrer.



Cét article appartient à la figure précédente.

Or la touchante B Z est asymptote, d'autant que, comme la ligne D O qui part de la touchante D G est égale à la ligne G C qui part de l'extrémité de la mesme touchante, & ainsi de toutes les autres lignes qui partent des touchantes, il faudroit que la ligne qui sort du point B, & qui devroit rencontrer la mesme ligne C Q Z en quelque point plus éloigné, fust égale à la portion de la ligne C A I prolongée & comprise entre le point C & la rencontre de la touchante en B. Mais il est impossible que la touchante en B la puisse rencontrer, puisqu'elles sont paralleles; ainsi elle ne rencontrera jamais la ligne C Q Z en quelque point que ce soit, & partant elle est asymptote.

Considérons la figure quand nous aurons tiré les ordonnées des points D, E, F, &c. sur l'axe C A, & pareillement des points O, P, Q, &c. sur l'axe C 10, supposant que la figure A B C soit une parabole.

Soit D 1 la premiére ordonnée de la figure A B C, & O 6 de C Z 10, on aura D O égal à G C, & aussi à 1 6; & si des deux lignes égales G C & 1 6 on oste la ligne C 1 qui leur est commune à toutes deux, il restera G 1 égale à C 6. Or par la propriété de la parabole, G 1 est divisée en deux également par le sommet A; partant C 6 est double de A 1; & ainsi de tous les autres; sçavoir C 7 sera double de A 2; C 8 de A 3, &c. & ainsi, comme les lignes, ou parties de l'axe de la parabole A B C sont entr'elles, ainsi les doubles par-

ties seront entr'elles dans l'autre figure C Z 10. Mais dans la parabole les parties sont entr'elles comme les quarrez des ordonnées, & partant dans la figure C Z 10 les parties de l'axe seront aussi entr'elles, comme les quarrez des paralleles aux ordonnées (qui sont les ordonnées de ladite figure C Z 10) sçavoir, comme le quarré de O 6 est au quarré de P 7, ainsi C 6 est à C 7; d'où il s'ensuit que la figure C Z 10 sera aussi une parabole, qui sera double de la parabole A B C.

Mais si l'on veut que les portions de l'axe soient entr'elles comme les cubes des ordonnées, & qu'ainsi G 1 soit triple de A 1, alors C 6 sera triple du mesme A 1, & la parabole C Z 10 sera triple de la parabole A B C. La mesme chose se fera toûjours changeant les paraboles, & faisant que les portions de l'axe soient entr'elles comme les quarré-quarrez, quarré-cubes &c. des ordonnées à l'axe desdites paraboles.

Maintenant il faut voir comment se fera la quadrature de la parabole. Pour cét effet il faut considerer dans A B C que les ordonnées & les portions de l'axe forment des parallelogrammes qui remplissent la figure. Pour l'autre figure C Z 10, je la puis considerer comme ayant tiré du point B une touchante qui rencontre C I en I (car dans la parabole la touchante au point B n'est point parallele à C I, comme à la figure precedente, & partant elle doit rencontrer la ligne C I.) De ce mesme point B on tire B Z parallele à C I qui rencontrera la ligne C Q Z; car cette ligne n'est formée que par l'extremité des lignes paralleles à C A. Du point de la rencontre soit fermée la figure C Q Z 10. Les ordonnées de la parabole A B C seront égales aux ordonnées de la parabole C Z 10. Mais les portions de l'axe de la parabole A B C ne valent que la moitié des portions de l'axe de la parabole C Z 10; partant celles-cy sont doubles de celles-là, & partant les parallelogrammes de la parabole C Z 10 sont doubles des parallelogrammes de la parabole A B C; & partant la parabole C Z 10 sera double de A B C, ou du triligne qui luy est égal B C Q Z; & le parallelogramme C B Z 10 triple de la mesme parabole A B C; donc ladite parabole C Z 10 sera les deux tiers dudit parallelogramme C B Z 10; & de cette sorte je trouve la quadrature de la parabole puisque j'ay un parallelogramme qui a raison avec la parabole, Archiméde s'estant contenté de trouver une parabole égale, ou bien en raison, à un triangle. Que si on prend les cubes, quarré-quarrez & autres puissances des ordonnées on en conclura de mesme la quadrature de ces paraboles.

Il faut maintenant prouver que les deux trilignes D A 1, & O C L sont égaux; & pour cét effet ayant tiré la ligne droite C D, je dis que le triligne C D A est la moitié du quadriligne C O D A: si donc de ce quadriligne j'oste le parallelogramme C L D 1, il restera les trilignes C O L & A D 1; si du triligne on oste le triangle C D 1, il restera le triligne D A 1; par ainsi d'une grandeur double d'une autre grandeur, j'ay tiré une partie double d'une partie que j'ay tirée de l'autre, partant le reste de la grande doit estre double du reste de la petite, & de cette sorte D A 1, & L C O sont doubles de D A 1; donc D A 1 sera égal à L C O, ce qu'il falloit démontrer.

Il reste à faire voir que la ligne C D coupe en deux également le quadriligne C O D A (car il n'est pas toûjours veritable.) Pour cét effet on suppose O D pour un des costez du parallelogramme, & pour l'autre la portion D A indivisible sur la touchante D G ou sur la ligne courbe D A qui est la mesme chose, & le triangle C D avec la mesme portion indivisible D G ou D A. Je dis que le parallelogramme est double du triangle; car ils sont sur des bases égales, qui sont lesdites portions indivisibles, & entre mesmes paralleles, sçavoir O C & D G, ainsi C D coupe le parallelogramme, ou pour

mieux dire, le quadriligne O D A C en deux également ; car nous ne considérons plus l'espace D A G ni celuy qui est compris entre la courbe O C & la droite O C ; car ces espaces ne sont point de nos parallelogrammes & triangles. Or tous ces triangles ne sont considérez que comme des lignes, sçavoir C D, C E, & les autres à l'infini ; & toutes les lignes ou triangles remplissent l'espace A B C comme les parallelogrammes (au lieu desquels nous prenons les lignes D O, E P, F Q, &c.) remplissent l'espace Z B A C Q Z, soit que les lignes B Z & C Q Z se rencontrent ou non.

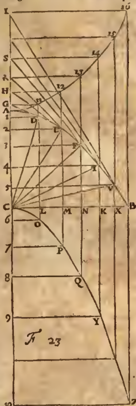
Venons maintenant au solide qui se fait par la révolution de la figure sur l'axe A C. Nous voyons qu'il se fait plusieurs cylindres, rouleaux de cylindres, cônes, ou rouleaux de cônes ; comme le cylindre fait sur l'axe C A par le parallelogramme C A D O ; le cône fait sur la mesme C A, & par le triangle C A D ; puis les rouleaux de cylindres faits par les petits parallelogrammes, comme sont D O P E & les autres semblables qui ont pour base les portions indivisibles de la courbe, & les rouleaux de cônes qui sont faits par les triangles comme C D E, C E F & les autres semblables autour de l'axe C A. Mais les cônes sont aux cylindres qui sont sur mesme base, comme 1 à 3, & les rouleaux des cônes sont aux rouleaux des cylindres en mesme raison ; & partant le solide fait de A B C sera le tiers du solide Z B A C Q Z ; & si les lignes B Z, C Z ne se rencontrent point, il faut supposer le solide continué à l'infini de ce costé-là, & ostant le solide fait de A B C, restera le solide B C Z, qui sera double du mesme A B C. Dans les plans nous avons trouvé que le plan A B C est égal au plan B C Z continué à l'infini s'il est besoin. Il faut maintenant considerer ces figures comme paraboles ; & par consequent la touchante du point B, ou plûtost la ligne tirée de B parallele à A C rencontrera la courbe C Z continuée. Soit donc fermé la figure au point de la rencontre, & soit C Z 10 la figure tournant sur son axe, & comparant les cylindres faits par les parallelogrammes D 1 A, E 2 A, &c. à ceux de l'autre parabole comme O 6 C, P 7 C, &c. parce que les ordonnées D 1, O 6, &c. de l'une & de l'autre figure sont toutes égales ; mais les portions de l'axe de la parabole C Z 10, comme C 6, &c. sont doubles des portions de l'axe A C, comme A 1 &c. il s'ensuit que chaque cylindre d'embas sera double de celuy d'enhaut, & partant tout le solide d'embas fait par C Z 10 roulant sur C 10 sera au solide fait par A B C tournant sur A C, comme 2 à 1. Mais on a veû que le solide de A B estoit au solide fait par Z Q C B, comme 1 à 2 ; partant ledit solide de Z Q C B sera égal au solide de C Z 10 ; & ainsi le solide de C Z 10 sera la moitié du cylindre fait par le parallelogramme C B Z 10, ce qu'il falloit démontrer.

Il faut maintenant considerer une autre figure qui se fait élevant du point L une ligne égale & parallele à C G, sçavoir L 11 ; du point M tirant M 12 égale & parallele à C H, & ainsi des autres, & par l'extremité desdites lignes se forme la ligne courbe A 11 12 16, & de chaqu'un desdits points on tire les ordonnées 11 G, 12 H, 13 R, &c. qui sont égales à celles de A B C tirées des points correspondans D E F, &c. qui sont infinis : de plus A G est égal à A 1, A H égal à A 2, &c. dans la parabole simple.

On considerera aussi que les lignes L 11, & D O sont égales, & pareillement M 12 & E P ; N 13 & F Q, &c. & partant les parallelogrammes 11 L M 12, 12 M N 13, &c. sont égaux aux parallelogrammes O D E P, P E F Q, &c. car on ne prend icy que les lignes D O E P &c. ou leurs égales L 11, M 12, &c. au lieu desdits parallelogrammes. Or on a montré que les triangles C A D, C D E, C E F &c. sont la moitié des parallelogrammes A O, D P, E Q, &c. partant ils seront aussi la moitié des parallelogrammes A C L 11, 11 L M 12, 12 M N 13, &c. l'espace A B C est donc la moitié de l'espace 16 A C B, soit que

les

les lignes A 16, & B 16 se rencontrent ou non. D'où il s'ensuit que ABC est égal à l'espace B A 16, quand mesme les lignes A 16 & B 16 estant prolongées à l'infini, ne se rencontreroient point. On pourroit monstrer la mesme chose plus briévement, comme il s'ensuit. Les lignes 11 L, 12 M, 13 N, & les autres infiniment, estant égales aux lignes DO, EP, FQ, &c. il s'ensuit que l'espace Z C A B est égal à B C A 16; ostant donc A B C commun, restera B A 16 égal à B C Z qui a esté cy-devant monstré égal à A B C, & partant 16 A B luy est aussi égal.



Maintenant soit A B C la premiére parabole, la touchante B I rencontrant C I, la ligne B 16 égale & parallele à C I rencontrera la courbe A 16 au point 16, & la figure A 16 I sera une parabole égale & semblable à A B C: car les ordonnées de l'une sont égales aux ordonnées de l'autre, sçavoir D 1 à G 11, E 2 à H 12 &c. puisqu'elles sont entre les mesmes paralleles; & par la proprieté de la parabole, A G est égal à A 1, AH à A 2, AR à A 3, &c. sçavoir les portions de l'axe où aboutissent les ordonnées correspondantes sont égales; & partant toute la parabole ABC sera égale à toute la parabole A 16 I. Or on a trouvé que l'espace B A 16 est égal à A B C; partant les trois piéces ou espaces A B C, A 16 I, & B A 16 comprises dans le parallelogramme I C B 16, & qui le forment, sont égales entr'elles.

Ce que nous venons de dire icy de la premiere parabole, ou de la parabole du premier genre, ce qui est la mesme chose, se doit entendre aussi des paraboles des autres genres, c'est-à-dire que, si la parabole A B C est du troisiéme genre, la parabole A 16 I sera aussi du troisiéme genre; mais elle ne sera pas la mesme que la parabole A B C: car les parties A G, A H, A R, &c. sont bien entr'elles en mesme raison, que les parties A 1, A 2, A 3 &c. mais A G n'est pas égale à A 1, ni A H égale à A 2 &c. comme elles sont dans la parabole du premier genre.

DE
TROCHOIDE
EJUSQUE SPATIO.

DEFINITIONES.

SI circulus duplici motu simul & eodem tempore moveatur, altero quidem recto, quo centrum illius feratur secundùm lineam rectam; altero autem circulari, quo ipse cum omnibus suis radiis circa centrum suum circumvolvatur; sitque uterque motus sibi ipsi semper uniformis, & alter alteri æqualis, ita ut recta quam percurrit centrum spatio unius integræ conversionis circumferentiæ, intelligatur esse eidem circumferentiæ æqualis: atque inter movendum circulus ipse perpetuò maneat in eodem plano infinito in quo extitit in initio motûs: ejusmodi circulum vocamus *Rotam*.

Recta per quam fertur centrum, vocetur *iter centri*.

Quæcunque puncta vel lineæ à circulo denominantur, denominentur hic à rotâ, ut centrum rotæ, radius rotæ, circumferentia rotæ, &c.

Manifestum est autem circumferentiam rotæ contingere continuè & successivè in aliis atque aliis punctis quandam lineam rectam itineri centri parallelam: vocetur hæc *via rotæ*.

Manifestum est quoque quidquid accidat in quâvis integrâ circumvolutione rotæ, idem quoque accidere in quâcunque aliâ; modo initia circumvolutionum sumantur à radiis similiter positis, id est, qui cum itinere centri æquales ad easdem partes angulos constituant, sintque radii ipsi paralleli.

Nos itaque unam conversionem assumamus, cujus initium statuimus in eo rotæ radio qui perpendicularis est tam viæ rotæ quam itineri centri, eumque ipsum radium, dum ad motum rotæ movetur, consideramus ac prosequimur, donec absolutâ integrâ conversione, idem ab eadem parte fiat rursus iisdem viæ rotæ & itineri centri perpendicularis. Hic ergo radius in initio circumvolutionis vocetur *radius principii motûs*: in medio autem dum ipse perpendicularis est itineri centri, sed ad alteras partes constitutus, dicetur *radius medii motûs*: & tandem in fine, *radius perfecti motûs*.

Quòd si radius ipse in quâcumque positione produci intelligatur utrinque quantùm libuerit etiam extra rotam, idem dicetur linea principii, medii, vel perfecti motûs.

Jam in lineâ principii motûs indefinitè productâ versùs viam rotæ intelligatur sumptum quodcumque punctum præter centrum, atque inter ipsum centrum versùs viam rotæ, etiam in eâdem viâ aut ultrà, cujus puncti motus spectetur: fiet necessariò ut propter implicationem motûs circularis cum recto, ipsum punctum describat lineam aliquam, cujus portio quædam ab unâ parte itineris centri, altera autem portio ab alterâ parte existat; ea autem incipiet in lineâ principii motus, & in lineâ perfecti motûs definet. Vocetur hæc *Trochoides*.

Recta quæ Trochoidis hujus extrema puncta jungit, estque vel via rotæ, vel ei parallela, dicatur *Trochoidis ejusdem basis*. Portio lineæ medii motûs intercepta inter trochoidem & basim ejus, *axis trochoidis* vocabitur; qui

quidem axis ab itinere centri bifariam secabitur in puncto quod nos *centrum trochoidis* nuncupamus. *Vertex* autem *trochoidis* est extremum axis punctum in trochoide existens, seu basi oppositum.

Jam manifestum est à trochoide & ab ejusdem basi comprehendi spatium quoddam planum; quod nos postea vocabimus *spatium trochoidis*. Ejus centrum, basis, axis & vertex ijdem qui trochoidis intelligantur.

Quæcunque recta ab aliquo puncto trochoidis ducitur usque ad axem parallela viæ rotæ, dicatur *ad axem ordinata*.

Item, mensura integri motûs conversionis rotæ intelligatur tota circumferentia rotæ; mensura dimidij motûs intelligatur dimidia circumferentia; & sic in universum mensura cujusvis partis motûs rotæ intelligatur esse arcus circumferentiæ ejusdem rotæ, qui ad integram circumferentiam eandem habeat rationem, quam pars motûs assumpta ad motum conversionis integræ.

Præterea, si circa axem trochoidis tanquam circa diametrum, & circa ejusdem trochoidis centrum circulus describatur, is erit vel rota ipsa, vel eâdem major aut minor, prout punctum, quod trochoidem descripsit, sumptum fuerit vel in circumferentiâ rotæ, vel extra vel intra ipsam totam. Et siquidem circulus ipse sit rotæ æqualis, seu rota ipsa; tunc ipsa trochoides denominabitur à rota simplici, diceturque *trochoides rotæ simplicis*, seu *trochoides vera rota*. Si autem ipse circulus circa axem trochoidis descriptus major sit quam rota, tunc trochoides denominabitur à rotâ contractâ, diceturque *trochoides rota contracta*. Si tandem circulus minor sit ipsâ rotâ, ejus trochoides denominabitur à rotâ prolatâ, diceturque *trochoides rota prolata*. Spatia, bases, & cætera ad ipsas trochoides pertinentia, curvæ suæ denominationem sortiantur: at circulus ipse circa axem trochoidis tanquam circa diametrum descriptus, dicatur circulus suæ trochoidi proprius.

Et quia positis ijs quæ jam dicta sunt, concipi potest duplex rotæ motus circularis, prout motus circuli circa centrum intelligi potest fieri ad hanc vel illam partem: nos eum assumimus, qui rotis communibus convenit, quo quidem motu pars interior circumferentiæ, putà quæ adjacet viæ rotæ, fertur non ad easdem partes ad quas centrum tendit motu recto, sed ad contrarias; superior autem rotæ pars quæ viæ ejus opponitur, fertur secundùm motum centri. Hic enim motus omnium rotarum physicarum proprius est & veluti naturalis; alter autem eidem contrarius est, veluti violentus & contra naturam rotæ: geometricè tamen uterque considerari potest, nec alia inter trochoides quæ ab ipsis orientur, accidet differentia, nisi quod quæ partes erant unius extremæ in alterâ, eædem erunt mediæ; spatia autem longè different cùm figurâ tum magnitudine, sed quia unum erit veluti complementum alterius, ideo ex uno noto dabitur alterum; quam speculationem nos in aliud tempus remittimus. Agimus autem hic de trochoide rotæ tam simplicis quam prolatæ & contractæ, sed motu communi rotæ physicæ motæ, ac de eâ & de spatio ejus sequentia enuntiamus Theoremata, quorum pars statim demonstrabitur; reliqua autem pars quæ longissimæ & acutissimæ speculationis est, opportuno tempore suam nanciscetur demonstrationem, quam quidem à nobis inventam (ut cætera quæ ad totam pertinent) eo usque retinemus donec per tempus liceat integrum opus producere.

Supponimus autem quædam quæ etsi per se demonstrationem requirant, tamen ea tam facilis est, ut cuivis in Geometriâ mediocriter versato statim appareat, qualia sunt hæc. In primo quadrante integræ conversionis rotæ punctum quod trochoidem describit, percurrit spatium quod est inter basim trochoidis & iter centri; idemque punctum motu recto posterius est centro rotæ. In secundo quadrante idem punctum percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad verticem trochoidis, est que adhuc posterius centro rotæ. In

tertio quadrante punctum idem percurrit spatium quod est à vertice trochoidis usque ad iter centri, sed jam hoc punctum præcedit respectu centri, quod sequitur si motus recti habeatur ratio. In quarto & ultimo quadrante punctum de quo agimus percurrit spatium quod est ab itinere centri usque ad basim trochoidis, & adhuc idem punctum præcedit, centrum autem rotæ sequitur motu recto.

Hinc verò atque ex quibusdam alijs quæ naturam rotæ motæ, ut dictum est, statim consequuntur, demonstrabitur facilè trochoidem quæ fit ab unicâ conversione cujuscunque rotæ in seipsam non recurrere, seu per idem punctum bis transire non posse: contrarium autem accideret in rotâ prolatâ, si aliud à nostra sumeretur principium.

Nec minus facilè est demonstrare eam trochoidis partem, quæ est à principio usque ad verticem æqualem esse & similem alteri parti quæ est à vertice usque ad finem, & ambas partes sibi invicem congruere posse. Item, primam medietatem ejusdem trochoidis totam esse ab unâ parte axis, secundam verò totam esse ab alterâ. Idem dictum intelligatur de duabus partibus spatij ipsius trochoidis quæ ab ejusdem axe constituuntur. Atque ita quæ in unâ ex his medietatibus demonstrabuntur, in alterâ quoque medietate demonstrata esse quivis facilè intelliget, collatis invicem duarum medietatum partibus illis quæ sunt prope verticem &c. His positis primaria trochoidis proprietas, quam proptetea demonstrabimus, videtur esse hæc.

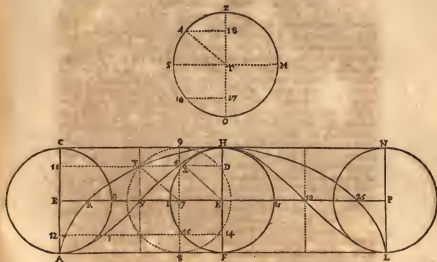
Propositio Prima.

Si ab assumpto puncto primæ medietatis trochoidis ad axem ordinata sit recta quævis, ejus portio quædam erit extra circulum ipsi trochoidi proprium; quæ quidem portio æqualis erit arcui rotæ, qui mensurat eam partem motûs, quæ restat inde ab eo tempore, quo notatum est à puncto mobili punctum assumptum, usque ad medietatem integræ conversionis rotæ.

Esto recta EP; iter centri rotæ cujusdam æqualis circulo seorsim posito SOMZ, cujus centrum T; sit que recta CEA linea principij motûs: intelligaturque recta EP æqualis circumferentiæ rotæ SOMZS, & recta NPL sit linea perfecti motûs. Tum divisâ EP bifariam in puncto K, ducatur recta HKF, quæ sit linea medij motus; puncta autem A, F, L sint ad easdem partes respectu rectæ EP, & puncta C, H, N ad easdem quidem partes inter se, sed ad alteras respectu ejusdem rectæ EP, & punctorum A, F, L.

Concipiatur jam in linea principij motûs CEA assumptum esse punctum A, ad describendam trochoidem, sive recta EA æqualis sit semidiametro rotæ TO, quo pacto fiet trochoides rotæ simplicis; sive ipsa EA major sit quam TO, ut fiat trochoides rotæ prolatæ; sive denique minor ut habeamus trochoidem rotæ contractæ: moveaturque rota hoc pacto ut centrum illius percurrat rectam EP, interim dum ipsa motu circulari absolverit unam integram conversionem circa idem centrum, posito utroque motu sibi ipsi semper uniformi: feratur autem unà cum rotâ recta EA, quæ ad motum rotæ æqualiter circumvolvatur, ita ut in medio motûs integræ conversionis ipsa EA conveniat rectæ KH, in fine autem eadem conveniat rectæ PL; sicque propter implicationem motûs circularis cum recto puncti A describat trochoidem ARYHL, cujus basis AL, axis HF, vertex H, centrum K, & spatium ARYHLA; sint etiam puncta A, F, L in eâdem rectâ lineâ quæ est basis, & puncta C, H, N in aliâ rectâ ipsi basi & itineri centri parallelâ, ut sit ALNC parallelogrammum rectangulum. Præterea centro K, & intervallo KH,

KH, seu KF, æquali ipsi EA, describatur circulus HIFG, cujus circumferentia secet iter centri versùs principium quidem in I, versùs finem autem in G, qui circulus erit proprius trochoidi ex definitione, eritque idem vel æqualis rotæ, vel ipsa major aut minor, quod hoc loco nihil refert. Item in lineâ ARYH, quæ est prima medietas trochoidis sumatur quodcunque punctum Y, à quo ad axem HF, ordinata sit recta YD secans primam semicircumferentiam circuli proprii in puncto X.

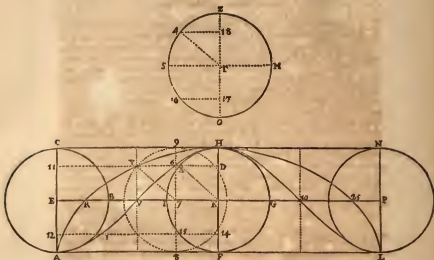


Dico primò portionem aliquam ipsius YD esse extra circulum FIH. Quia cum punctum Y est in prima medietate trochoidis, quæ quidem per ipsum punctum Y semel tantum transit, ut superius positum est, non potest esse nisi unica positio rotæ in quâ illâ existente notatum est punctum Y, atque in illâ positione centrum ipsius rotæ extitit inter puncta E, K, scilicet intra primam medietatem itineris centri. Existat igitur eâ positione centrum illud in puncto 7, per quod ducatur recta 8 7 9 parallela lineæ medii motûs FKH, secans basim quidem AL, in puncto 8, rectam verò CN in puncto 9; ducatur quoque recta 7 Y, quæ quia ducitur à centro rotæ 7 in hâc positione, ad punctum Y, quod in eâdem positione trochoidem describit, æqualis erit rectæ EA, seu potius recta 7 Y erit ea ipsa EA, cujus punctum E motu recto pervenit in 7, punctum autem A motu implicato perlatum est in Y, describens trochoidis portionem ARY, & eadem recta motu circulari rotæ positionem suam mutavit secundùm angulum 8 7 Y: huic ergo angulo constituatur æqualis OT 4 rotæ seorsim positæ, cujus OTZ sit diameter, & punctum 4 in circumferentiâ.

Conveniente ergo per intellectum centro T cum centro 7, & angulo OT 4 angulo 8 7 Y, sive latera æqualia sint, sive non, manifestum est ex naturâ rotæ, arcum O 4 esse mensuram motûs jam peracti à principio conversionis; & arcum 4 Z qui cum O 4 complet semicircumferentiam rotæ,

esse mensuram motûs qui deest ad complendam dimidiam conversionem: & quia æquales sunt ambo motus rotæ, circularis scilicet & rectus, & uterque uniformis sibi ipsi, manifestum est quoque rectam E 7 æqualem esse arcui O 4, & rectam 7 K arcui 4 Z: quod notetur.

Centro 7, intervallo autem 7 Y, vel 7 8, vel 7 9, quæ æqualia sunt, describatur circulus cujus diameter erit 8 7 9. Quoniam ergo per ea quæ posita sunt, punctum Y in prima medietate trochoidis existens sequitur post



centrum motu recto, erit ipsum Y respectu diametri 8 9 versùs principium curvæ, jacebitque propterea ipsa diameter 8 9 inter punctum Y & axem H F, eademque secabit rectam Y D ordinatam ad axem, esto in puncto 6: rectæ ergo D H, 6 9 æquales sunt, sicuti & rectæ F D, 8 6; & rectangulum F D H, æquale rectangulo 8 6 9, quæ rectangula cum sint æqualia quadratis X D, Y 6, erunt hæc quadrata æqualia, & recta D X æqualis rectæ 6 Y: sed recta D Y major est quam 6 Y, totum scilicet parte; ergo eadem D Y major est quàm D X; excessus autem est portio X Y; hæc itaque portio est extra circulum F X H trochoidi A Y H proprium; quod primo loco demonstrandum erat.

Dico secundò eandem portionem exteriorem X Y, æqualem esse arcui 4 Z. Quoniam enim ostensæ sunt æquales D X, & 6 Y, sunt autem puncta X 6 vel simul, vel sejuncta, & hoc casu vel punctum X est inter puncta D & 6, vel è contrario ipsum X est inter puncta 6, Y, secundùm diversas species trochoidum rotæ simplicis, prolatæ, vel contractæ, quod hoc loco nihil refert: quidquid sit, additâ vel subtractâ communi X 6, si quæ inter puncta X 6 interjaceat, fiet recta D 6 æqualis rectæ X Y, est autem D 6 æqualis rectæ K 7, seu arcui 4 Z, ut notatum est; quare & recta X Y eidem arcui 4 Z est æqualis, quod secundo loco demonstrandum erat: quare constat Propositio.

Corollarium primum.

HINC manifestum est arcum X H similem esse arcui rotæ 4 Z, sicuti arcus F X similis est arcui O 4; & est 4 Z quicunque arcus mensurans motum qui deest ad dimidiam conversionem, & O 4 mensurat motum jam transactum, quod notasse in sequentibus usui erit.

Corollarium secundum.

HIc demonstrari potest in rotâ simplici, atque in prolatâ rectam 6 D majorem semper esse quam X D, propterea quod ipsa rota seu circulus O 4 Z tunc æqualis est circulo proprio F X H, vel ipso major; ideoque arcus 4 Z, æqualis est arcui X H, vel ipso major, quia similes sunt ipsi arcus. Sed recta 6 D æqualis est arcui 4 Z, ex demonstratis; quare eadem 6 D æqualis est arcui X H, vel ipso major: arcus autem X H semper major est rectâ X D; quare hoc casu recta 6 D semper major est quàm X D.

In rotâ autem contractâ, quia ipsa Rota minor est quàm circulus sibi proprius F X H, atque ideo arcus 4 Z semper minor est arcu sibi simili X H, secundùm rationem diametri rotæ ad diametrum circuli sibi proprii, erit recta 6 D, quæ æqualis est arcui 4 Z, semper minor arcu X H, secundùm eandem rationem; hic autem arcus X H, quia assumptus est utcunque minor semicircunferentiâ circuli proprij F I H, potest habere ad rectam X D quamcunque rationem majoris ad minus, scilicet ut diameter F H, ad diametrum rotæ O Z. Fieri ergo poterit aliquando ut arcus X H ad rectam X D eandem habeat rationem quam ad rectam 6 D, aliquando majorem & aliquando minorem; ideoque in rotâ contractâ poterit recta 6 D æqualis esse rectæ X D, vel ipsâ major aut minor: atque ita punctum 6 erit vel simul cum puncto X, vel inter puncta Y, X; vel inter puncta X, D.

Et quidem quòd res ita se habeat in universum ex his satis patet; quibus autem in punctis quave positione rotæ omnes istæ differentiæ accidant in datâ quâcunque ratione diametri rotæ contractæ ad diametrum circuli sibi proprii demonstrare longum esset; & difficillimum, opusque esset hoc assumpto; scilicet dato cuivis arcui circumferentiæ circuli, intelligi posse rectam lineam æqualem, minorem, vel majorem.

Corollarium tertium.

ILLUD quoque ex demonstratis statim apparet, scilicet trochoidem occurrere circumferentiæ circuli sibi proprii in unico puncto verticis, atque in eo puncto tantùm lineas ipsas sese rangere, ipsumque circulum totum contineri intra spatium ejusdem trochoidis.

Corollarium quartum.

HINC præterea clarum est ipsam trochoidem non esse lineam rectam nec ex duabus rectis compositam, siquidem illa à puncto A pervenit ad punctum H, nec tamen ingreditur aut secat circulum proprium F X H, quem secaret necessario si recta esset à puncto A ad punctum H, sive à puncto H ad punctum L: non est ergò recta, nec ex duabus rectis composita.

Quod autem cujuscunque trochoidis nulla pars lineæ rectæ congruere possit, sed omnes partes sint curvæ, atque penitùs ab alijs quibuscunque curvis huc usque notis diversæ, demonstrari quidem potest, sed demonstratio

longa est & difficilis, neque hujus loci, quando quidem ad ea quæ intendimus non requiritur.

Corollarium quintum.

Quia in antecedenti Propositione punctum 6 est sectio communis rectæ ordinatæ Y D & rectæ 8 7 9, quæ est diameter circuli 8 Y 9, qui concentricus est rotæ ita positæ ut centrum illius sit 7 : si intelligatur alia atque alia positio rotæ ab initio motûs donec centrum illius percurrerit rectam E K, manifestum est aliud atque aliud fore ipsum punctum 6; ipsumque moveri incipere à puncto A, & in medio motus integræ conversionis rotæ, idem pervenire ad punctum H, atque adeo ipsum ferri secundùm lineam quandam A 6 H secantem rectam E K in puncto V. Quòd si idem ferri intelligatur à puncto H ad punctum L, fiet reliqua dimidia pars ejusdem novæ lineæ, secans rectam K P in puncto 10: atque ideo ipsa integra erit A V 6 H 10 L, hanc nos vocamus *trochoidis comitem*, seu *sociam*.

Vertex, basis, axis & centrum illius eadem sunt quæ trochoidis, cujus illa comes est. Quod autem ab ipsa & basi suâ comprehenditur spatium planum, ab eâdem denominetur. Item, quæ à trochoide & ab ejus comite comprehenduntur duo spatia, quorum alterum est A Y H V A, inter lineas principij & medii motus: alterum vero ei simile & æquale inter lineas medii & perfecti motus; singula à duabus illis lineis simul nomen sortiantur, dicaturque unumquodque spatium trochoide & suâ comite contentum: ordinata ad axem comitis trochoidis dicatur quævis recta à quacunque puncto ejusdem comitis ad axem ducta parallela basi.

Propositio Secunda.

Si à quocunque puncto trochoidis ad axem ordinetur recta quæpiam, hujus portio erit ordinata ad axem comitis ejusdem, quæ quidem portio æqualis erit ei ejusdem ipsius ordinata ad trochoidem portioni, quæ interjicitur inter ipsam trochoidem & circumferentiam convexam circuli eidem trochoidi proprii.

Manifesta est hæc Propositio ex iis quæ jam demonstrata sunt. Esto enim Y D recta quæcunque à puncto Y in trochoide existente ad axem F D H ordinata, & ponantur eadem quæ superiùs. Existit punctum 6 in ejusdem trochoidis comite, ex definitione; & recta 6 D erit ad axem ipsius comitis ordinata: recta vero X Y interjicitur inter trochoidem & circunferentiam convexam circuli ipsi proprij. Ostensum autem est rectas ipsas 6 D & X Y esse inter se æquales; quare patet Propositio, quæ id tantum enuntiabat.

Corollarium primum.

Hinc manifestum est eandem ordinatam 6 D æqualem esse arcui rotæ 4 Z.

Corollarium secundum.

Perspicuum est etiam rectam Y 6, quæ interjicitur inter trochoidem & ejus sociam, æqualem esse rectæ X D interjectæ inter circunferentiam circuli proprii & axem.

Corollarium tertium

Sed & hic demonstrari potest in rotâ simplici comitem trochoidis occurrere circunferentiæ circuli proprij in vertice tantum, atque in eo solo puncto

cto lineas ipsas sese contingere. Quod idem accidit comiti trochoidis rotæ prolatæ. At in curva rotæ contractæ comes secat circumferentiam circuli proprii infra verticem, idque semel tantùm in primâ dimidiâ conversione rotæ, & rursus semel tantùm in alterâ dimidiâ conversione: ac præterea eadem comes eandem circumferentiam tangit interiùs in vertice, cujus quidem Enunciati longa est demonstratio, non tamen ita difficilis; sed de his aliàs.

Corollarium quartum.

ID autem peculiare est rotæ simplici, quod angulus contactus qui fit à comite trochoidis illius & circumferentiâ circuli ipsi proprii, minor sit omni angulo contactus duorum quorumvis circulorum etiam interiùs sese tangentium: quod rursùs in alium locum remittimus, propter prolixitatem demonstrationis, quæ tamen non est admodum difficilis.

Corollarium quintum.

ITem cujuslibet trochoidis comes nec recta est, nec ex duabus aut pluribus rectis composita; nec trochoidi nec alii cuivis curvæ ex iis quæ huc usque notæ sunt ita occurrere potest ut pars sit eadem, & pars non sit communis: quod, quia demonstrare longum est & difficillimum, neque ad ea quæ intendimus requiritur, ideo prætermittimus.

Propositio Tertia.

Si à quocunque puncto primi quadrantis comitis trochoidis ad axem ipsius ordinata sit recta quævis, quæ usque ad lineam principii motûs producatur; item ab aliquo puncto secundi quadrantis ejusdem comitis eodem modo ordinata sit alia recta (modo ipsa ordinatæ æqualiter distent hinc inde ab itinere centri rotæ) earum rectarum sic productarum portiones permutatim sumpta, erunt æquales; ita ut quæ in unâ earum rectarum inter comitem & axem interjicitur portio, æqualis sit ei alterius rectæ portioni quæ interjicitur inter eandem comitem & lineam principii motûs, & reciprocè.

PONANTUR eadem quæ suprà in eâdem figura; atque in linea A 13 V, primo scilicet quadrante comitis, sumptum sit punctum quodcunque 13, à quo ad axem F H ordinata sit recta 13 14, quæ minor erit quam A F, quia ipsa A F æqualis est semicircumferentiæ rotæ; 13 14 autem ipsâ semicircumferentiâ minor. Producatur ergo eadem 13 14 donec occurrat lineæ principij motûs A C in puncto 12. Tum in axe F H intelligatur portio K D æqualis portioni K 14, sed ad diversas partes, & ducatur recta D 6 11 parallela rectæ K E, occurrens comiti quidem in puncto 6, quod erit in secundo ipsius quadrante, lineæ autem A C in puncto 11. Dico rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11, & reciprocè rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D. Secet enim recta 12 14 circumferentiam F I H in puncto 15; & recta 11 D secet eandem circumferentiam in puncto X, sintque puncta 15, X in eâdem semicircumferentiâ quæ est versùs principium motûs; item in semicircumferentiâ rotæ O S Z, sit arcus Z 4 similis arcui H X, & arcus Z 16 similis arcui H 15; sintque Z S, & O S quadrantes, sicuti H I, & F I. Jam quia æquales sunt rectæ K 14, K D erunt arcus I X, & I 15 æquales. Item æquales erunt arcus F 15, H X; & æquales F X, H 15: ac propterea in rotâ æquales erunt arcus S 4, S 16. Item æquales arcus O 16 & Z 4, & æquales O 4, Z 16. Quare ex Corollario primo Propositionis primæ, quia arcus H X similis est arcui qui mensurat motum, qui superest ad dimidiam conversionem in eâ positione rotæ, erit arcus Z 4 ea ipsa

S S s

mensura ejusdem motûs. Eâdem ratione erit arcus Z 16 mensura motûs qui superest ad dimidiam conversionem rotæ, dum notatur ab ipsâ punctum 13; ac propterea ex Corollario primo Propositionis secundæ, tàm recta 6 D æqualis est arcui 4 Z, quam recta 13 14 æqualis arcui 16 Z: ambo autem ipsi arcus 4 Z & 16 Z simul sumpti æquales sunt semicircumferentiæ O Z (ostensus est enim arcus 4 Z æqualis ipsi 16 O) ideoque duæ rectæ 6 D & 13 14 simul sumptæ æquales sunt eidem semicircumferentiæ O Z, sive rectæ D 11, vel 14 12. Demptis ergo communibus sequitur rectam 13 12 æqualem esse rectæ 6 D; & rectam 13 14 æqualem esse rectæ 6 11; quod erat ostendendum.

PROPOSITIO QUARTA.

Quod à trochoidis comite & ab ipsius basi continetur, spatium dimidium est rectanguli cujus eadem est basis & eadem altitudo cum trochoide vel ejus comite, sumpto axe communi pro altitudine.

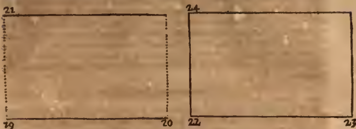
IN eâdem rursùs figurâ. Dico spatium quod à comite A V H 10 L & basi ejus A L continetur, dimidium esse rectanguli A C N L, cujus eadem est basis A L & eadem altitudo axis F H. Consideretur enim ipsius rectanguli dimidium A C H F, quod à curvâ A V H ipsius comitis dimidia, in duas partes dividitur, quarum partium altera continetur ab ipsâ curvâ A V H & duabus rectis A F, F H, altera autem pars continetur ab eâdem curva A V H & duabus rectis H C, C A. Ostendendum est duas illas partes esse inter se æquales. Atqui ex antecedenti Propositione facile est ostendere duas easdem partes omnino sibi invicem superponi posse & congruere, posito scilicet puncto C cum puncto F, & rectâ C A cum recta F H; item recta C H cum recta F A: tunc enim quia recta C 11 æqualis est rectæ F 14, congruet punctum 11 cum puncto 14, & recta 11 6 cum recta 14 13, cui æqualis ostensa est; & eodem modo recta A 12 congruet rectæ H D, & recta 12 13 rectæ D 6, cui æqualis ostensa est, & reliquæ reliquis, & omnes omnibus, & spatium spatio congruet. Quare ipsa spatia sunt æqualia, & spatium A V H F A dimidium est rectanguli F C. Idem verò in reliquo rectangulo F N ostendetur eodem modo, ideóque vera est Propositio.

PROPOSITIO QUINTA.

Idem spatium proportione medium tenet inter duplum rotæ & duplum circuli trochoidi proprii.

PONANTUR eadem. Dico spatium A V H 10 L A proportione medium esse inter duplum rotæ O S Z M, & duplum circuli F I H G trochoidi proprii. Intelligantur enim duo rectangula, alterum quidem 20 21, cujus basis 19 20 æqualis sit semicircumferentiæ rotæ O S Z, altitudo vero 19 21 æqualis diametro ejusdem rotæ O Z; alterum verò rectangulum 23 24, cujus basis 22 23 æqualis sit semicircumferentiæ circuli proprii F I H, altitudo autem 22 24 æqualis diametro ejusdem circuli F H. Jam quia duo rectangula 20 21 & F C æquales habent bases 19 20 & A F (quia utraque basis, ex positis, æqualis est semicircumferentiæ rotæ) erunt ipsa rectangula inter se ut altitudines, scilicet ut diameter rotæ O Z ad F H diametrum circuli proprii. Item, rectangulum F C ad rectangulum 23 24 ejusdem altitudinis F H, ex constructione, se habet ut basis A F ad basim 22 23, idest ut semicircumferentia rotæ O S Z ad semicircumferentiam circuli proprii F I H, quia ex constructione æquales sunt ipsæ bases iisdem semicircumferentiis. Ut autem semicircumferentia O S Z ad semicircumferentiam F I H, ita diameter O Z ad diametrum F H: quare ut rectangulum F C ad rectangulum 23 24, ita diameter

O Z ad diametrum F H. Ut autem hæ diametri inter se, ita ostensum est rectangulum 20 21 ad rectangulum F C; ideoque eadem est ratio rectanguli 20 21 ad rectangulum F C, quæ ejusdem rectanguli F C ad rectangulum 23 24, quia utraque ratio eadem est rationi diametri O Z ad diametrum F H. Sed



rectangulum 20 21 duplum est rotæ O S Z M, ut ex Archimede in circuli dimensione deducitur, sicuti rectangulum 23 24 duplum est circuli F I H G; & rectangulum F C æquale est spatio proposito A V H L A, quia dimidium dimidio ostensum est æquale per præcedentem. Quoniam ergo continuè proportionalia ostensa sunt rectangula 20 21, F C, & 23 24, patet quoque proportionalia esse spatia ipsis æqualia, scilicet duplum rotæ O S Z M, spatium A V H 10 L A, & duplum circuli proprii F I H G, & medium esse spatium A V H 10 L A, ut proponebatur.

Corollarium.

HINC patet idem spatium A V H 10 L A in trochoide rotæ simplicis, duplum esse ejusdem rotæ; in trochoide autem rotæ prolatæ idem spatium majus esse quàm duplum rotæ; & tandem in trochoide rotæ contractæ, minus quam duplum ipsius rotæ. Nam in rotâ simplici circulus F H ipsi rotæ æqualis est; in prolatâ minor; in contractâ major: unde spatium quod inter duplum rotæ & duplum circuli F H mediam tenet proportionem, in simplici quidem æquale est duplo rotæ; in prolatâ majus quàm duplum; & in contractâ minus.

Propositio Sexta.

Quod à trochoide & ejus comite continetur spatium inter lineas principii & medii motûs, æquale est dimidio circuli eidem trochoidi proprii.

IN eâdem figurâ esto spatium A R H V A contentum à dimidio trochoidis A R H, & dimidio comitis ejus A V H inter lineas principii & medii motûs A C, F H. Dico hoc spatium æquale esse semicirculo F I H.

Ducatur enim quæcunque recta Y D parallela basi A L, secansque tam spatium quàm semicirculum; & portio quidem ipsius Y D intercepta intra spatium, sit Y 6; portio autem intercepta intra semicirculum, sit X D: manifestum est igitur ex Corollario secundo Propositionis secundæ, portiones ipsas Y 6 & X D esse æquales; quod idem in cæteris similiter ductis basi A L parallelis accidet. Itaque quoniam spatium & semicirculus sunt intra parallelas A F, C H & cujusvis aliûs rectæ eidem parallelæ, & interjacentis portiones in spatio & in semicirculo interceptæ sunt æquales, sequitur spatium ipsum A R H V A semicirculo F I H esse æquale: quod erat ostendendum.

Corollarium primum.

Potest simili argumento demonstrari spatium A R Y H I F A, quod à dimidiâ trochoide A R H, dimidiâ circumferentiâ H I F, & dimidiâ basi F A continetur, æquale esse spatio A V H F A, quod à dimidiâ comite A V H, diametro H F, & dimidiâ basi F A comprehenditur. Quia scilicet ipsa duo spatia sunt in iisdem parallelis A F, C H: & ductâ quâcunque eisdem intermediâ parallelâ Y D, ostensum est secundâ Propositione portionem Y X priori spatio interceptam, æqualem esse portioni 6 D altero spatio comprehensam. Quod idem quia parallelis omnibus interceptis accidit, patet ipsa spatia esse æqualia.

Corollarium secundum

Nec dissimili argumento probabitur spatium A R H C A, quod à dimidia trochoide A R H, rectâ H C, & rectâ C A continetur, æquale esse spatio A V H I F A, quod à dimidiâ comite A V H, semicircumferentiâ H I F, & dimidiâ basi F A comprehenditur; quamvis in rotâ contractâ portio quædam primi horum spatiorum sit ultrà rectam A C extrà rectangulum F C; & portio quædam secundi spatii contineatur intra semicirculum F I H; nihilo enim minus fiet demonstratio universalis, sed propter distinctionem rotarum multis verbis opus erit. At veritas hujus propositionis multò facilius ex præcedentibus elicitur in rotâ simplici & prolatâ. Nam quia quarta Propositione ostensum est spatium A V H C A æquale esse spatio A V H F A; item Propositione sexta spatium A R H V A ostensum est æquale semicirculo F I H: demptis æqualibus ab æqualibus in rotâ simplici & contractâ, patebit Propositio.

Corollarium tertium.

In rotâ simplici quatuor hæc spatia sunt æqualia A R H C A, A R H V A, A V H I F A & semicirculus F I H. Quia enim spatium comitis A V H 10 L A in rotâ simplici ostensum est esse duplum rotæ seu circuli F H, per Propositionem quartam erit dimidium ejusdem spatii, scilicet A V H F A, duplum semicirculi F I H; quare dempto semel ipso semicirculo, relinquitur spatium A V H I F A æquale eidem semicirculo. Cætera manifesta sunt.

Propositio Septima.

Cujusvis trochoidis spatium majus est circulo sibi proprio, & excessus mediam tenet proportionem inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

Manifesta est Propositio. Nam in eâdem figura, spatium trochoidis A R H 25 L A æquale est spatio suæ comitis A V H 10 L A, ac præterea duobus spatiis A R H V A, & L 25 H 10 L, quorum utrumque æquale est semicirculo F I H per sextam Propositionem; ideoque ambo simul ipsi integro circulo F I H G sunt æqualia; ideoque ipsum trochoidis spatium superat circulum sibi proprium spatio suæ comitis; quod quidem per Propositionem quintam mediam proportionem tenet inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

Corollarium.

Hinc palam est in rotâ simplici spatium trochoidis triplum esse ejusdem rotæ: quia ipsum continet circulum sibi proprium, hoc est ipsam rotam semel, ac præterea ejus duplum, scilicet spatium suæ comitis.

AD TROCHOIDEM, EJUSQUE SOLIDA,

Propositio Lemmatica Prima.

Esto circulus ACBD, cujus diameter AB; atque ex ejus semicircumferentiâ ACB sumatur arcus quicunque FG, sive is sit diametro AB conterminus, sive non; dividaturque arcus ille in quotlibet partes æquales in punctis F, L, M, C, N, G, &c. indefinitè, quemadmodum in doctrinâ indivisibilium fieri consuevit; ex quibus punctis demittantur in diametrum AB totidem rectæ perpendiculares FR, LS, MT, CE, NV, GX, &c, quæ erunt totidem sinus recti numero indefiniti & secundùm arcus æquales, vel æqualiter sese excedentes sumpti. Proponitur demonstrandum,

Omnes illos sinus indefinitè sumptos ad radium circuli toties sumptum sic se habere, ut recta RX, portio scilicet diametri inter extremos sinus intercepta, ad arcum propositum FG.

PRODUCANTUR enim sinus illi, donec alteri semicircumferentiæ ADB occurant in punctis H, O, P, D, Q, I, &c, & jungantur alternatim rectæ LH, MO, CP, ND, GQ, &c, occurrentes diametro AB in punctis Y, Z, 2, 3, 4, &c. & ductis omnium arcuum subtensis FL, LM, MC, CN; HO, OP, PD, DQ, &c. fiant triangula rèctangula similia HRY, LSY, OZS, MTZ, PT2, CE2, &c. ac tandem sumpto arcu A5, qui æqualis sit uni ex arcubus æqualibus, putà arcui FL; jungantur rectæ A5, & B5, ut fiat triangulum rectangulum A5B prædictis HRY, &c. simile. Itaque propter triangulorum similitudinem, facile est colligere omnes subtensas intermedias LO, MP, CD, NQ, &c. simul sumptas, unà cum dimidiis extremarum, putà unà cum HR, & GX ad rectam B5 eandem rationem habere, quam recta RX ad rectam A5. Atqui ex doctrinâ indivisibilium, & propter infinitam arcuum æqualium multitudinem & parvitatem, omnes prædictæ subtensæ simul sumptæ unà cum HR & GX, sumi possunt pro duplo omnium sinuum prædictorum indefinitè sumptorum, dempto eorum uno; sicuti recta B5 pro diametro seu duplo radii, & recta A5, pro arcu A5, sive FL. Ut ergo duplum omnium sinuum indefinitè sumptorum dempto uno, ad duplum radii; ita recta RX ad arcum FL; sumptisque duorum priorum terminorum dimidiis, erunt omnes sinus indefinitè sumpti, dempto uno, ad radium, ut RX ad FL. Verùm tot sunt sinus, dempto uno, quot arcus; ergò sumptis consequentium æquemultiplicibus in præcedenti proportione, erunt omnes sinus, dempto uno, ad radium toties sumptum, ut recta RX, ad omnes arcus minores; hoc est ad arcum FG. Sed in doctrina indivisibilium, unicus sinus additus ad alios numero indefinitos, nihil mutat; unde patet Propositio: quippe omnes sinus ad



radium toties sumptum eandem rationem habebunt, quàm recta R X ad arcum F G.

Corollarium primum.

Si ergo arcus assumptus F G, sit semicircumferentia ipsa, ad quam pertineat diameter A B, quæ hoc casu referet rectam R X; patet omnes sinus rectos ad semicircumferentiam pertinentes atque secundùm æquales arcus indefinite sumptos, esse ad radium toties sumptum, ut diameter ad semicircumferentiam. Hic autem in demonstratione, quia extremi sinus evanescunt, nihil demendum erit nec addendum: in universum tamen additio aut substractio finiti alicujus determinati, in doctrinâ indivisibilium, nihil mutat.

Corollarium secundum.

Si autem arcus F G sit quadrans diametro A B conterminus; tunc radius referet rectam R X; atque ita omnes sinus recti ad quadrantem pertinentes, & secundùm æquales arcus sumpti, erunt ad radium toties sumptum, ut radius ad quadrantem.

Corollarium tertium.

At si arcus F G sit quidem diametro A B conterminus, sed quadrante major aut minor; tunc recta R X erit sinus versus ipsius arcûs. Ut ergo omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus versus ad arcum.

Corollarium quartum.

Si arcus F G diametro A B non sit conterminus, idem autem ita constitutus sit, ut alterutrum punctorum R vel X sit centrum circuli, quo pacto alteruter sinuum extremorum F R vel G X erit radius; tunc recta R X æqualis erit sinui recto ejusdem arcûs: quapropter, ut omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus rectus arcûs, ad ipsum arcum.

Corollarium quintum.

In casu quarti Corollarii. Si centrum circuli sit inter puncta R, X; tunc recta R X componetur ex duobus sinibus rectis duarum portionum arcûs F G. Ut ergò se habet summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita summa duorum sinuum rectorum, qui ad duas portiones arcûs F G pertinent, se habebunt ad eundem arcum.

Corollarium sextum.

In eodem casu, si centrum cadat ultrà puncta R, X; tunc recta R X erit differentia duorum sinuum rectorum, vel etiam duorum sinuum versorum, qui sinus recti vel versi pertinebunt ad duos arcus quorum differentia erit arcus ipse F G. Itaque, ut summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita differentia illa sinuum ad ipsum arcum F G.

Corollarium septimum.

Quoniam autem omnes sinus recti differunt à radio toties sumpto, per omnes sinus versos; sumptis differentiis pro antecedentibus, erunt om-

nes sinus versi ad radium toties sumptum, ut differentia inter rectam RX, & arcum FG, ad ipsum arcum FG. Undè rursus sex Corollaria, sex præmissis respondentia facile deducentur, quorum quæ ad quartum pertinebit conclusio talis erit, Ut omnes sinus versi ad radium toties sumptum; ita differentia inter sinum rectum & ipsum arcum, ad ipsum eundem arcum.

Propositio Lemmatica Secunda.

Ex prædictis facile est examinandis sinuum Tabulis perutilem hanc Propositionem demonstrare.

Si in circumferentiâ circuli sumantur duo quicunque arcus FM, CG; & reliqua ponantur ut in primâ Propositione, omnes sinus recti ex arcu FM demissi, atque indefinitè sumpti, putà FR, LS, MT &c, ad omnes sinus rectos ex arcu CG demissos atque indefinitè sumptos, putà CE, NV, GX &c (modò tamen singuli ex minoribus arcubus FL, LM, &c, æquales sint singulis ex minoribus arcubus CN, NG, &c; sive multitudo horum æqualis sit multitudini illorum, sive non) erunt, ut recta RT extremis sinibus intercepta, ad rectam EX extremis sinibus interceptam.

Nam ex prima Propositione, Ut omnes sinus FR, LS, MT, &c, ad radium toties sumptum; ita recta RT ad arcum FM. Ut autem radius ille toties sumptus ad eundem radium toties sumptum, quot in majori arcu CG continentur minores, ita arcus integer FM ad arcum integrum CG: & ut radius toties sumptus quot in arcu CG continentur minores ad totidem sinus CE, NV, GX; ita arcus CG ad rectam EX: ergo ex æquo in quatuor terminis utrinque, Ut omnes sinus FR, LS, MT, & ad omnes sinus CE, NV, GX, &c. ita recta RT, ad rectam EX.

Corollarium primum.

Hinc licet Tabulas sinuum per quoscunque arcus commensurabiles examinare hâc ratione. Esto arcus FM triginta graduum, arcus vero CG quadraginta graduum; sintque in utroque arcu dati extremi sinus ex Tabulis, putà FR, MT, CE, GX; tum reliqui intermedii per singula minuta prima, vel etiam secunda, si libuerit: undè ex iisdem Tabulis dabuntur etiam rectæ RT, EX. Quoniam ergò numerus sinuum utrinque finitus est atque determinatus, ex summâ omnium priorum sinuum FR, LS, MT, &c. dematur dimidium extremorum FR, MT; tum ex summâ posteriorum CE, NV, GX, &c. dematur dimidium extremorum CE, GX; eritque tunc residuum priorum ad residuum posteriorum, ut recta RT, ad rectam EX; quod nisi ita reperiatur, erroneæ erunt Tabulæ. Erit tamen error ferendus, donec excessus aut defectus minor erit dimidio illius numeri qui exprimit multitudinem omnium sinuum in utroque arcu contentorum.



Corollarium secundum.

Quod si proponatur arcus F G, ita dividendus in duos arcus F M, M G, ut demissis sinubus rectis F R, L S, &c. quemadmodum supra, summa omnium sinuum indefinitè sumptorum qui ad arcum F M pertinebunt, ad summam omnium qui ad arcum M G pertinebunt, rationem habeant datam; dividenda erit recta R X in ratione datâ, putà in puncto T, atque ab eo excitanda perpendicularis T M usque ad circumferentiam; & factum erit, ut patet ex præmissâ secunda Propositione.

Hic multa theoremata & problemata præmissis similia proponi possent, quæ, quia facilia sunt, nihilque ad nostrum institutum conducunt, consultò omittimus.

Ad primum, sequens notandum.

In figurâ totæ atque trochoidis sequentis, ut pateat trilineum A M H G æquale esse quadrato semidiametri totæ A G, adverte rectam G H quadranti circumferentiæ æqualem esse, quæ recta G H si in quotcunque partes æquales indefinitè secetur, & à singulis sectionis punctis excitentur perpendiculares usque ad curvam A M H, exhibebunt ipsæ perpendiculares omnes sinus rectos quadrantis diametro contermini secundùm æquales arcus sumptos, ex naturâ trochoidis ejusdemque sociæ: quare per secundum Corollarium Propositionis primæ præmissæ, erunt illi omnes sinus simul sumpti ad radium A G toties sumptum, ut radius A G ad quadrantem G H. Ut autem summa illorum sinuum ad summam radiorum, ita trilineum A M H G ad rectangulum A H, ex doctrinâ indivisibilium; & ut radius A G ad quadrantem G H, ita quadratum ipsius A G ad rectangulum A H; ideoque ut trilineum A M H G ad rectangulum A H, ita quadratum A G ad idem rectangulum A H; unde trilineum ipsum A M H G æquale est quadrato semidiametri A G.

Quoniam autem trilineum reliquum A M H V est differentia inter trilineum A M H G & rectangulum A H; illud ergo A M H V æquale erit differentiæ inter quadratum A G & rectangulum A H; hoc est rectangulo contento sub semidiametro A G & differentiâ inter ipsam A G & quadrantem G H.

Ad secundum, sequens notandum.

Bilineum A M H Z A est manifestò differentia inter triangulum A G H Z A sive quadrantem totæ, & trilineum A M H G sive quadratum semidiametri A G.

De Rotâ simplici quædam notanda.

I. Quod sub semidiametro totæ & quadrante itineris centri ejusdem comprehenditur rectangulum, à sociâ trochoidis sic dividitur, ut portio major æqualis sit quadrato semidiametri rotæ; altera autem portio, eademque minor æqualis sit rectangulo contento sub semidiametro rotæ & differentiâ quæ est inter eandem semidiametrum & quadrantem circumferentiæ ipsius rotæ.

II. Quod à quartâ parte sociæ trochoidis & à rectâ quæ quartæ ipsius extrema conjungit clauditur spatium bilineum, æquale est differentiæ inter quadrantem rotæ & quadratum semidiametri ejusdem.

III. Propositâ trochoide ejusque sociâ, atque utriusque plano circa communem

munem basim circumvoluto, fit solidum trochoidis circa basim, quod quidem ad cylindrum cui inscribitur hâc ratione comparabitur.

Portio solidi comprehensa inter duas superficies, quarum altera à trochoide, altera ab ejus sociâ describitur, æqualis est cylindro cujus basis fit rota ipsa, altitudo autem æqualis circumferentiæ ipsius rotæ; quoniam idem æquale est annulo stricto ejusdem rotæ; ac proinde portio illa, totius cylindri circumscripti quarta pars est.

Portio solidi quæ unica superficie continetur, scilicet eâ quæ à sociâ trochoidis describitur, commodè conferri potest cum cylindro cujus axis fit idem cum axe solidi trochoidis; semidiameter verò basis fit semidiameter rotæ: reperietur autem talis portio æquari tali cylindro, ac prætereà quadruplo illi solido quod fit ex conversione majoris illius trilinei, quod primo notando diximus æquari quadrati semidiametri rotæ, si scilicet tale trilineum circa iret centri rotæ convertatur. At ultimus hic cylindrus totius cylindri circumscripti quarta pars est; solidum autem ex conversione trilinei, ejusdem totius trigesima secunda pars evadit; quia omnia quadrata ipsius trilinei æqualia sunt omnibus quadratis omnium sinuum rectorum quadrantis rotæ secundum æquales arcus sumptorum, quæ omnia quadrata quadrati semidiametri toties sumpti dimidia sunt; & hoc quadratum semidiametri toties sumptum est decima sexta pars omnium quadratorum parallelogrammi circumscripti circa trochoidem: hoc ergo solidum quater sumptum octavam totius cylindri circumscripti partem constituit: tandem ergo sequitur totum solidum trochoidis circa basim totius cylindri circumscripti quinque octavas partes constituere $\frac{5}{8}$.

Vel aliter hoc idem solidum quod à trochoidis sociâ circa ejusdem basim circumvolutâ describitur, ad totum cylindrum sic comparabitur. Quoniam planum, ex cujus conversione circa basim trochoidis fit tale solidum, ad rectangulum ipsi circumscriptum, ex cujus conversione fit totus cylindrus se habet ut summa omnium sinuum versorum secundùm æquales arcus sumptorum, ad diametrum toties sumptum; erit solidum ad cylindrum, ut summa omnium quadratorum ab omnibus sinibus versis secundùm æquales arcus sumptis, ad quadratum diametri toties sumptum. At hæc ratio est ut 3 ad 8, & additâ quartâ parte totius cylindri, hoc est annulo stricto de quo supra; fit ut totum solidum trochoidis circa basim totius cylindri circumscripti quinque octavas partes constituat, ut priùs.

Et quidem ejusmodi ratio $\frac{5}{8}$ de quâ jam egimus, geometricè vera est, ac prorsùs accurata. At circa solidum quod fit ex conversione trochoidis circa axem, eadem certitudo non contingit, nec potest, nisi inventa fuerit ratio diametri rotæ ad ejus circumferentiam.

Neque etiam movemur quod Evangelista Torricellius asserat tale solidum ad suum cylindrum (qui scilicet altitudinem habeat axem trochoidis, at diametrum basis basim ejusdem trochoidis) rationem eandem habere quam undecim ad octodecim; hæc enim ratio $\frac{11}{18}$ minor est quam vera.

Ad hoc autem admittatur rursùs socia trochoidis, cujus beneficio solidum trochoidis dividetur in alia duo solida. Primum duabus superficiebus curvis continebitur, eâ scilicet quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus sociâ describitur. Secundum vero, circulo basis & eâ superficie curva terminabitur, quæ à sociâ trochoidis describetur. Ratione autem initâ secundùm Geometriæ regulas, primum solidum continebit quartam partem totius cylindri, ac prætereà sphæram rotæ, quæ ad ipsum cylindrum se habet ut sexta pars quadrati diametri ad quadratum semicircumferentiæ: secundum autem solidum continebit ejusdem totius cylindri partem quartam, ac prætereà portionem quandam quæ juncta sphæræ rotæ ad totum cylindrum se ha-

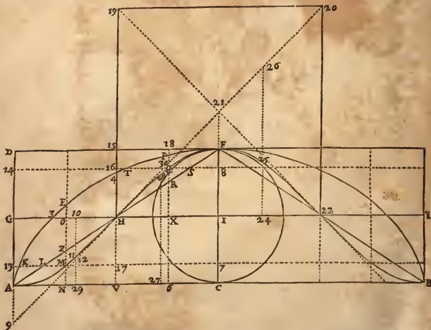
bebit, ut differentia inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{4}{3}$ quadrati radii, ad quadratum ipsius semicircumferentiæ.

Ponatur radius partium æqualium	3000000	
Erit semicircumferentia	9424778	paulo major.
Quadratum semicircumferentiæ	8882643960	paulo minus.
$\frac{1}{4}$ ejusdem quadrati	2220660990	minus.
$\frac{4}{3}$ quadrati diametri	4800000000	
Differentia hujus & quadrati semicircumf.	4082643960	
$\frac{1}{4}$ hujus differentiæ	1020660990 }	
Semiquadratum semicircumferentiæ	4441321980 }	
Summa duorum ultimorum numerorum	5461982970	

Erit numerator rationis solidi ad totum cylindrum, cujus denominator quadratum semicircumferentiæ.

Ratio Torricellii quadrati semicircumferentiæ 5428282420 $\frac{11}{18}$ seu $\frac{44}{72}$
ejusdem quadrati 5551652475 $\frac{5}{8}$ seu $\frac{45}{72}$

Patet ergo rationem majorem esse eâ quæ à Torricellio assignatur; minorem tamen eâ quæ suprà assignata est pro solido circa basim, quæ est $\frac{5}{8}$.



AK3E4TPFB est trochoides: AMHQFB est ejusdem trochoidis socia: G3OHXIY est iter centri: C7I8F est axis: ANV6CB est basis: F vertex: DB parallelogrammum circumscriptum; & ductæ sunt rectæ ALZHRSF, & BF: item ductæ sunt quæcunque rectæ NMZOE,

V H 4, & P Q R X 6 axi parallelæ; ac tandem quæcunque rectæ 13 K L M 7, & 14 T Q S 8 parallelæ basi.

Itaque pro solido circa basim, patet illud esse ad cylindrum circumscriptum, ut omnia quadrata NE, V 4, 6 P, CF, &c. in infinitum, ad totidem quadrata CF. Verum quadratum N E æquale est quadratis NM, ME, & duplo rectangulo N M E; sicuti quadratum V 4 æquale est quadratis V H, H 4, & duplo rectangulo V H 4; & quadratum 6 P æquale est quadratis 6 Q, Q P, & duplo rectangulo 6 Q P, & sic de reliquis. Ex illis autem, quadrata N M, V H, 6 Q, C F & similia, sunt quadrata omnium sinuum versorum secundùm æquales arcus sumptorum, quæ simul constituunt $\frac{3}{8}$ quadratorum diametri C F, & eadem constituunt rationem solidi sociæ trochoidis ad cylindrum: hæc ergo ratio est $\frac{3}{8}$. Reliqua quadrata M E, H 4, Q P, &c. unà cum duplis rectangulis N M E, V H 4, 6 Q P, &c. ad quadrata C F collata efficiunt rationem quam habet ad eundem cylindrum duplus annulus qui fit ex figurâ A M H Q F P 4 E A circa basim A B circumvolutâ, qui duplus annulus æqualis est annulo rotæ circa basim A B circumvolutæ, hoc est cylindro cujus basis sit rota, altitudo autem circumferentia rotæ, sive basis A B, qui cylindrus constituit $\frac{1}{2}$ totius cylindri. Quare solidum rotæ ad totum cylindrum constituit rationem $\frac{7}{8}$.

Aliter pro solido quod fit à trochoidis sociâ. Omnia quadrata N M, ab A usque ad V H æqualia sunt omnibus quadratis N O, O M, minùs omnibus duplis rectangulis N O M. Item ab V H usque ad C F omnia quadrata 6 Q æqualia sunt omnibus quadratis 6 X, X Q, plus omnibus duplis rectangulis 6 X Q: verum hæc dupla rectangula 6 X Q æqualia sunt illis N O M, omnia scilicet omnibus; existentibus ergo contrariis signis plùs & minùs, elidunt se invicem hæc & illa dupla rectangula, remanentque omnia quadrata N M, 6 Q, æqualia omnibus N O, O M, 6 X, X Q: horum autem N O, 6 X, sunt quadrata semidiametri, quæ constituunt quartam partem quadratorum totius diametri CF, sive $\frac{1}{4}$. At quadrata OM, XQ, sunt quadrata omnium sinuum rectorum secundùm æquales arcus sumptorum, quæ ideò constituunt dimidiam partem omnium quadratorum semidiametri, sive octavam partem quadratorum totius diametri. Patet ergo omnia quadrata N M, 6 Q, constituere $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{8}$, hoc est $\frac{3}{8}$ omnium quadratorum totius diametri C F, quæ eadem est ratio solidi quod fit à sociâ trochoidis, ad cylindrum eidem circumscriptum; putà ratio omnium quadratorum N M, 6 Q ad omnia quadrata C F.

Pro solido autem circa axem CF, admissâ rursùs sociâ trochoidis in eâdem figurâ, manifestum est illud dividi in alia duo solida, quorum alterum instar annuli stricti terminatur duabus superficiebus; eâ nempe quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus sociâ describitur: alterum autem solidum duabus etiam superficiebus comprehenditur; eâ nempe quæ à sociâ trochoidis gignitur, & eo circulo cujus semidiameter est recta C A.

Ac primum quidem solidum ad totum cylindrum collatum, eam habet rationem quam omnia simul quadrata M K, H 3, Q T, & similia, unà cum omnibus duplis rectangulis 7 M K, I H 3, 8 Q T, & similibus, ad quadratum A C toties sumptum. At dupla illa rectangula æquivalent semel omnibus rectangulis sub 7 13 sive C A & M K; sub I G sive C A & H 3; sub 8 14 sive C A & Q T; (propterea quod omnes rectæ 7 M, I H, 8 Q, &c. bis sumptæ æquivalent omnibus rectis 7 13, I G, 8 14, &c. semel sumptis, hoc est rectæ C A toties sumptæ) & hæc rectangula constituunt quartam partem quadrati C A toties sumpti, sicuti omnes rectæ M K, H 3, Q T constituunt $\frac{1}{4}$ rectæ C A toties sumptæ. Omnia autem quadrata M K, H 3, Q T, &c. ad quadratum C A toties sumptum eandem rationem habent quam sphæra rotæ ad totum cylindrum, hoc est, quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri rotæ ad quadra-

tum C A, five quam $\frac{1}{2}$ trilinei H Q F I seu A M H G quadrato I F seu I C æqualis, ad quadratum C A. Patet itaque primum solidum continere quartam partem totius cylindri, ac prætereà portionem aliquam quæ ad ipsum totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{1}{2}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ.

Jam ad secundum solidum. Manifestum quidem est illud ad totum cylindrum sic se habere ut omnia quadrata C A, 7 M, I H, 8 Q, &c. ad quadratum C A toties sumptum. Hæc autem ratio ut detegatur, adverte omnia illa quadrata æqualia esse omnibus quadratis D F, 14 Q, G H, 13 M, &c. quia singula singulis æqualia sunt ex natura trochoidis. Itaque si hæc & illa quadrata simul cum quadrato A C toties sumpto conferantur, res expedietur. Vide aliam demonstrationem secundi hujus solidi in Appendice quæ postea sequetur.

At hoc jam confectum est in universum in omni parallelogrammo quale est A C F D, ductâ primò utcunque lineâ qualis est socia A M H Q F constituente duo trilinea primæ divisionis A H F C, & F H A D: tum ductâ secundò rectâ V H 4 15, quæ & latera A C, D F, & parallelogrammum simul bifariam dividat, seceteque lineam ipsam A M H Q F utcunque in H, ita ut constituantur duo trilinea secundæ divisionis A M H V, & H Q F 15, & duo reliqua quadrilinea; si insuper intelligamus rectam A C dividi tertiò in quotcunque partes æquales in infinitum, ex doctrinâ indivisibilium, & per puncta divisionis ductas esse rectas ipsi C F parallelas, quæ parallelogrammum dividant in totidem partes æquales, sed & lineam A M H Q F in totidem punctis: constituent ergo ipsæ rectæ intra trilinea secundæ divisionis A M H V, H Q F 15, multa alia minora trilinea tertiæ divisionis; tot scilicet intra singula quot partes æquales in singulis rectis A V, F 15, continentur. Puta si rectâ A V tertiâ divisione in 1000 partes æquales dividatur, constituentur 1000 trilinea tertiæ divisionis quorum maximum erit ipsum A M H V; & omnia communem habebunt apicem A; ac minimum quidem trilineum assumet ex rectâ A V primam partem ad A terminatam; sequens autem assumet duas priores partes ad idem A terminatas; tertium tres; quartum quatuor, & sic eodem ordine usque ad maximum; eritque forsan unum ex intermediis AMN. Sic intra trilineum H Q F 15 totidem constituentur minora trilinea tertiæ divisionis quorum unum ex intermediis erit forsan F 18 Q. Prætereà ex rectis C A, 7 15, I G, 8 14, F D, &c. quædam portiones intra prædicta trilinea secundæ divisionis continentur: putà intra AMHV, portiones AV, M 17, &c. intrà H Q F 15 verò, portiones F 15, Q 16, &c. atque ex doctrinâ indivisibilium demonstratur horum omnium portionum quadrata simul sumpta dupla esse omnium prædictorum trilineorum tertiæ divisionis simul sumptorum.

Hoc posito, illud inquam jam confectum est ex doctrinâ indivisibilium, diviso triplici divisione quovis parallelogrammo C D, ut dictum est, sive prima divisio fiat in partes æquales, ut hic, sive non; omnia quadrata C A, 7 M, I H, 8 Q, D F, 14 Q, G H, 13 M, &c. quæ ad trilinea A H F C, & F H A D primæ divisionis pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum C A, 7 15, I G, 8 14, F D, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum C D; ac prætereà duplum omnium quadratorum portionum A V, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis A M H V, & H Q F 15; hoc est quadruplum omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis, quæ in iisdem A M H V, H Q F 15 comprehenduntur, ut supra. Omnia enim quadrata omnium portionum A V, M 17, F 15, Q 16, &c. simul sumpta dupla sunt omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis quæ in ipsis A M H V, H Q F 15 comprehenduntur: hoc autem ex doctrina indivisibilium demonstramus in secunda Propositione Appendicis quæ posteà sequetur.

tur. Et hoc quidem in universum in omni parallelogrammo: at hic in specie trilinea quidem AHFC, & FHAD primæ divisionis æqualia sunt; sicuti æqualia sunt quoque AMHV, & HQF15 secundæ divisionis; quare sumptis tantùm AHFC, & AMHV quæ constituunt dimidiam partem omnium quatuor; tunc quadrata CA, 7M, IH, 8Q, &c. quæ pertinent ad secundum solidum de quo agitur, constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti, ac præterea quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo AMHV comprehensorum.

Si itaque hæc quarta pars cum eâ quartâ quæ ex primo solido inventa est, conjungatur, habebimus solidum rotæ constituere dimidium sui cylindri, ac præterea duas portiones, quarum altera ad eundem cylindrum sic se habet ut $\frac{1}{2}$ trilinei AMHG ad quadratum AC, ut supra; altera autem ad eundem cylindrum sic se habet ut quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in AMHV comprehensorum, ad idem quadratum AC toties sumptum quot sunt rectæ CA, 7M, IH, 8Q, &c.

Superest ergò ut ostendamus duas illas portiones simul junctas, ad totum cylindrum eandem rationem habere, quam differentiam inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{1}{2}$ quadrati radii, ad quadratum semicircumferentiæ: & quidem de $\frac{1}{2}$ trilinei AMHG nulla erit difficultas; de quadruplo autem trilineorum, sic patebit.

Producatur recta DGA versus A usque in 9, ita ut recta G9, sit æqualis rectæ GH, hoc est quadranti circumferentiæ rotæ; & jungatur recta 9H, hæc cadet extra trilineum AMHG, & cum curvâ AMH constituet ad punctum H angulum minorem omni angulo rectilineo, etiamsi producta secet eandem curvam AMHQF in ipso puncto H, in quo, tali sectione, constituentur duo anguli ad verticem oppositi æquales, ac singuli minores quovis angulo rectilineo; quod tamen hic parum refert; sufficit enim quod recta 9H cadat extra trilineum AMHG; hoc autem sic ostendimus.

In ipsâ 9H sumatur quodvis punctum 12 ex quo ducatur recta 12 10 parallela ipsi AG atque occurrens rectæ GH in puncto 10, curvæ autem AMH occurrat ipsa 12 10 producta, si opus sit, in puncto 11; itaque recta 10 12 æqualis est rectæ 10H, recta autem 10H æqualis est arcui cuidam quadrante minori, cujus sinus rectus erit recta 10 11 ex naturâ sociæ trochoidis; quare 10 11 minor est quàm 10H sive quàm 10 12: unde punctum 12 est extra trilineum AMHG, quod idem de omnibus punctis rectæ 9H ostendetur. Quoniam autem trilineum HQF15 secundæ divisionis, & omnia minora trilinea tertiæ divisionis in eo contenta, trilineo AMHV secundæ divisionis, & omnibus trilineis tertiæ divisionis in eo contentis singula singulis ordine sumptis, æqualia sunt: quod de his ostendetur, de illis quoque verum erit.

Sumatur ergo QF18 trilineum quodvis tertiæ divisionis assumens ex rectâ F15, rectam F18 quotcunque partium æqualium ex iis in quas divisæ sunt rectæ CA, FD; tum rectæ F18 sumatur æqualis ex HG recta H10, ducatur que recta 10 11 12, ut supra. Est igitur F18, sive H10, sive 10 12 æqualis cuidam arcui cujus sinus versus est 18Q; sinus autem rectus est 10 11, ex naturâ sociæ trochoidis; quare recta 11 12 est differentia inter arcum & ejusdem arcûs sinum rectum: & trilineum quidem QF18 ad parallelogrammum FX sic se habet, ut omnes sinus versi omnium arcuum æqualium minorum tertiæ divisionis in arcu F18 contentorum, ad radium IF toties sumptum, quot in arcu F18 continentur arcus minores ejusdem tertiæ divisionis, ex doctrinâ indivisibilium. Ut autem omnes illi sinus versi ad omnes illos radios, ita recta 11 12 differentia arcus F18 & sui sinus recti, ad arcum F18, ex Corollario septimo Propositionis præmissæ; quia recta F18 refert arcum, cujus sinus rectus est 10 11, & differentia inter hunc sinum & ipsum arcum F18,

five 10 12, est 11 12; atque insuper altet sinuum ab extremitatibus arcûs F 18 cadentium, puta sinus F I cadit in centrum: quare trilineum QF 18 est ad parallelogrammum F X, ut recta 11 12 ad rectam F 18; sed parallelogrammum F X ad parallelogrammum F H se habet ut recta F 18 ad rectam F 15: quare ex æquo, ut trilineum QF 18 ad parallelogrammum FH, ita recta 11 12 ad quadrantem F 15 sive G H.

Cùm ergo idem de singulis trilineis tertiæ divisionis verum sit, quod de QF 18 jam demonstratum est; sequitur omnia illa trilinea simul sumpta ad parallelogrammum F H toties sumptum sic se habere, ut omnes differentiæ inter omnes sinus rectos secundum æquales arcus sumptos, & suos arcus, ad quadrantem G 9 toties sumptum. Ut autem hæ omnes differentiæ ad omnes quadrantes, ita trilineum A M H 9, quod differentias illas omnes continet, ad quadratum quadrantis G 9, quod omnes illos quadrantes continet, ex doctrinâ indivisibilium: quare argumentis ex arte institutis quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo H Q F 15, sive in trilineo A M H V contentorum, erit ad octuplum parallelogrammi F H toties sumpti quot sunt trilinea in A M H V, ut duplum trilinei A M H 9 ad quadruplum quadrati quadrantis G 9, sive ut duplum trilinei ipsius A M H 9 ad quadratum semicircumferentiæ A C. At octuplum prædictum æquale est omnibus quadratis C A, 7 13, I G, 8 14, &c. ex doctrina indivisibilium; quia tam ex octuplo illo, quam ex omnibus his quadratis, constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempe quod basim habet parallelogrammum AF, altitudinem autem rectam A C: sive, quod idem est, quod basim habet quadratum rectæ A C, altitudinem autem rectam C F.

Itaque quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo A M H V contentorum, ad omnia quadrata C A, 7 13, I G, 8 14, &c. sic se habet, ut duplum trilinei AMH 9 ad quadratum A C. Ut autem quadruplum illud ad omnia quadrata semicircumferentiarum, ita erat una ex duabus portionibus reliquis solidi rotæ, ad totum cylindrum. Ut ergo talis portio ad cylindrum, ita duplum trilinei A M H 9 ad quadratum A C; sed & altera portio erat ad eundem totum cylindrum ut $\frac{1}{2}$ trilinei A M H G unà cum duplo trilinei A M H 9 ad quadratum A C; sed $\frac{1}{2}$ trilinei A M H G unà cum duplo trilinei AMH 9 simul differunt à quadrato quadrantis G 9 tanto spatio quantum est $\frac{1}{2}$ ipsius trilinei A M H G; (patet, ex eo quod triangulum H G 9 sit dimidium ipsius quadrati G 9.) constat ergo propositum, nempe duas illas portiones reliquas ad totum cylindrum sic se habere, ut differentia inter quadratum quadrantis & $\frac{1}{2}$ trilinei A M H G, quod quadrato radii æquale est, ad quadratum semicircumferentiæ.

Nota.

EX iis quæ exposita sunt de rotâ simplici, atque solidis quæ ab illius trochoide gignuntur, non difficile erit rotas alias tam prolatas quàm contractas contemplari: eadem enim in illis quàm in simplici valebit methodus, eademque vigebunt argumenta, sed conclusiones erunt diversæ propter diversas rationes altitudinis cujuscumque trochoidis ad suam basim. Nos tamen iis præmissis nec absolutis, sed rudi tantum minervâ exaratis ne memoriâ exciderent, supersedebimus, donec operi extremam manum imponere per tempus licebit. Tunc autem & centra gravitatis tam plani trochoidis, quam ejus sociæ, examini subjicientur, ac detegentur.

APPENDIX

Ad solidum trochoidis circa axem conversæ, continens aliam demonstrationem secundi solidi duorum illorum ex quibus totum componitur, putà illius quod à sociâ circa axem conversâ describitur.

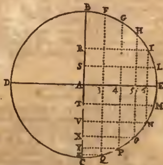
AD hoc autem præmissis duabus Propositionibus Lemmaticis, illarumque Corollariis, accedant quæ sequuntur.

Corollario quidem septimo præcedenti demonstratum est in arcubus quadrante non majoribus, sic esse omnes sinus versos ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum & ipsius arcum ad ipsum eundem arcum. Hic verò demonstrabimus idem quoque verum esse de arcubus quadrante majoribus.

PROPOSITIO PRIMA.

Esto circulus cujus centrum A, diametri BC, DE ad rectos angulos sese secantes, ita ut BEC sit semicircumferentia divisa in duos quadrantes BE, CE, qui in quotlibet arcus æquales indefinitè dividantur in punctis B, F, G, H, I, L, E, M, N, O, P, Q, C, &c. atque sumatur arcus quivis IEC quadrante major, & à punctis divisionis illius demittantur in diametrum BC perpendiculares IR, LS, EA, MT, NV, OX, PY, QZ, &c. ut habeantur omnes sinus versi CZ, CY, CX, CV, CT, CA, CS, CR, &c. ad arcum IC pertinentes: sinus autem rectus arcûs IEC erit IR. Dico ergò sic esse omnes illos sinus versos ad radium AB toties sumptum, ut differentia inter sinum RI & suum arcum IEC ad ipsum eundem arcum.

DEMITTANTUR in diametrum DE sinus recti F3, G4, H5, I6, &c. qui pertinent ad divisiones arcûs BI quadrante minoris ac semicircumferentiam perficientis. Itaque ex quarto Corollario, ut omnes sinus recti BA, F3, G4, H5, I6, &c. ad radium toties sumptum, ita sinus IR ad arcum IB. Ut autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IB, ad ipsum radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ita arcus IB ad ipsum arcum IC: ergo ex æquo in tribus terminis, ut summa sinuum BA, F3, G4, H5, I6, &c. ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ita sinus IR ad arcum IC; & sumptis differentiis pro antecedentibus, ut differentia inter summam sinuum rectorum BA, F3, G4, H5, I6, &c. & radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ad ipsum radium toties sumptum; ita differentia inter sinum rectum IR & suum arcum majorem IC, ad ipsum eundem arcum. Verùm differentia illa summæ sinuum & summæ radiorum æqualis est summæ sinuum versorum prædictorum, ut statim demonstrabimus: itaque constat Propositio.



Lemma.

Quod autem assumptum est, hoc ita demonstratur. Ex quadrante EC sumatur arcus NC æqualis arcui IB, & demittantur in diametrum DE sinus recti Q3, P4, O5, N6, &c. qui æquales erunt ipsis F3, G4, H5, I6, &c. illis autem ex radio AC toties demptis, remanent manifestò sinus versi CZ, CY, CX, CV : superest autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IN; sed hic perficit sinus versos reliquos CT, CA, CS, CR : nam radius bis sumptus perficit duos sinus versos CV, CR; & idem radius rursus bis sumptus perficit duos sinus versos CT, CS; sinus autem versus CA est idem radius. Reliqua patent. Nec aliquem moveat quod idem sinus versus CV bis assumptus est : ille enim cùm sit magnitudo quædam determinata, semel tantum, plusquàm par est, sumpta, atque indefinitis numero magnitudinibus addita, nihil officit in doctrinâ indivisibilium.

Corollarium.

Quoniam ergo in omni arcu, omnes sinus versi sunt ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum ipsius arcus, & arcum eundem ad ipsum arcum; ut autem radius toties sumptus ad eundem radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ: ita arcus propositus ad ipsam semicircumferentiam. Patet ex æquo in tribus terminis omnes sinus versos arcûs propositi, ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ, eandem rationem habere, quam differentia inter sinum rectum arcûs propositi & ipsum arcum, ad integram semicircumferentiam.

Propositio Secunda.

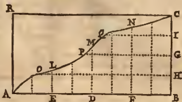
Esto trilineum quodcunque ABC, cujus duo ex lateribus puta AB, BC, sint lineæ rectæ, tertium verò AC utcunque rectum vel curvum; modo ipsum tale sit ut procedendo secundum ipsum à puncto A ad punctum C, idem fiat continuò propius ac propius rectæ BC; remotius autem ac remotius à rectâ AB : ut sic nec recta AB, nec BC, nec quavis iisdem parallela, ipsi lineæ AC duobus in punctis occurrere possit. Perficiatur autem parallelogrammum ABCR; atque intelligatur converti tam parallelogrammum quam trilineum circa unum latus, putâ BC.

Manifestum est à parallelogrammo describi vel cylindrum, vel cylindraceum cylindro æqualem; à trilineo autem solidum quoddam: atque si latus ipsum BC dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis H, G, I, &c. per quæ ducantur rectæ HO, GP, IQ, &c. ipsi AB parallelæ atque latere AC trilinei terminatæ, manifestum est quoque solidum trilinei ad cylindrum sic se habere ut omnia quadrata rectaium BA, HO, GP, IQ, &c. ad trilineum pertinentium, ad quadratum BA toties sumptum. Ut autem in quâvis tali figurâ horum solidorum comparatio rectè institui possit, proderit sæpissimè hoc elementum ex doctrinâ indivisibilium annotasse.

Alterum latus rectum AB dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis E, D, F, &c. quæ quidem partes singulæ æquales sint singulis BH, HG, &c. ducanturque totidem rectæ EL, DM, FN, &c. lateri BC parallelæ atque latere AC trilinei terminatæ, quæ quidem trilineum ipsum

ipsum divident, constituentque intra illud alia trilinea numero indefinita atque ad communem verticem A constituta, putà AEL, ADM, AFN, ABC, &c.

Nec est quod quis dicat rectas AB, BC longitudine posse esse incommensurabiles; atque ita non posse partes unius æquales esse partibus alterius: nam præterquamquod in divisione indefinitâ hæc objectio locum non habet; illud præterea manifestum est, posse in utrâque partes omnes esse æquales, præter extremam quandam portionem alterius illarum; quæ quidem erit definita quædam portio, quâ additâ aut detractâ, vel additis aut detractis, quæ ab illâ dependent magnitudinibus omninò definitis, nullo modo mutatur indefinitarum ratio, ex doctrinâ indivisibilium.



Dico ergo omnia hæc trilinea in trilineo ABC constituta, simul sumpta omnium quadratorum BA, HO, GP, IQ, &c. simul sumptorum dimidiam partem constituere. Intelligatur enim ipsa omnia quadrata erecta super plano trilinei; quo pacto ex doctrinâ indivisibilium illa constituent solidum quoddam quinque figuris comprehensum, quarum prima erit ipsum trilineum; secunda est trilineum cujus basis ipsi rectæ AB parallela est & opposita, & vertex punctum ipsum C; tertia autem erit quadratum super rectâ BA erectum; quarta super rectâ BC erecta, erit trilineum ipsi ABC simile & æquale; quinta tandem super lineâ AC erecta, erit utcunque plana vel curva, prout ipsa AC recta erit vel curva. Intelligatur quoque planum quoddam secans planum trilinei ABC secundùm rectam BC, atque ad idem inclinatum secundùm angulum semirectum versùs A: hoc ergo planum sic inclinatum dividet bifariam omnia & singula quadrata erecta ut suprà; unde & idem planum dividet quoque bifariam solidum ex illis quadratis constans, eruntque partes duo solida instar pyramidum, singula quatuor superficiebus contenta: horum quod præcipuè nobis utile est, basim habet trilineum ABC, tres autem reliquæ superficies illius sunt, triangulum super rectâ AB erectum & dimidium quadrati constituens; figura suprà lineâ AC erecta; ac figura ea quæ ex plano inclinato secante constituitur: tale autem solidum manifesto constat ex dimidiis omnium quadratorum erectorum, ex doctrinâ indivisibilium; estque vertex illius punctum extremum lateris illius quadrati, quod quidem latus ex puncto A erigitur, ipsique perpendiculariter imminet.

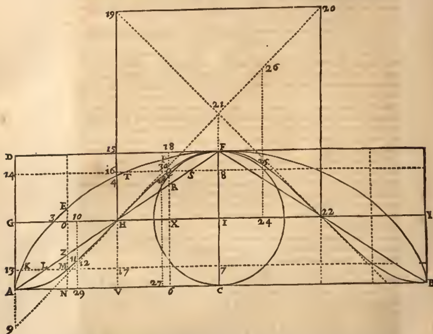
Ostendamus ergo tale solidum constare etiam ex omnibus trilineis AEL, ADM, AFN; ABC, &c. vel ex aliis his iisdem æqualibus; sic enim patebit omnia hæc trilinea dimidiis omnium quadratorum erectorum esse æqualia, quandoquidem tam ab his trilineis quàm ab illis quadratorum dimidiis idem solidum constituetur, ex doctrinâ indivisibilium. Ad hoc autem altitudo talis solidi, puta recta illa quæ ex puncto A perpendiculariter ad planum ABC erecta, ad solidi verticem pertinet, estque rectæ AB æqualis, eodem modo indefinitè dividatur quo divisa est ipsa AB, ut partes partibus multitudine & magnitudine sint æquales, atque per puncta omnia talis divisionis ducantur plana plano ABC parallela, quæ manifestò secabunt solidum propositum inter verticem & basim, & tali sectione constituent trilinea prædictis AEL, ADM, &c. singula singulis similia, æqualia & parallela; ex quibus omnibus trilineis indefinitè sumptis secundùm doctrinam indivisibi-

lium constituitur prædictum solidum quasi pyramidale, ut propositum est: reliqua patent.

PROPOSITIO TERTIA.

Jam ut ad solidum sociæ trochoidis circa axem conversæ veniamus. In figurâ trochoidis superiùs expositâ, intelligatur socia A M H Q F 22 B circa axem C F conversa. Dico solidum ex tali conversione ortum ad cylindrum cui inscribitur eandem rationem habere quam dimidium quadrati semicircumferentiæ rotæ dempto dimidio quadrati diametri, ad integrum quadratum semicircumferentiæ.

NAM sicuti socia illa secat bifariam rectam G I in puncto H, sic eadem bifariam quoque secat rectam I Y; esto in puncto 22: undè recta H 22 æqualis erit dimidio itineris centri G I, hoc est æqualis semicircumferentiæ



totæ. Super ipsâ H 22 ad partes verticis F, constituatur quadratum H 22 20.19, cujus diametri ducantur H 20, 22 19 secantes se invicem in centro quadrati, quod centrum sit 21 in axe C I F producto supra verticem F usque ad ipsum punctum 21. Patet autem diametrum ipsam quadrati H 20 esse rectam 9 H productam, ipsamque cadere extrà curvam sive sociam H Q F, propter easdem rationes quibus probavimus suprà, rectam H 9 cadere extrà curvam H M A.

Jam utraque rectarum A C, C F in partes æquales indefinitè dividatur,

& per puncta divisionis rectæ A C ducantur rectæ ipsi C F parallelæ, putà N M, V H, 6 Q, &c. usque ad sociam A M H Q F; per puncta autem divisionis rectæ C F ducantur rectæ parallelæ ipsi A C, putà 7 M, I H, 8 Q, &c. usque ad eandem sociam. Quo posito solidum sociæ de quo agitur erit ad cylindrum integrum cui inscribitur, ut omnia quadrata C A, 7 M, I H, 8 Q, &c. ad quadratum C A toties sumptum: atqui illa omnia quadrata dupla sunt omnium trilineorum A N M, A V H, A 6 Q, A C F, &c. per secundam Propositionem hujus Appendicis, quare solidum illud ad cylindrum se habet ut omnia hæc trilinea bis sumpta ad quadratum C A sumptum ut jam dictum est, pura secundùm numerum rectarum CA, 7M, IH, 8Q, &c. ex divisione diametri C F in partes æquales numero indefinitas, ortarum: hoc autem quadratum semicircumferentiæ toties sumptum æquale est rectangulo A F toties sumpto quot sunt partes æquales in rectâ A C: quia tam ex tali quadrato C F toties sumpto quot sunt partes in rectâ C F, quàm ex rectangulo A F toties sumpto quot sunt partes in rectâ A C constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempe quod basim habet rectangulum ipsum A F, altitudinem autem rectam A C; sive quod idem est, illud quod basim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam C F, ex doctrinâ indivisibilium.

Itaque solidum sociæ trochoidis sic se habebit ad suum cylindrum, ut omnia trilinea prædicta bis sumpta ad rectangulum AF toties sumptum quot sunt partes in rectâ A C, hoc est toties sumptum quot sunt omnia trilinea prædicta semel sumpta. Verum rectangulum AF duplum est rectanguli AI. Sumpto igitur hoc rectangulo AI bis toties, quoties rectangulum AF, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea prædicta bis sumpta ad rectangulum A I toties bis sumptum; seu, sumptis tantum semel trilineis ac semel rectangulis, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea semel sumpta ad rectangulum A I toties sumptum. Est autem triangulum H 20 22 dimidium quadrati semicircumferentiæ H 22, & bilineum H Q F 22 est dimidium quadrati diametri C F, quandoquidem hujus bilinei dimidia pars, nempe trilineum H Q F I, sive ipsi æquale A M H G ostensum est suprà æquale esse quadrato semidiametri A G vel C I; dempto autem hoc bilineo ex illo triangulo, remanet trilineum H F 22 20. Eò itaque res deducitur ut ostendamus omnia trilinea prædicta ad rectangulum A I toties sumptum sic se habere ut trilineum H F 22 20 ad quadratum integrum H 20; sic enim demum patebit solidum sociæ trochoidis esse ad suum cylindrum, ut dimidium quadrati semicircumferentiæ dempto dimidio quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ.

Ad hoc autem assumatur quodlibet ex ipsis trilineis, puta A 29 11, assumens ex rectâ A C portionem A 29 forsan quadrante minorem, cui ex rectâ H 22 sumatur æqualis portio H X; ducaturque recta X Q 30 secans sociam trochoidis in puncto Q, rectam autem H 20 in puncto 30. Itaque ex naturâ trochoidis ejusque sociæ A 29 & H X exhibebunt arcus æquales: & arcûs quidem A 29 sinus versus erit 29 11, arcûs autem H X sinus rectus erit X Q: cúmque recta X 30 æqualis sit arcui H X, erit recta Q 30 differentia inter sinum rectum X Q & suum arcum X 30. Unde ex Corollario primæ Propositionis hujus Appendicis, erunt omnes sinus versi arcûs H X sive A 29 ad radium toties sumptum, quot sunt divisiones in semicircumferentiâ A C, sive H 22, ut ipsa differentia Q 30 ad semicircumferentiam H 22, sive 22 20: atqui omnes sinus versi arcûs A 29 constituunt trilineum A 29 11, & radius A G toties sumptus quot sunt divisiones in A C constituit rectangulum A I ex doctrinâ indivisibilium. Ut ergò trilineum A 29 11 ad rectangulum A I, ita recta Q 30 ad rectam 22 20.

De reliquis trilineis eadem erit ratio; ut si sumatur trilineum AVH assumens ex rectâ AC quadrantem circumferentiæ AV; posito etiam quadrante HI cujus sinus rectus sit IF, differentia autem inter ipsum & suum arcum sit F 21; probabitur esse trilineum AVH ad rectangulum AI, ut recta F 21 ad rectam 22 20. Pari ratione, si sumatur trilineum A 27 28 assumens ex AC rectam A 27 quadrante majorem, positâ rectâ H 24 æquali ipsi A 27, ductâque rectâ 24 25 26 parallelâ ipsi CF ac secante sociam quidem in puncto 25, rectam autem H 20 in puncto 26, ut recta 24 25 sit sinus rectus arcûs H 24 sive ipsi æqualis 24 26, recta autem 25 26 sit differentia ejusdem sinus & sui arcûs; probabitur esse trilineum A 27 28 ad rectangulum AI, ut recta 25 26 ad rectam 22 20; atque ita de omnibus trilineis.

Itaque omnia trilinea simul sumpta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habent ut omnes differentiæ sinuum rectorum & suorum arcuum Q 30, F 21, 25 26, &c. ad semicircumferentiam 22 20 toties sumptam: omnes autem illæ differentiæ constituunt trilineum HF 22 20; & semicircumferentia toties sumpta constituit quadratum semicircunferentiæ, ex doctrinâ indivisibilium: unde patet Propositio.

Corollarium.

Recidit autem hæc ratio cum eâ quæ suprà exposita est: siquidem trilineum HF 22 20 continet quadrantem totius quadrati H 20, ac præterea duplum trilinei HQF 21, hoc est duplum trilinei HMA 9: undè resumptis iis quæ ex primo solido oriuntur, putà quartâ totius parte, ac præterea eâ portione quæ ad totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{1}{2}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ, habebimus duos totius quadrantes, hoc est dimidiam partem totius, ac insuper duas portiones, quarum altera ad totum sic se hadebit ut $\frac{1}{2}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ; reliqua autem ad totum sic se habebit ut duplum trilinei HQF 21, sive HMA 9 ad idem quadratum semicircumferentiæ, ut suprà.

Ut ergò unicâ enunciatione explicemus rationem totius solidi trochoidis circà axem conversæ, ad suum cylindrum; sume duos quadrantes integros quadrati H 20, puta 20 21 22, & 19 21 H; tum ex tertio quadrante H 21 22 sume duplum trilinei HQF 21, hoc est totum trilineum HQF 25 22 21 H, ac præterea $\frac{1}{2}$ quadrati semidiametri, hoc est $\frac{1}{2}$ trilinei HQF 1 sive $\frac{1}{2}$ bilinei HQF 22; tumque hæc omnia spatia simul sumpta confer cum toto quadrato H 20; atque ita satis eleganter hoc concludes. Ut se habent $\frac{1}{2}$ quadrati semicircumferentiæ, demptâ tertiâ parte quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ; ita solidum trochoidis circa axem conversæ se habet ad suum cylindrum cui inscribitur.

Propositio Quarta.

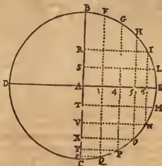
Quoniam supra in demonstrando solido trochoidis circa basim conversæ hoc tanquam verum sumpsimus, omnia quadrata omnium sinuum versorum semicircumferentiæ secundùm æquales arcus sumptorum constituere $\frac{1}{2}$ omnium quadratorum diametri toties sumpti: atque etiam omnia quadrata omnium sinuum rectorum semicircumferentiæ secundùm æquales arcus sumptorum constituere $\frac{1}{2}$ omnium quadratorum ejusdem diametri; lubet hìc utrumque assumptum unicâ demonstratione ostendere.

In figurâ primæ Propositionis hujus Appendicis, quadratum diametri BC æquale est quadratis CZ, ZB, & duplo rectangulo CZB, sive duplo quadrato ZQ. Similiter idem quadratum BC æquale est quadratis CY, YB & duplo rectangulo CYB sive duplo quadrato YP: atque ita de reliquis punctis divisionis diametri puta de punctis X, V, T, A, S, R, &c. at rectæ

CZ,

CZ, CY, CX, CV, &c. sunt omnes sinus versi: item rectæ ZB, YB, XB, VB, &c. sunt quoque omnes sinus versi qui prædictis singuli singulis, sed ordine converso sunt æquales; & horum quadrata singula singulis sunt æqualia; atque ita habemus duplum quadratorum omnium sinuum versorum. Sed & rectæ ZQ, YP, XO, VN, &c. per omnes arcus æquales semicircumferentiæ sunt omnes sinus recti; unde habemus duplum quadratorum omnium sinuum rectorum. Omnia ergo quadrata diametri æqualia sunt duplo omnium quadratorum sinuum versorum unà cum duplo omnium quadratorum sinuum rectorum.

Ducantur jam radii AQ, AP, AO, AN, &c. Itaque quadratum radii AQ æquale est quadrato sinus recti QZ unà cum quadrato AZ, sive unà cum quadrato sinus complementi Q 3: similiter quadratum radii AP æquale est quadrato sinus recti PY unà cum quadrato sinus complementi P 4, atque ita de reliquis: quo pacto habemus omnia quadrata radii æqualia esse omnibus quadratis sinuum rectorum unà cum omnibus quadratis sinuum complementorum. Verum omnes sinus recti omnibus sinibus complementorum singuli singulis sunt æquales, si minores cum minoribus & majores cum majoribus conferantur, quia sumuntur secundùm arcus æquales ex hypothesi: quare omnia quadrata radii æqualia sunt duplis quadratorum omnium sinuum rectorum. Omnia autem quadrata diametri quadrupla sunt omnium quadratorum radii; ipsa ergo omnia quadrata diametri quadrupla sunt dupli quadratorum omnium sinuum rectorum: unde omnia quadrata sinuum rectorum semel sumpta, omnium quadratorum diametri octavam partem constituunt.



Quoniam ergo duplum omnium quadratorum sinuum rectorum constituit duas octavas partes omnium quadratorum diametri, relinquitur ut duplum quadratorum omnium sinuum versorum constituat sex octavas partes, atque ut ipsa quadrata omnium sinuum versorum semel sumpta tres octavas partes constituant ipsorum omnium diametri quadratorum, ut proponitur.

Propositio quinta.

Sed & illud demonstrare lubet, quod pro solido socia trochoidis circa axem conversa, priori modo demonstrando, assumptum est tanquam quid confectum ex doctrinâ indivisibilium. Omnia quadrata CA, 7M, IH, 8Q, DF, 14Q, GH, 13M, &c. quæ ad trilinea primæ divisionis AHFC, & FHAD pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis AMHV, & HQF 15. *Vide figur. pag. 270.*

Illud autem statim conficitur, ex eo quod ductâ quâcunque rectâ 7 13 ex iis quæ rectæ AC parallelæ sunt, quæ secet trilinea primæ divisionis, ita ut ejus rectæ portio 7M in uno trilineo, altera autem portio 13M in altero contineatur; secet autem ipsa 7 13 lineam primæ divisionis AMHF in puncto

M, & rectam secundæ divisionis V 15 in puncto 17: manifestum est, ex Geometriâ communi, ambo quadrata portionum 7 M, M 13 tantò majora esse dimidio quadrati totius 7 13, quantum est duplum quadrati portionis M 17, quæ ad trilineum secundæ divisionis A M H V pertinet: quod cùm de omnibus aliis rectis verum sit, patet Propositio.

DE LONGITUDINE TROCHOIDIS,

PROPOSITIO.

Cujuscunque assignatæ portioni trochoidis primariæ, æqualem rectam exhibere, atque exinde toti trochoidi.

QUID sit trochoides, quid rota ex qua illa nascitur, quæ sint tres illius præcipuæ species, & quomodo inter se distinguantur, hic notum esse supponimus.

Utemur argumento ex motuum compositione desumpto, quo ex æquali moti puncti velocitate æquales describi lineas, ex inæquali inæquales, cæteris paribus necesse est, atque è converso.

Etsi verò communiter rota progrediendo uniformi motu per iter rectum in plano, simul circa centrum suum convertatur, tamen hic intelligemus rotam ipsam trahi tantùm recto itinere, non autem converti; sed punctum trochoidem describens, ferri secundùm circumferentiam rotæ motu uniformi, quod eòdem quò suprà recidit, & Geometriæ aptius esse visum est.

F punctum contactus tam F G rectæ tangentis rotam, quàm F H tangentis trochoidem primariam, cujus dimidium est A F D, initium A, recta A I B dimidium basis, B D axis, A E C diameter rotæ initio motûs, C H D linea verticis.

I X H N rota est, cujus centrum L à principio motûs jam percurrit rectam E L æqualem rectæ A I, existente diametro rotæ in hac positione rectâ I L H; unde ipsa recta E L vel A I arcui I F æqualis est.

G F, G H rotam tangentes æquales sunt; unde ductâ chordâ rotæ F R ipsi A I parallelâ, & sectâ bifariam in S à diametro I L H; ductâ etiam H V ipsi F G tangenti parallela, ac secante ipsam F R productam, si opus erit, in V; erit parallelogrammum F G H V rhombus, cujus anguli G F V, G H V bifariam secabuntur à diagonali F H tangente trochoidem.

M punctum est in quo arcus rotæ F M I bifariam secatur, & à quo ducitur chorda rotæ M Q P ipsi A I parallela, secans diametrum I H in Q; sed & ductâ chordâ M R secante eandem I H in T, erunt rectæ Q I, Q T æquales, propter æqualitatem triangulorum I Q M, T Q M.

Reliquum constructionis ei qui trochoidem noverit, per se ex ipsa figurâ satis ostenditur: præ cæteris notetur chorda IM.

Ostendendum est portionem trochoidis AF ab initio A secundùm longitudinem suam curvam mensuratam, æqualem esse quadruplo sinus versi IQ, sive duplo rectæ IT. Unde, quoniam AF est portio quæcunque dimidiæ trochoidis AFD, ostendetur ipsa curva AFD æqualis quadruplo semidiametri IL, seu duplo diametri IH. Hoc erit præcipuum hujusce Propositionis Corollarium.

Quoniam diametri rotæ ILH, AEC initio motûs congruebant, manifestum est tunc tria puncta I, A, F simul extitisse, & ambo E, L simul, & ambo C, H simul: exinde verò punctum I percurrisse rectam AI uniformi motu, sicuti & punctum L rectam EL, & punctum H rectam CH, & punctum F secundum rotæ circumferentiam percurrisse arcum IMF; quo factum est ut in trochoide primariâ quatuor illæ lineæ AI, EL, CH, & arcus IMF essent æquales: at propter implicationem recti motûs AI cum curvo IMF, punctum F tali motu composito descripsit portionem trochoidis AF, in quo ipsius F velocitas continuò mutata est augescendo sensim ab A in F. Examinemus ergò illam auctionem continuam per omnia puncta ejusdem AF; ac pro diversis positionibus puncti F, diversas ipsius velocitates in curvâ AF cum ejusdem uniformi velocitate in arcu rotæ IMF conferamus.

Incipiamus ab eâ positione quæ primum oblata est, in qua F est quodvis punctum in dimidiâ trochoide AFD ab A diversum. Patet ex motuum legibus, velocitatem puncti F in curvâ AF ad velocitatem puncti F in arcu IMF sic se habere, ut tangens FH ad tangentem FG in parallelogrammo FGHV: idem verò de singulis punctis in curvâ AF assumptis dicetur, mutatâ convenienti positione rotæ, & ductis congruis tangentibus; augetur autem ratio FH ad FG dum F fertur ab A in F, ergo & ipsius velocitas; & est velocitas uniformis per infinitas tangentes arcûs IMF, sicuti & ipsius puncti F in eodem arcu. Si igitur ipse idem IMF infinitè dividatur æqualiter, atque illi divisioni correspondeat infinita divisio curvæ AF (quod tamen fieri æqualiter non continget propter curvæ naturam, quod nihil interest) & singulis minoribus arcubus ipsius IMF assignentur suæ tangentes æquales, quibus etiam correspondeant totidem tangentes curvæ AF, quanquam minimè æquales, erunt per vigesimam quartam Libri quinti Euclidis, quoties opus fuerit repetitam, omnes tangentes curvæ AF simul sumptæ ad omnes tangentes æquales arcûs IMF simul sumptas, ut omnes velocitates puncti F in curvâ AF, ad omnes velocitates ejusdem puncti F in arcu IMF: atqui ut velocitates inter se, ita sunt lineæ ab ipsis percursæ, putà curva AF & arcus IMF. Ut ergo omnes tangentes curvæ AF ad omnes tangentes arcûs IMF, sic ipsa curva AF ad ipsum arcum IMF; quod primò notetur.

Præterea quoniam recta FG tangit circulum IFH, & à contactu ducitur recta FSR ipsum circulum secans, erit per trigesimam secundam libri tertii Elem. Euclidis, angulus GFR angulo FIR æqualis, & dimidius GFH dimidio FIS; unde triangula isoscelia FGH, FLI similia sunt. Ut ergo tangens FH ad tangentem FG, ita chorda IF ad radium FL; & divisis infinitè, ut suprà, arcu IMF & curva AF, adjunctisque iisdem infinitis minoribus tangentibus, ducantur à puncto I totidem chordæ ad singula arcûs IMF puncta; probabimus ex Geometriâ, chordas illas omnes simul sumptas ad radium FL toties sumptum sic se habere, ut omnes tangentes curvæ AF simul ad omnes tangentes arcus IMF simul; hoc est per primum notatum, ut curva ipsa AF ad arcum ipsum IMF: quod secundò notetur.

Jam arcus IM qui ipsius IMF dimidius est, dividatur æqualiter infinitè; sed ita ut in ipso IM tot sint divisiones quot in toto IMF, hoc est quot

sunt chordæ in ipso arcu I M F, sive quoties sumptus est radius F L; tum à singulis arcûs I M punctis in radium I S demittantur totidem sinus recti, quorum maximus est MQ: tot ergo sunt sinus recti ab arcu I M, quot chordæ in arcu I M F, & unusquisque sinus unius cujusque chordæ correlatæ dimidium est; unde ipsorum omnium sinuum summa dupla æqualis est summæ chordarum semel sumptæ. Erat autem ex secundo notato summa chordarum ad summam radiorum, ut curva A F ad arcum I M F; ergo sinuum dictorum summa dupla se habet ad summam radiorum, ut curva A F ad arcum I M F. At ut summa illa dupla sinuum ad summam illam radiorum, sic se habet duplum sinus versi I Q ad arcum I M, per Lemma ad id inventum & ad alia permulta ardua perutile; & ut duplum I Q ad arcum I M, ita quadruplum I Q ad duplum arcus I M, hoc est ad arcum I M F. Ut ergo hoc quadruplum sinûs versi I Q ad arcum I M F, ita curva A F ad eundem arcum I M F; quare hæc curva A F æqualis est quadruplo sinûs versi I Q: quod erat propositum.

Corollarium.

Corollarium manifestum est. Si enim pro trochoidis portione A F, ut suprà, assumamus ipsam dimidiam trochoidem integram A F D, tunc rotæ diameter quæ erat I H, cum axe B O D congruet; & punctum I puncto B, & punctum H puncto D, & punctum L, puncto O, & punctum F punctis H, D, & punctum M puncto X, & punctum Q punctis seu centris L, O, & punctum T punctis seu verticibus H, D, &c. Unde arcus I M F fiet semicircunferentia totæ I X H, & arcus I M fiet quadrans I X, & sinus versus I Q fiet radius I L, &c.

Itaque per Propositionem, semi-trochoides A F D sinus versi I L erit quadrupla, seu diametri I H dupla, quod est Corollarium.

Hæc & multa alia, cùm circa annos 1635 & 1640 vigente animi robore detexissem, & ferè omnia publicè multotiès patefecissem, tam in Cathedra Regia, quam in multorum doctorum conventibus; immò & quibuslibet amicis literatis privatim, unicam hanc de longitudine trochoidis Propositionem semper reticui: sperabam enim eâdem methodo (quam primus, ut putò, detexi) me multò majora detecturum, atque imprimis multas quadraturas. Nec me spes ex toto fefellit; innumeras enim adhuc teneo, non eas tamen quas præcipuè intendebam, de quibus viderint posteri quibus hæc nostra speculatio non erit forsan inutilis. Hoc tamen eos monebo, doctrinam de motuum compositione adeò universalem esse, ut nec analysi solâ coerceatur; nec adjunctâ infinitorum doctrinâ, cum rationalibus & irrationalibus, atque logarithmicis quantitatibus; quippe hæc omnia motus comprehendit, non ab ipsis comprehenditur: hinc latissimus patet exercitationibus Mathematicis campus, idemque plusquàm solidus.

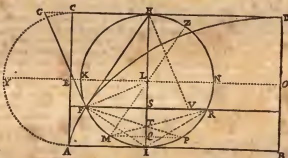
Negligentiâ tamen meâ, quòd nihil prælo committerem, factum est ut quidam Exteranei nationis nostræ æmuli, vel potiùs eidem invidi, ex eorum numero qui ut fuci, apum favos invadunt, & quod elaborare non possunt mel, vi & injuriâ sibi vendicant, multa mea mihi eripere conarentur, eaque sibi tribuere. Sed & ad id adjuverunt ex Nostratibus quidam, mihi præ cæteris invidi; qui cùm mihi nihil reliquum esse cuperent nec inventa mea sibi arrogare auderent, ne ridiculi apud Gallos haberentur, ea cuilibet extraneo, (quanquam multis annis posteriori) quàm mihi suo civi & vero inventori, mallent addicere; & sic contra perspectam sibi veritatem, & verbis & scriptis impudenter mentiri.

His artibus, ipsa trochoides, ejusque tangentes, & plana, sed & solida fermè omnia mihi erepta sunt; ac ne ad extrema fures penetrarent, solus obex obstitit,

obstitit, solidum circa axem, quod de industriâ cum Propositione præmissâ de longitudine reticueram. Sustinui, & expectavi donec circa ipsum solidum fœdè errarent qui præ cæteris sapere videri volebant, quorum ipsorum, super hac re, literas autographas etiamnum asservo, easque non unicas: tunc verò solidum ipsum vulgavi anno 1645, nostrisque atque illis extraneis patefeci, quorum (extraneorum inquam) responsum accepi mœroris atque indignationis plenum, ob errorem contra spem suam patefactum. Lætabar interim, & hæc illis subinde (arrogantiùs forsan) exprobrabam, Certè meæ quisquiliæ alicujus sunt pretii, in quas fures adeò cupide involent, easque sibi retinere tantâ pertinaciâ contendant.

Possum tamen cùm libuerit, mea à furibus recuperare. Habeo enim ad id instrumenta valida, scripta manu, annis & diebus suis munita à viris celeberrimis; nec deerunt testimonia prælis commissa à quibusdam, prudentiùs quàm ego de futuro furto præsagientibus, idque multis annis ante furtum ipsum: his, dum adhuc vivo, utar, ex amicorum meorum judicio.

Redeo ad præmissam Propositionem de longitudine trochoidis, de qua nihil, nec publicè, nec privatim me communicasse jam testatus sum; eam tamen multis annis postea invenit Anglus quidam vir doctissimus, & prælo per se vel per amicos, suo nomine vulgavit. Methodus illius à nostrâ planè diversa est, sed conclusio vera & elegans. Ait enim portionem quamcunque semitrochoidis AFD, (semicycloidem ille cum multis aliis vocat) purà portionem DF à vertice D incipientem, duplam esse tangentis HF. Hanc enuntiationem cum nostra coincidere, sic demonstramus.



Quoniam quatuor arcus FM, MI, IP, PR æquales sunt, secabunt se invicem chordæ æquales FP, RM in eodem puncto T diametri IH; & rectæ IQ, QT sunt æquales; & anguli TFI, TFS æquales; sed & angulus HFR sive HFS, æqualis est angulo HIF, quia insistunt arcubus æqualibus HR, HF; ergo summa angulorum HFS, TFS, æqualis est summæ angulorum HIF, TFI; prior autem summa constituit angulum HFT, & posterior summa æqualis est angulo externo HTF in triangulo ITF; æquales sunt ergo anguli HFT, HTF; unde in triangulo HFT latera HF, HT sunt æqualia; sed HT cum IT constituunt diametrum; ergo & HF cum IT diametrum constituunt; & est IQ dimidia ipsius IT; quare HF cum dupla IQ constituunt diametrum; & sic dupla HF cum quadrupla IQ, diametri duplum constituunt. Sed & ex Corollario, semitrochoides AFD ejusdem diametri dupla est; itaque ipsa AFD duplo tangentis HF, & quadruplo sinûs versi IQ æqualis est: demptis ergo utrinque æqualibus, hinc qui-

dem quadruplo sinûs versi, illinc autem portione A F semitrochoidis, superest ut reliqua portio semitrochoidis FD duplo tangentis HF sit æqualis.

Potuit demonstratio directè institui per motuum compositionem, initio sumpto à vertice D, in curva DF portione quâcunque semitrochoidis; quo pacto, conclusio per se incidisset in duplum tangentis HF, ut mox dictum est. Ad hoc, ductâ diametro MLZ ipsi HF parallela, demittendi essent ab omnibus punctis arcûs rotæ HF infinities æqualiter divisi, totidem sinus recti in ipsam diametrum MLZ; & totidem tangentes ad ipsum arcum rotæ HF pertinentes; atque totidem ipsis correspondentes, pertinentesque ad curvam DF; omninò sicuti de arcu IMF, ac de curva AF superiùs dictum est, &c. adhibito tandem Lemmate, & congruis argumentis. Sed prior demonstratio prior etiam in mentem incurrit, in quâ ideò mens ipsa conquievit, quod & Propositionis, & ipsius trochoidis idem esset initium punctum A.

De longitudine trochoidum aliarum ac sociarum omnium, aliàs dicemus.

EPISTOLA
ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL
AD R. P. MERSENNUM.

REVERENDE PATER,

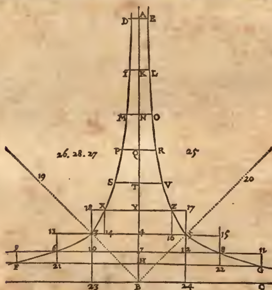
Ex propositionibus Clarissimi Torricellii eas tantum examinandas censui, quas nonnisi ab egregio Geometrâ profectas esse judicabam. Quapropter prætergressis octo primis circa sphæram, & solida eidem inscripta & circumscripta, quarum examen, quemvis vel mediocriter versatum fugere non posse existimavi, nonam aggressus sum quæ est de dimensione cochleæ, quam, ut ardua est, ita veram esse certissimâ demonstratione perspexi; ita ut ex ea unica Authorem inter præstantes hujus sæculi Mathematicos annumerare non verear. Quodque fortassis mirere nihil refert; magisne an minus inter se distent spiræ ipsius cochleæ, modò idem sit semper triangulum à quo describatur; sed & etiamsi ipsum triangulum moveatur tantum ad motum parallelogrammi, non autem motu progressivo, ita ut idem triangulum absolutâ conversione in se ipsum redeat: eodem modo se res habebit, nec mutabitur Propositio.

De centro gravitatis parabolæ inveniendo à priori, nullâ suppositâ ejus quadraturâ; si ipse sic proponit, ut se invenisse intelligat, laudamus: si vero à nobis quærit, dabitur illi non solum in parabola conica, quam quadraticam appellamus, quia in ea quadrata ordinatim applicatarum inter se sunt, ut portiones diametri; sed etiam in parabola cubica, in quadrato quadratica, &c. atque in earum solidis; sive ipsæ parabolæ circa suos axes, sive circa tangentes ad extremitatem axis, sive circa aliquam ex ordinatis ad axem convertantur, & geniti inde solidi, sive fusi parabolici, dimidium plano ad ipsius axem erecto resectum proponatur: & multa alia de quibus, si aliquando res postulabit, fusiùs agemus. Nunc verò hoc indicasse sufficiat, in dimidio fuso parabolico quadratico centrum gravitatis axem dividere in duas portiones, quarum ea quæ ad verticem ad eam quæ ad basim se habet ut 11 ad 5; in cubico, ut 13 ad 7; in quadrato-quadratico, ut 15 ad 9; in quadrato-cubico, ut 17 ad 11; atque ita in infinitum, addendo semper 2 ad singulos præcedentis rationis terminos. Præterea rationes solidorum ipsorum ad cylindros quibus inscribuntur, quas omnes invenimus, & quarum speculatio forsan minime spernenda viro clarissimo videbitur.

In cycloide Torricellii agnosco nostram trochoidem, nec recte percipio quomodo ipsa ad Italos pervenerit, nobis nescientibus. Quod si illa tanto viro placuerit, lætor. Spero autem brevi fore ut eadem in lucem emittatur, cum suis tangentibus, cumque solido ex conversione illius circa basim genito, forsan & circa axem: neque id tantùm in prima trochoide cujus basis æqualis esse ponitur circumferentiæ totæ genitricis; sed etiam in quavis alia trochoide sive prolata, sive contracta; atque in sociis earumdem.

Propositio de solido à qualibet sectione coni circa axem circumvolutâ descripto, atque ad conum eidem inscriptum unica enunciatione collato, elegantissima est & verissima, sicut demonstravimus: nec ei inferior est ea quæ sub eadem figura habetur de centro gravitatis ipsorum solidorum, quam etiam demonstravimus. Quod si ambas duabus tantùm demonstrationibus ostenderit, nihil video quod in hac materia desiderari possit; sed vereor ne positis Authorum demonstrationibus, ipse inde propositiones suas deduxerit: quod etiamsi ita esset, tamen non parum laudis mereretur; neque enim cuilibet contingit, aliorum inventis addere tanti ponderis propositiones.

Ejusdem fere argumenti est sequens Propositio de frusto sphærico duobus planis parallelis secto, de quo nihil dicimus, quia in eo non immorati sumus.



Omnium elegantissima est decima quarta, cujus demonstrationem hîc addere libet, cuperemque valde scire utrum in idem cum clarissimo viro medium inciderim, vel diversum. Igitur in figura cujus constructionem ex ipsius Torricellii Propositione notam esse suppono, existente B centro hyperbolæ, assymptotis BA, BC ad angulos rectos, solido autem quovis DEFG terminato, ut propositum est; primum ostendamus tale solidum medium propor-

Vide Torricell. de solido Hyperb. pag. 118.

tionale esse inter duos cylindros ejusdem altitudinis cum solido, puta rectæ AH, quorum unius basis sit circulus DE, alterius vero FG; ex hac enim cætera demonstrabuntur. Inter BA, & BH, media proportionalis sit BT; tum inter BA & BT, media quoque proportionalis sit BN; atque inter BT & BH, esto B4. Item inter BA & BN, sit BK; inter BN & BT, sit BQ; inter BT & B4, sit BY; inter B4 & BH, sit B7; atque ita tot continuè inveniantur mediæ quot libuerit, sic enim erunt quoque continuè proportionales differentiæ ipsarum H7, 74, 4Y, &c. usque ad ultimam KA, & in eadem ratione primarum. Patet autem hac ratione eò deveniri posse, ut cylindrus cujus basis circulus FG, altitudo autem ultima differentia KA, minor sit quovis spatio solido dato. Jam per puncta 7, 4, Y, T, ducantur plana ad rectam AB erecta, solidum secantia secundum circulos quorum diametri 6 8, 3 5, XZ, SV, &c. parallelæ ipsi FG; patet quoque ex natura hyperbolæ, proportionales esse rectas FH, 6 7, 3 4, XY, ST, & reliquas in eadem ratione, sed inversa, primarum BH, B7, B4, &c. Denique inscribantur & circumscribantur ipsi solido totidem cylindri quot sunt differentiæ, H7, 7 4, 4 Y, &c. sintque inscripti 8 21, 5 10, Z 14, &c. circumscripti vero F 11, 6 15, 3 17, &c. constat ergo omnes circumscriptos simul superare omnes inscriptos simul, minori spatio quàm cylindro altitudinis KA, & basis FG; hoc est minori spatio quovis proposito. Præterea cylindrus basis SV, & altitudinis AH, est medius proportionalis inter cylindros ejusdem altitudinis, sed basium DE, FG. Dividatur ipse medius in cylindros ejusdem basis SV; sed altitudinum H7, 74, 4Y, YT, &c. usque ad ultimum altitudinis AK, qui ultimus major quidem est primo inscripto 8 21, sed minor circum-

circumscripto F, 11, quod sic ostendimus. Quoniam recta S T media proportionalis est inter D A & F H, major erit ratio circuli medii S V ad circulum 6 8, quàm rectæ D A ad rectam 6 7: at idem circulus medius S V, ad circulum F G minorem habebit rationem quàm eadem recta D A ad eandem 6 7; ut autem D A ad 6 7, ita H 7 ad A K: ergo circulus medius S V, ad basim quidem inscripti 6 8, majorem habet rationem; ad basim vero circumscripti F G, minorem quàm altitudo communis inscripti, & circumscripti H 7 ad altitudinem ultimi medii A K. Eodem modo demonstrabimus cylindrum altitudinis N K, basis verò circuli medii S V majorem quidem esse secundo inscripto 5 10, minorem vero secundo circumscripto 6 15; atque ita de reliquis ordine sumptis. Patet igitur tandem, totum cylindrum medium omnibus quidem inscriptis simul sumptis majorem esse; omnibus verò circumscriptis minorem. Cætera persequi apud vos inutile fuerit.

Corollarium.

Patet autem manifestò positis rectis B H, B 7, B 4, B Y, &c. continuè proportionalibus, & factâ constructione eâdem, dividi totum solidum hyperbolicum F G, E D in portiones continuè proportionales in eadem quidem, sed inversa ratione rectarum ipsarum B H, B 7, B 4, &c. quæ portiones erunt F G 8 6, 6 8 5 3, 3 5 Z X, &c. quia qui ipsis portionibus æquales erunt cylindri, proportionales erunt in ratione proposita, quæ proprietas eximia est.

Secundò intelligamus solidum hyperbolicum B A versus A infinitè productum esse, atque idem secari quovis plano 3 5 ad rectam B A erecto in puncto 4, ac circulum constituente cujus diameter 3 5; tum super hac basi, circulo 3 5, esto cylindrus 3 5 24 23, cujus altitudo sit B 4: dico talem cylindrum æqualem esse solido hyperbolico super basi 3 5 constituto, atque infinitè versus A extenso.

Aliàs, vel cylindrus major est solido, vel minor. Esto primùm major, si fieri potest; & excessus esto magnitudo 25, ita ut solidum hyperbolicum unà cum spatio 25 intelligatur æquale esse cylindro proposito 3 5 24 23. Jam intelligatur cylindrus quidam cujus altitudo B 4, semidiameter vero basis P Q, ita ut hic cylindrus minor sit spatio 25: sit autem P Q perpendicularis ad B A, atque interjecta inter hyperbolam, & asymptoton, hoc enim fieri potest. Tum fiat ut B 4 ad B Q, ita B Q ad B A, & terminetur solidum hyperbolicum circulo D A E. Erit ergo ex prædemonstratis solidum 3 5 E D æquale cylindro altitudinis A 4, basis verò semidiametri P Q. Addantur inæqualia; solido quidem, spatium 25; cylindro verò, alter cylindrus altitudinis B 4, & ejusdem basis semidiametri P Q. Fient ergo inæqualia; illinc solidum hyperbolicum 3 5 E D, unà cum spatio 25, majus; hinc verò, totus cylindrus altitudinis A B basis semidiametri P Q, minor. At totus hinc cylindrus æqualis est cylindro proposito 3 5 24 23, quia bases & altitudines reciprocantur ex natura hyperbolæ: ergo solidum hyperbolicum 3 5 E D, unà cum spatio 25, majus esset cylindro 3 5 24 23. Verùm solidum hyperbolicum infinitè extensum versus A, unà cum eodem spatio 25, positum est æquale eidem cylindro 3 5 24 23: hoc ergo infinitè extensum minus esset sua portione 3 5 E D, quod est absurdum. Esto secundò cylindrus 5 23 minor solido hyperbolico infinitè extenso, si fieri potest; poterit ergo ex ipso solido detrahi portio quædam, puta 3 5 E D major eodem cylindro 5 23; ita ut planum D E, parallelum sit plano 3 5, constituatque circulum cujus centrum A. Inveniatur recta B Q media proportionalis inter B A & B 4; seceturque solidum hyperbolicum plano P Q R parallelo ipsi 3 5. Jam ut suprà, solidum 3 5 E D æquale est cylindro basis P Q R, altitudinis vero A 4: cylindrus vero 5 23 æqualis est cylindro ejusdem basis

P Q R, altitudinis verò A B: ponitur autem solidum 3 5 E D majus cylindro 5 23; ergo cylindrus basis P Q R altitudinis A 4, major esset cylindro ejusdem basis & altitudinis A B, quod est absurdum.

Tandem proposito quovis solido hyperbolico ex prædictis, putà D E G F: oporteat ipsum dividere in duas portiones quæ datam servent rationem, ut magnitudo data 26 ad datam magnitudinem 27: fiat ut recta F H ad rectam D A, ita magnitudo 26 ad aliam quampiam 28; dividaturque recta A H altitudo solidi in puncto T, ita ut portiones H T, T A eandem habeant rationem quàm magnitudo 28, ad magnitudinem 27: & per punctum T ducatur planum S T V parallelum plano F G vel D E, quod quidem planum S T V dividat solidum hyperbolicum in duas portiones F G V S, & S V E D: dico has portiones eandem inter se rationem habere, quàm magnitudo 26 ad magnitudinem 27. Nam inter B T & B H media sit proportionalis B 4: item inter B T & B A media sit proportionalis B N; & per puncta 4, N ducantur plana prædictis parallela, atque solidum secantia secundùm circulos quorum diametri 3 4 5, M N O. Quoniam ergo continuè sunt proportionales B H, B 4, B T, erunt quoque proportionales in eadem sed inversa ratione rectæ F H, 3 4, S T propter hyperbolam: quare ex prædemonstratis, cylindrus altitudinis H T, basis vero diametri 3 5 æqualis est portioni solidi hyperbolici F G V S. Simili argumento cylindrus altitudinis T A, basis autem diametri M O, æqualis est reliquæ portioni S V E D: sunt autem ipsi cylindri in ratione data magnitudinis 26 ad 27, ut jam demonstrabimus; quare & portiones solidi hyperbolici sunt in eadem ratione datâ.

Et quidem, quod cylindri sint in ratione data magnitudinis 26 ad magnitudinem 27, sic constabit. Quoniam ex constructione, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita recta F H ad rectam D A: ut autem F H ad D A, ita sumpta communi altitudine recta S T, rectangulum sub F H, S T ad rectangulum sub D A, S T, hoc est, ita quadratum 3 4 ad quadratum M N; sive circulus diametri 3 5 ad circulum diametri M O. Ergo, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita circulus diametri 3 5, ad circulum diametri M O. Addatur hinc quidem ratio altitudinis H T ad altitudinem T A; illinc autem ratio magnitudinis 28 ad magnitudinem 27, quæ rationes sunt eædem; ex constructione igitur, ratiò composita ex rationibus circuli 3 5 ad circlum M O, & altitudinis H T ad altitudinem T A, hoc est ratio cylindrorum, componitur ex rationibus magnitudinis 26 ad magnitudinem 28, & 28 ad 27; quæ ambæ rationes constituunt rationem 26 ad 27, ut propositum est.

Hîc mirabilis quædam proprietas accidit circa plana spatia hyperbolica hujus constructionis, illa nempe F G 8 6, 6 8 5 3, 3 5 Z X, X Z V S, &c. quæ omnia sunt æqualia, positis continuè proportionalibus rectis B H, B 7, B 4, B Y, &c. ut supra cujus quidem proprietatis demonstratio non erit difficilis ei qui animadverterit omnia parallelogramma iisdem spatiis inscripta, esse æqualia; sicuti & circumscripta æqualia.

Tamdem si asymptoti hyperbolæ non sint ad angulum rectum, vel eædem erunt ex se demonstrationes omnes præcedentes; vel additione, aut detractione conorum quorumdam, fient eædem.

Cæterum, REVERENDE PATER, hoc scias velim, me magnifacere adeo Excellentem Virum, etiam ultrà quàm verbis aut litteris exprimere possim. Fac etiam, obsecro, ut ipse innotescat nostris Geometris, præsertim D. D. *De Fermat, & Descartes*, quorum utrumque, meo quidem judicio, nec ipsi Archimedi jure quis postposuerit; hoc enim apud me recipio, fore ut & his & illi gratissimum quid facturus sis.

CLARISSIMO VIRO ROBERVALLIO

EVANGELISTA TORRICELLIUS S. P.

LOQUAR aperte tecum ſine alio interprete, VIR CLARISSIME, quis enim diſſimulare poſſit? Et quanquan litteræ tuæ ad clariſſimum Merſennum miſſæ ſint, cohibere tamen non poſſum animi mei impetum, quin ad te currat, tibique totum ſe dedicet tanquam Apollini Geometrarum. Fortunatas certè jam exiſtimare debeo nugas meas, atque illas non jam ampliùs nihilifacere, quandoquidem dignæ habitæ ſunt, quæ judicium tuum ſubirent, & animadverſionibus tuis nobilitarentur. Principio, ex me quæris an centrorum gravitatis parabolæ à priori, ut inventum à me proponatur, aut quæratur ut ignotum : erubeſcerem certe ignotum theorema inter alias propoſitiunculas meas à me demonſtratas collocare. Oſtendimus illud unica, brevique demonſtratione; ſed ea occaſione admiratus ſum fœcunditatem ingenii tui circa tot parabolas atque earum ſolida, non ſolum geometricè, ſed etiam mechanicè conſiderata, & ad menſuram ſcientiamque redacta. De his nihil ego habeo quod proferam, & fortaſſe non habebo; ſiquidem difficillimæ, niſi fallor, contemplationis cenſeo hujuſmodi theoremata. Præterea immorari non ſoleo circa figuras non vulgaras, & circa ſolida quæ ſi nova ſint, ſaltem ab antiquis & receptis figuris planis ortum non habeant; atque hoc eâ præcipue ratione, ut laborum fructus, quando res ex animi voto ſuccedet, communem litteratorum applauſum ſortiatur, neque ſit qui invideat figuras a me ipſo fabricatas. Menſura cycloidis, (hoc enim nomine Clariſſimus Galilæus appellavit 45 jam ab hinc annis figuram quæ fortaſſe tibi nunc trochois eſt) mihi ſeſe ultrò obtulit non ſperanti, pene dixi non quærenti. Illam deinde quinquies diverſis ſemper principijs demonſtravi. Quoad ſolida nihil habeo : tangentem prædictæ lineæ jam oſtenderat mihi Vincentius Vivianus Florentinus Clariſſimi Galilæi alumnus, etiam nunc adoleſcens. Quoad auctorem hujus figuræ, credo ego ingenium tuum acutiſſimum & feraciſſimum, illam ex ſe obſervare potuiſſe nemine indicante; hujuſmodi enim lineæ natura familiaris erat, conſtatque ex compoſitione duorum motuum, recti & circularis. Attamen vivunt adhuc teſtes quibus olim Galilæus ittitas lucubrationes ſuas communicavit circa hanc figuram; imò ſuperſunt paginæ aliquot clariſſimi Mathematici, in quibus & picturas & aggreſſiones ſuas nonnullas circa hoc ſubjectum jam adoleſcens delineaverat. Pluribus abhinc annis theorema hoc propoſuit ille mirabili Geometræ Cavalerio noſtro, ipſique dixit idem quod & mihi, & pluribus aliis confirmavit, nempe ſe olim experimentum feciſſe, appenſis ad libellam ſpatiis figurarum materialibus, quantuplum eſſet cycloidale ſpatium ad circulum ſuum genitorem, & ſemper illud inveniſſe, neſcio quo fato minus quàm triplum; ideo incœptam contemplationem deſeruiſſe, ob incommenſurabilitatis ſuſpicionem. Quod ſi aliquando, inconſtanti fallacia, reperiſſet minus quàm triplum, aliquandò verò majus, tunc aſſerebat Lincæus Mathematicus ulteriorem contemplationem proſecuturum fuiſſe; rejectâ ſcilicet variationis cauſa in materiæ inæqualitatem atque raſuræ.

Propoſitionem illam de ſolido à qualibet coni ſectione circa axem revoluta deſcripto, atque de ejuſdem ſolidi centro gravitatis, unica ſimul brevique demonſtratione oſtendimus, ſuppoſita tantum modica Apollonii cognitione. Verùm duplex hoc theorema inter neglecta à me rejicitur; nullum enim habebit locum in opuſculis, quæ nunc propalare cogor, in quibus præcipuè profiteor materiæ unitatem.

Quoad solidum hyperbolicum, jam non meum sed tuum, disperceam si jam ampliùs spero me visurum tam sublimem & tam doctam demonstrationem quæ cum tua conferri mereatur. Optimum equidem maximumque nunc percipio laborum meorum fructum, eo tantum nomine, quod tu, Vir Clarissime atque Ingeniosissime, tam acutis demonstrationibus, tantâque doctrinæ affluentia, unicam ineptiolam meam illustrare dignatus sis. Gratias primùm ago maximas. Deinde ut desiderio tuo satisfaciam, methodus mea circa demonstrationem hujus solidi diversissima est à tuâ. Altera quidem ex meis aggressionibus per doctrinam indivisibilium procedit, quæ si cum erudito lectore semper ageretur, paucissimis verbis expediri posset: altera verò per inscriptionem & circumscriptionem, more Veterum, non adeo expedita est, sed facilis, & fortasse curiosa. Hoc unum reperi in tua scriptura, quod conveniat cum meis, nempe constructio illa pro secando frusto solidi hyperbolici in data ratione; demonstrationes verò ab eadem constructione dissimillimæ emanant.

Cæterùm evidentiores agnosco hyperbolas in laudibus quibus me exornas, quàm in demonstrationibus quibus hyperbolicum solidum ipse metiris. Utinam illis aliquando dignus fiam, ut in lectione operum tuorum, quæ avidissimus expecto, illa intelligere valeam, fructusque scientiæ suavissimos, & divitias ingenii inæstimabiles inde colligere possim, & intellectum meum ditare. Vale, Vir Clarissime, tuorumque Operum editionem accelera, in publicam litteratorum omnium utilitatem.

Florentiæ Kal. Octob. 1643.

EPISTOLA
ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL AD EVANGELISTAM TORRICELLIUM.

Vir Clarissime,

Si me unum respicerem; si nulla existimationis nostræ, si nullâ cæterorum hominum, si nullâ ipsius, quam præ cæteris diligo, veritatis habitâ ratione, internâ animi tranquillitate conquiescerem: non me moverer profectò, quòd vos Deûm atque hominum fidem invocetis, quòd celeberrimorum hominum testimonium in me adducere conemini, quòd denique nullum non moveatis lapidem, ad hoc ut ego meorum ipsius operum plagiarius habear: quippe qui planè mihi conscius sum, ex iis quæ ad vos scripsi, nihil non verum esse; sed fateor ingenuè; longè absum à præstanti illo vitæ philosophicæ statu, tantámque beatitudinem si optare nobis licet, non etiam sperare statim licet. Ego enim inter multos natus, inter multos educatus, cum multis vivere atque conversari assuetus, cum multis etiam necessitudines contraxi; ita ut rebus externis non moveri huc usque nondùm didicerim. Itaque admonet nos existimatio nostra, quam tueri, quámque, si quo id labore liceat aut impendio, promovere tenemur; postulant amici, collegæ, Mathematici Galliarum præstantissimi, quibus omnia me debere fateor; cogit ipsa cui totum me dicavi veritas: ne tam gravem vestram accusationem prorsùs negligam, præsertum quam nullius negotii fuerit refellere; cùm præter rationes nostras, quæ per se sufficiunt, iisdem ambo testibus utamur. Erit etiam quod de vobis expostulem, & ut spero non injuriâ, qui cùm festucam in nostris oculis quæ-

tatis,

ratis, trabem in vestris non animadvertatis. Nolim tamen ob id tolli inter nos litterarum commercium; quod vos nimiùm rigidè, meo quidem judicio, quasi aliquid nobis timendum minati estis: quin potiùs optarim tales iras, suavissimi commercii redintegrationem esse. Quod si inter nos, per nos ipsos conveniri non potest, judicent amici: nos judicio ipsorum stare promittamus. Ad rem venio.

De propositione Rotæ atque Trochoidum illius, primùm audivi Parisiis anno 1628. (eo enim demùm anno ab expeditione Rupellana reversùs, statui in maxima illa atque omni studiorum genere excultissima urbe, firmas sedes stabilire; cùm anteà vagus, incertis sedibus, diversis in regni Gallici partibus degissem) asseruitque qui proponebat celeberrimus vir Pater Mersennus, talem quæstionem per multos jam annos à pluribus tentatam, eousque insolutam permansisse: cui ego respondi, hoc ei commune esse cum multis aliis vetustissimis nobilissimisque propositionibus; neque ideò quicquam in illa magis quàm in his mirandum videri, si unà cum illis solutione careret. Ac tunc ipse, cùm difficillimam existimarem, certè supra vires meas, intactam ita dimisi, ut per sex annos de illa ne quidem somniarim. Atque ut verum fatear, ego tunc annum agens vigesimum septimum, etiamsi continuo decennii anteacti exercitio, discendo, docendoque, atque agendo in rebus Mathematicis, in primis verò in Analyticis, quibus etiamnum maximè delector, non mediocriter profecissem; tamen, neque eum adhuc habitum mihi comparaveram, neque eas ingenii vires susceperam, quæ ad ejusmodi quæstiones sufficerent. Interea, cùm mecum ipse sæpiùs cogitarem, quâ potissimùm ratione possem in suavissimæ Matheseos adita penetrare, statui divinum Archimedem, quem ferè unum inter antiquos Geometras suspicio, attentiùs considerare; ex qua consideratione sublimem illam & nunquam satis laudatam infiniti doctrinam mihi comparavi: sic enim tunc vocabam eam quæ à Clarissimo Cavallerio vocatur doctrina indivisibilium. Ridebis forsan; &, Hic ergo Gallus, inquies, non solùm trochoidum dimensionem ante nos, si Diis placet; non solùm parabolarum omnium, non solum solidorum ad has & illas pertinentium, non solùm planorum ab helicibus cujuscunque gradus aut dignitatis compræhensorum, non solum earumdem helicum secundùm longitudinem cum prædictis parabolis comparationem, non solùm curvarum omnium tangentes per motuum compositionem, non solùm doctrinam centrorum gravitatis invenerit, sed & præstantissimi nostri Cavallerii indivisibilia quoque? atque illa omnia nobis; hæc illi, plagiarius ille impunè eripuerit? Verumtamen, rideatis licet, & talia, aut iis pejora de nobis putetis, aut vociferemini, Ego trochoides, parabolas, helices, tangentes, & centra ante vos; imò & multò plura non solùm inveni, sed & vulgavi: an vultis ut verum reticeam quod partes nostras adjuvat, falsum autem proferam quod nobis nociturum sit? nos ætate aut tempore saltem priores, ætatis aut temporis beneficia respuemus, & junioribus aut saltem tempore posterioribus, vivi adhuc relinquemus? Apage stultam illam in nosmetipsos injustitiam. Quòd si cuncta ego unicâ epistolâ quam ad vos scripsi, non enumeravi, nihil mirum; illa enim aliunde satis prolixa extitit, nec id necessarium, aut operæ pretium judicavi. Deinde etiam, quid de paucis aliquot propositionibus enumeratis gloriari attinet?

Pauperis est numerare pecus.

Sed de vobis plura posteà: nunc de Indivisibilibus, quoniam illa ad rem faciunt, dicamus. Illa ergo, an ante nos clarissimus Cavallerius invenerit, nescio: certè illud scio, me integro quinquennio antequam in lucem emiserit, eâ doctrinâ usum fuisse in solvendis multis, iisque planè arduis propositionibus. Attamen, absiste moveri; ego tanto viro, tantæ ac tam sublimis do-

ctrinæ inventionem non eripiam; nec possum; nec si possim, faciam. Ille prior vulgavit: ille, hoc jure, suam fecit: ille, hoc jure, habeat atque possideat: ille tandem, hoc jure, inventoris nomine gaudeat. Absit ut in posterum, quod nec prius feci, in tali causa, intercessoris ridiculi provinciam mihi suscipiam; præsertim cùm nequidem inter amicos quicquam unquam de tali doctrina vulgaverim, quam neque publici juris facere, nisi post aliquot annos, juvenili quodam mei ipsius amore, decreveram. Quippe sperabam interim, fore ut solutione difficiliorum quæstionum quas quotidie nullo negotio tali instrumento adjutus vulgabam, doctrinæ famam facilè consequerer: neque sanè hæc spes ex toto me fefellit. Postquàm enim ingenti ardore doctrinam ipsam excoluissem, eandemque ad puncta, ad lineas, ad superficies, ad angulos, ad solida præcipuè; postremò etiam ad numeros extendissem, haud fuit difficile ea exequi propter quæ amici lætarentur, invidi disrumperentur. Exultabam ergo nimiùm juveniliter, ac tanto diligentiùs doctrinam ipsam reticebam; dignus planè in quem Poeta dixerit,

Nec ferre videt sua gaudia ventos;

qui detectâ auri fodinâ ditissimâ, dum grana quædam ex ea decerpta ostento, ut ex divitibus ac beatis quidam habear; interim alius eandem à se quoque detectam, palàm, plaudentibus omnibus, ostendit, ac publici juris facit; ita ut exinde periculum sit ne ridear, si à me quoque inventam fuisse affirmavero. Est tamen inter clarissimi Cavallerii methodum & nostram, exigua quædam differentia. Ille enim cujusvis superficiei indivisibilia secundùm infinitas lineas; solidi autem indivisibilia secundùm infinitas superficies considerat. Unde ex vulgaribus Geometris plerique; sed & quidam ex superbis illis sciolis qui soli docti haberi volunt, quique si nihil aliud, certè hoc unum satis habent, ut in magnorum Virorum opera insurgant, quòd à se minimè profecta esse invideant, occasionem carpendi Cavallerij arripuerunt, tanquam si ille aut superficies ex lineis, aut solida ex superficiebus reverà constare vellet. Quanquam autem illi coram eruditis nihil aliud lucrentur quàm ignorantiæ aut invidiæ titulum, tamen iidem coram imperitis, suâ authoritate, de doctorum famâ non mediocriter detrahunt; nec ab ijs illæsus evasit Cavallerius. Nostra autem methodus, si non omnia, certè hoc cavet, ne heterogenea comparare videatur: nos enim infinita nostra seu indivisibilia sic consideramus. Lineam quidem tanquam si ex infinitis seu indefinitis numero lineis constet, superficiem ex infinitis seu indefinitis numero superficiebus, solidum ex solidis, angulum ex angulis, numerum indefinitum ex unitatibus indefinitis: immo plano-planum ex plano-planis numero indefinitis componi concipimus, atque ita de altioribus; singula enim suas habent utilitates. Dum autem speciem aliquam in sua infinita resolvimus, æqualitatem quandam, vel certè notam aliquam progressionem inter partium altitudines aut latitudines ferè semper observamus. Sed de hoc satis superque: nunc ad vos redeo. Cùm itaque ope indivisibilium multa protulissem, tandem anno 1634. celeberrimus P. Mersennus trochoidem in memoriam revocavit, non sine gravi expostulatione, quasi propositionem haud quaquam ignobilem, de industriâ prætetirem difficultate illius perterritus. Ego sic castigatus cœpi sedulò ipsam inspicere; ac tunc quidem, quæ absque indivisibilibus difficillima visa erat, ipsis opitulantibus, nullo negotio patuit. Modus autem noster ab alijs omnibus quos huc usque videre contigit, longè diversus est; & nisi me nimiùm amo, idem illis omnibus longè antecellit; quia omnium simplicissimus, brevissimus, universalissimus, & ad solida detegenda aptissimus existat, ut solus sponte à natura productus, cæteri per vim ab arte effecti videantur. Habes annum quo trochoidem invenimus; diem etiam si ita expediret adjicerem. Cætera jam ad te scripsi, & horum omnium testem locupletissimum (præter-

quam plurimos alios, quorum epistolas de hac re etiamnum apud me asservo) ipsum eundem habeo quem laudas, celeberrimum P. Mersennum. Vide ergo num sit cur doleam, cùm vos per exprobrationem objicitis propositionem illam forsan ante obitum Galilæi nondum fuisse inventam, qui tamen vixit usque ad annum 1642. præcipuè, cum jam ad vos scripserim me anno duodecimo jam elapso invenisse. Ut sic mihi tot testes habenti, & cui una sufficere debuit veritas, fidem omnem denegetis. Inventâ infiniti doctrinâ (liceat adhuc eo nomine uti in hac epistola; posthac, absit) eaque, pro tempore satis probè exacultâ; ego ad tangentes curvarum animum applicui. Ac primùm, vi Analyseos, methodum quandam reperi, quæ, etiamsi longè posteà universalis esse deprehensa sit, tamen recens inventa, talis non apparuit: quærebam verò universalem; & particulares methodos (ut adhuc) ubique dedignabar. At trochoides nostræ occasionem dederunt cur ad motuum compositionem respicerem. Occasio satis fuit, ac propositionem universalem tangentium inde deductam vulgavimus circa annum 1636. Extant adhuc, & circumferuntur hac de re lectiones nostræ à nobilissimo D. *du Verdus* nostro discipulo collectæ, atque à multis exscriptæ. Itaque jamdudùm fide publicâ nobis asserta est talis doctrina, nec alij testes quærendi, qui omnes habeamus. Circa hæc tempora nempe anno 1635, mediante amplissimo senatore Domino *de Carcavy*, cœpi per Epistolas commercium litterarum habere cum amplissimo senatore Tholosano Domino *De Fermat*, de quo quid sentiam habes in ea Epistola quam ad R. P. Mersennum direxi super solido vestro hyperbolico infinito. Is ergo vir præstantissimus, primus omnium, duas propositiones nobilissimas ad nos misit sine demonstratione: alteram de parabolis, alteram de planis helicum, utrisque per omnes dignitatum gradus sumptis. (Ne ergo dubites ampliùs, quis primus tales quæstiones proposuerit; illæ meæ non sunt; quanquam illas ego proprio marte, inventâ ad id peculiari nostrâ methodo, demonstraverim) immò universalius multò quàm ipse proponas: quippe non solùm potestates in helicibus proposuit, sed etiam potestatum radices. Exempli gratiâ: Si in helice semidiametri omnium revolutionum ordine sumptarum, se habeant ut radices quadratæ, aut cubicæ, &c. numerorum ordine naturali progredientium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. quarum primam (quadraticam putà) reperies in prima revolutione dimidiam partem sui circuli constituere. Cùmque ipsum arduarum (ut tunc) propositionum demonstrationes rogarem, ille in hæc verba rescripsit, *Ego*, inquit, *ut invenirem laboravi; labora & ipse: in hoc enim labore præcipuam voluptatis partem consistere deprehendes.* Quid facerem à tanto viro incitatus? Laboravi, atque in auxilium infinita nostra advocavi; (nondum enim tunc nostra ampliùs non esse resciveram) eaque tum primùm ad numeros extendi. Animadverti enim & parabolarum plana, ad sua parallelogramma; & earumdem solida, ad suos cylindros; & spatia helicum, ad suos circulos feliciter comparari posse, si innotesceret in numeris ratio summæ potestatum omnium ejusdem generis, ordine, atque indefinitè sumptarum, ad earum maximam toties sumptam; idque in omni genere potestatum. Quod quidem non difficulter assecutus sum. Illicò enim patuit summam omnium numerorum quadratorum, ordine naturali atque indefinitè sumptorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. ad eorum maximum totiès sumptum quot sunt illi quadrati; hoc est ad cubum ejusdem radicis cum maximo illo quadrato collatam, se habere ut 1 ad 3, sive constituere $\frac{1}{3}$; summam cuborum eodem modo sumptorum, ad eorum maximum toties sumptum, sive ad quadrato-quadratum ejusdem radicis cum maximo cubo, se habere ut 1 ad 4, sive constituere $\frac{1}{4}$; summam quadrato - quadratorum, eodem modo constituere $\frac{1}{5}$; atque ita in infinitum. Ex hac propositione quæ sola sufficit, innumera deduxi corollaria, qualia sunt hæc: Summa radicum

quadratarum numerorum omnium, ordine naturali, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, collata, putà summa radicum quadratarum horum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. eam habet rationem quam 2 ad 3; summa radicum quadratarum omnium numerorum quadratorum, ordine naturali, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, se habet ut 2 ad 4; summa radicum quadratarum omnium numerorum cuborum, ad maximam totiès sumptam, ut suprà, se habet ut 2 ad 5; atque ita in infinitum, radices quadratæ numerorum quadrato-quadratorum, quadrato-cuborum, cubo-cuborum, &c. ad earum maximam totiès sumptam, ut suprà, sic comparabuntur, ut antecedens rationis sit semper 2 exponens quadrati; consequens verò sit summa ex ipso exponente 2 & alio exponente ipsius gradus ad quem pertinent numeri quorum sumuntur radices quadratæ. Ut si sumantur radices quadratæ numerorum quadrato-quadrato-cuborum qui sunt septimi gradus cujus exponens est 7, erit consequens rationis 9, conflatum ex 2 & 7, & ratio erit ut 2 ad 9. Similiter, summa omnium radicum cubicarum omnium numerorum ordine naturali, hoc est in primo gradu, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, se habet ut 3 exponens cubi, ad 4 compositum ex eodem 3 & 1 exponente primi gradus; summa omnium radicum cubicarum omnium quadratorum, ad earumdem radicum maximam toties sumptam ut suprà, se habet ut 3 ad 5; atque ita in infinitum, radices cubicæ omnium graduum, ad earumdem maximam sumptam ut supra, comparabuntur; eritque in omnibus antecedens 3, consequens verò componetur ex eodem 3 juncto cum exponente gradus cujus radix cubica sumpta fuerit. Nec aliter radices quadrato-quadratæ omnium graduum, ad earum maximam sumptam ut dictum est, comparabuntur, eritque antecedens 4; & sic in infinitum infinities, ut satis ex prædictis patet. Hæc cùm ad amplissimum virum scripsissem, dubitavit num eorum demonstrationem haberem. Itaque paucis verbis indicavi eam esse facillimam, per duplicem positionem more Veterum, incipiendo ab unitate, & procedendo ordine per omnes potestates. Quo pacto, facilè est concludere in quadratis, exempli gratia, summam omnium numerorum quadratorum ordine naturali, sed finitè, sumptorum, ad eorumdem maximum toties sumptum, collatam, majorem esse quàm $\frac{1}{3}$; at dempto ab eadem summa, seu ab antecedente rationis, ipsorum quadratorum maximo tantùm, remanente integro consequente, reliqui rationem minorem quàm $\frac{1}{3}$. Nec ad id demonstrandum, aliò recurrendum est quàm ad genesim quadratorum, quâ fit ut quivis numerus quadratus componatur ex proximo quadrato minore, ex duplo radicis ejusdem minoris, atque ex unitate; quemadmodum etiam quivis numerus cubus componitur ex proximo cubo minore, ex triplo quadrati minoris, ex triplo radicis minoris, atque ex unitate. Qui quidem cubus est ipsum maximum quadratum toties sumptum quot sunt numeri quadrati ab unitate incipientes, atque ita de singulis potestatibus, secundùm uniuscujusque genesim. Corollaria, quomodò ab iis deducantur, aliàs, si ita expediat, explicabimus. Neque etiam fortassis spernendum videbitur corollarium aliud quod ex tali numerorum inspectione deduxi: illud autem tale est. Propositis quotcunque numeris multitudine finitis, qui ab unitate, secundùm naturalem numerorum seriem procedant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. usque ad 10000000 exempli gratiâ; exhibere summam quadratorum, aut cuborum, aut quadrato quadratorum, aut cubo-quadratorum, aut cubo-cuborum, &c. omnium talium numerorum: quæ sanè regula, pro quadratis, & cubis, reperitur specialis apud Authores; at pro omnibus potestatibus, nullam apud illos reperimus universalem. Hæc ergo fuit nostra pro parabolarum planis ac solidis, simúlque pro planis helicum, methodus.

thodus. Post hæc proposuit vir amplissimus (quod & ipse jamdiu in omnibus figuris universaliter quærebam) prædictarum figurarum centra gravitatis invenire. Ac ille quidem ad analysim recurrit, nos ad nostra infinita; unde methodus illius, ut plerisque inventis analyticis accidit, abstrusissima est, subtilissima, atque elegantissima: nostra aliquot mensibus posterior, simplicior evasit, & universalior; quò fit ut cæteris collata, magis nobis arrideat. Ut tamen alicui possit esse universalis, debet is omnibus numeris absolutus esse Geometra, qualis huc usque nullus apparuit. Quoniam verò hoc nostræ hujusce dissertationis præcipuum caput est, ac vos non obliquè aut occultè, sed directè & apertè innuistis methodum nostram, quam tamen huc usque nondum vidistis, illius quam circa finem anni 1644 ad R. P. Mersennum à vobis missam legimus, esse inversam, ac proinde nostram à vestra fuisse desumptam; quo posito tanquam vero, adeo indignamini, ut tres maximas epistolas ad amplissimos celeberrimosque viros, adjectis etiam ad id magnis Appendicibus, gravissimis querelis impleveritis; quò nos nihil tale meritos, acerbissimâ plagiarii contumeliâ afficeretis: idcircò & locus & res postulat ut tam atrocem injuriam, quandoquidem & licet & facilè possumus, à nobis propellamus. Ad hoc autem satis superque futurum speravi, si nostram illam methodum ad vos cum demonstratione mitterem; non quidem suis omnibus numeris absolutam, nimis enim longa est, sed sic digestam, ut à vobis, aliisque non vulgaribus Geometris nullo negotio intelligatur; præcipuè ab iis qui indivisibilia non oderint: alios enim nihil moror, & Geometrarum nomine indignos puto, qui viâ apertâ, tutâ, atque facili relictâ, longuos ac difficiles anfractus sequi malint. Hoc pacto, cùm illa nostra à vestra planè diversa sit, ac diversis omninò fundamentis innitatur, non erit ampliùs quòd vobis ereptam conqueri jure possitis. Eam ergo seorsim cum suis figuris conscripsimus, ne hujus epistolæ lectionem interturbaret.

Facile autem erit animadvertere methodum illam eo modo quo proposita est, universalem quidem esse absoluto Geometræ, attamen eandem à priori rarò procedere (universalem autem à priori invenire, hoc est ex sola figuræ aut lineæ definitione, nullâ ejus cum aliâ quavis figurâ, aut lineâ comparatione factâ, vix sperandum puto: quæ tamen si haberetur, & circuli & hyperbolæ, aliarumque numero infinitarum figurarum quadratum simul haberetur) siquidem illa in figuris, vix solâ plani cum plano aut solâ solidi cum solido comparatione contenta, utramque simul & plani & solidi aut etiam altioris speciei comparationem persæpe requirit. Immò, illâ methodo, solidorum centra vix directè, sed plerumque indirectè tantùm, putà mediante aliquo plano congruo deteguntur. Sed nec illa linearum centris inservit, nisi ipsæ lineæ, earumque proprietates quædam ex præcipuis ac specificis examinari geometricè possint: quæ omnia ex adjectis exemplis post ipsam methodum seorsim videre licet. De methodo Domini *De Fermat*, nisi eam adhuc videris, hoc scies, ipsam trianguli, atque planorum parabolicorum omnium & solidorum ab iis ortorum centra à priori elegantissimè ostendere. Verùm eandem aliarum figurarum centris accommodare, hîc labor; cùm ne quidem à posteriori, reliquis figuris huc usque inservierit; quanquam forsan, quominùs id fieri possit, nihil repugnet. Jam quòd ad tempus attinet, meministi opinor, Vir Clarissime, methodum vestram non ante annum 1644 Parisios missam fuisse, atque eandem tunc admodùm recens inventam: siquidem, ut ex vestris literis patet, vobis eâ adjutis, solidi trochoidis circa basim mensura paulò ante demùm paruerat, quam sub finem anni 1643 nondum habebatis: hæc enim sunt vestra verba in primâ vestrarum ad me epistola, *Quoad solida, nihil habeo.* Ego verò meâ methodo usus sum jam ab anno 1637, atque illius ope, & planorum parabolicorum omnium, & solidorum

centra jam tum inveneram; quorum centrorum quæ ad dimidios fusos parabolicos pertinent, enuntiavi eâ epistolâ quam ad R. P. Mersennum de vestris inventis scripsi anno 1643, quo primùm anno de Torricellio Parisus auditum est. Hæc, inquam, enuntiavi anno plusquàm integro priusquàm vestra illa methodus appareret; quæ vestris forsan, & nostris, unà cum aliorum inventis (ingeniosè procul dubio) collatis, tandem apparuit. Sed finge id quod non est, ipsam vestram ante annum 1644 fuisse inventam. Finge etiam id quod multò magis non est, ipsam cum nostrâ prorsus convenire, ac planè eandem esse: quid tum? An nos nostram statim ut minime nostram repudiabimus, qui eâ septennio integro ante prædictum illum annum 1644 tanquam nostra, immò verè nostrâ nemine reclamante usi fuerimus? Num potiùs præscriptionis jure nos tutabimur? & quibuscunque intercedentibus, nostram ut nostram lege asseremus, cùm in talium rerum possessione, vel unius diei præscriptionem valere, nemo inficiari possit? Multò ergo potiori jure nunc, quandoquidem nostra & tempore longè prior est, & penitùs diversa, intercessoribus valere jussis, & nostra tota manebit, qualiscunque tandem illa sit; & nostram ubique asseremus, & fructibus ab ea prodeuntibus tanquam nostris uti ubique licebit. Sed neque argumenta quæ produxisti, ejus ponderis esse videntur, ut illa quemquam ex iis qui nos vel mediocriter norunt, in tam sinistram de nobis opinionem pertrahe̅rent. Primùm enim, dum ais me nunquam ne verbum quidem fecisse de centro gravitatis trochoidis; cùm intereà tantoperè, & quidem meritò, gloriarer de omnibus aliis, quadraturâ, (comparationem cum circulo dicere voluisti) tangentibus, solidis, &c. nec verisimile esse, cùm reliqua omnia proponerem, de unico centro gravitatis siluisse; si illud tantùm speravissem; quod quidem problema, tuo judicio, nulli reliquorum posthabendum videtur: dum hæc ais, inquam, Vir Clarissime, ex tuo genio loqueris; nos, dum scripsimus, ex nostro etiam genio scripsimus. Tu, cùm magnifaceres centra, quia ex iis solida deducere posse confidebas, solida autem præcipuè intendebas; ideò centrorum inventionem magnificè extulisti, nec cæteris posthabendam, immò præhabendam judicasti. Ego contrà, quia sine centris solida & quæsivi & viâ Geometricâ inveni; datis autem solidis, statim, & absque labore centra sequebantur. Ideò centra ne respexi quidem, neque ad ea unquam animum applicui; certus omninò ex præmissa nostra methodo, dato plano quod dudum habebam, sola solida mihi quærenda superesse; centra autem simul cum plano & solidis haberi. Quòd si apologo uti liceat; ego sim Æsopi illius Phrygis statuarius: plani trochoidis mensura, est mihi summi Jovis statua; mensura solidi, statua Neptuni; centrum autem, esto statua Mercurii. Jam adsit nobis è cœlo sub forma hominis ignoti Mercurius ipse, Jovis & Maiæ filius, interrogetque, Quanti statua Jovis? Indicabo sanè ego alicujus pretii. Interroget deinde de statua Neptuni: ego & ipsam alicujus pretii indicabo. Tandem interroget de sua ipsius Mercurii statua, quid ego? quid autem aliud nisi hoc? Amice, si priores illas duas emeris, tum tertiam hanc auctarium tibi dabo. Itaque, Vir Clarissime, quæ tibi Jovis aut Neptuni statua meritò fuit, illa nobis Mercurii tantùm statua extitit. Ignosce, si placet, stylo; hoc usi sumus ut mentem nostram aperiremus. De R. P. Mersenno, quid scripserit in ea epistola cujus verba toties repetita contra me adducis, nescio: quid autem illi dixerim ego planè memini, nec ipse omninò oblitus est; nec etiam illa quæ dixi malè congruunt cum iis quæ sæpius pro te citasti. Sed rursùs, nos ex mente nostra locuti sumus; ille, ut intellexit, sic scripsit: vos ex mente vestra interpretati estis; ac illa vestra interpretatio à nostra mente alienissima est. Omnibus tamen attentè consideratis, pace tuâ dixerim, Vir Clarissime, censui præcipuam malæ interpretationis culpam in vos recidere: neque enim verba illius, quæ

ipse adducis, à nostro sensu adeo aliena fuerunt, quin ab ijs verum illum nostrum sensum facilè perspexisses, si æqui interpretis personam tibi assumere voluisses. Scripseras ad ipsum te utrumque trochoidis solidum beneficio centrorum priùs inventorum detexisse: ac illud quidem quod circa basim, ut se haber reverà, enuntiaveras ut 5 ad 8; quod ille cùm verum sciret (jam dudum enim ego illi tale indicaveram) non ægrè persuasus est, & alterum quoque circa axem tale esse quale affirmabas ut 11 ad 18. Lætus itaque statim ille mihi per literas significavit habere se quod mecum communicare vellet. Adivi; epistolam tuam legi, ac circa illud postremum solidum tantùm quod circa axem, immoratus sum; quippequod nondum habebam, nisi in terminis vero admodùm proximis, extra quos excurrebat ratio illa à vobis assignata 11 ad 18. Hinc ergo, quia de nostris terminis nullum nobis supererat dubium, illicò animadvertimus rationem illam vestram 11 ad 18 verâ esse minorem. Cùm igitur super hâc re cogitabundus hærerem, tum R. P. ad me prior, Quid ergo, inquit, dices de clarissimo Torricellio? nonne insignium adeò theorematum cognitionem ipsi te debere fateberis? Faterer, respondi, si vera essent; at talia non esse certus sum: miror sanè quod vir talis falsum pro vero nobis velit obtrudere, nec aliud suspicari possum, nisi quod ille mechanicâ quâdam ratione, per approximationem, hujusmodi rationem à vero non admodum longè aberrantem invenerit, existimaveritque veram rationem non posse deregi; ac proinde suam haud veram esse, à nemine posse demonstrari. Hæc, inquam ego tum, oratione, fateor, planè scyticâ; quam ille suâ ad vos epistolâ lenivit, pro suo genio qui omninò mitis est, ut ex stylo ejus satis perspicere potuistis. Jam, cùm dixi, Faterer me debere, si vera essent; planum est me non intellexisse de solido circa basim quod jamdiu ante vos habebam, & habere me ad vos scripseram; neque de centro trochoidis, quod dato tali solido, unà cum plano latere non poterat. Intellexi ergo de solido circa axem ac de centro hemitrochoidis quod ab eo dependet, quæ etiamsi brevi habiturum me confidebam, tamen jure præscriptionis, vestra fuissent, si vestra illa enunciatio cum vero congruisset. Hinc sanè nemo non videt minimè difficile fuisse, ex verbis epistolæ R. Patris quæ vos toties citavistis, verum sensum qualem jam attulimus, elicere: sed nescio quo fato aliter accidit unde lis hæc pro re nullius fere momenti, putà pro nugis nostris, ut ipse sæpe loqueris, inter nos suscepta est. Itaque, ne quid in posterum simile accidat, si tale commercium inter nos continuetur, oro vos ubicunque agetur de propositione Mathematica cujus discussio ad me pertinebit, ne cujuscunque literis fidem habeatis, nisi manu meâ illæ obsignatæ sint: sic enim fiet ut ego mea tantum, non etiam aliorum scripta, ex meo sensu interpretari tenear. Nam, pace amicorum hoc dictum esto, hac in materia, soli mihi fidere assuevi, jamdudum expertus, interpretes plerosque, vel dum amicis blandiri appetunt, vel dum rem non satis intelligunt, omnia literis obscurare ac prorsùs deformare. Unde qui tales literas accipiunt, illi, dum vel placitis laudibus ac blanditijs avidè sese ingurgitant, vel quod obscurum est ad placitum sibi sensum detorquent, fit necessariò ut & scribentis & primi authoris verum sensum longè relinquant. Ac hujusmodi quidem allucinationis exemplum afferam ex tuis ipsius literis, ex proprio tuo sensu, sine interprete ad R. P. Mersennum scriptis, in quibus hæc habes: *Tibi verò, vir clarissime, corollariolum mitto ex ipsis hyperbolis deductum. Quadratura quadam est, quarum centenas, immò infinitas poteram mittere, nisi vidissem satis superque esse unam, ut statim omnes emergant.* Deinde in ijs quas ad nos scribis, quas ipse R. P. etiam ante nos legerat, hæc habes: *Si unius hyperbolæ primariæ quadratura tam diu quæsita est, nos pro una infinitas damus.* Ex quibus verbis statim existimavit R. P. primariæ hyperboles

quadraturam à te inventam fuisse. Itaque cùm aliquo post tempore, de ipsis quadraturis cum eo colloquerer, dicerem que non difficulter illas assecutum esse me : Habes ergo tandem, inquit ille, hyperbolæ conicæ quadraturam? Nequaquam, respondi; neque enim legitima hæc, & nothæ illæ iisdem legibus additæ sunt. Me misellum, inquit, quantâ spe decido, qui ubi Cleopatræ aut etiam majoris pretii unionem speravi, ibi vitreas tantùm ampullas reperio! Sed de hoc ipse forsan rescribet : ego verò ideò scripsi, ut tali exemplo monerem hac in materia non esse tutum interprete uti; cùm etiam absque hoc tantæ eveniant allucinationes. His ergo nostris rationibus, acerbissimæ vestræ accusationis argumentis luculenter respondisse, atque cumulatè satisfecisse speramus. Nunc verò

Aspice num mage sit nostrum penetrabile telum?

Videamus, inquam, nunc, num sit quod de vobis multò potiori jure queri possim. Ac primùm. Nonne vos trochoidem nostram, postquàm & à R. P. Mersenno & à nobis moniti estis, jam à multis annis eam nostram esse, eamque brevi à nobis in lucem emittendam, postquàm vestris ad ipsum R. P. & ad me literis polliciti estis vos talem messem nobis relicturos intactam; tamen omni jure, ac vestrâ etiam fide violaris, tanquam vestram non literis modo manuscriptis (quanquam neque hoc ferendum fuerit) sed libello ad id prælis commisso, vulgavistis? idque interim, ac eodem prorsùs tempore quo continuis vestris literis contraria promitteretis? Hæccine vestra religio? hæc consuetudo? Quòd si ego huc usque de tali injuria pro rei acerbitate questus non sum, fateor, soli ne id facerem vicerunt communes amici. Quid autem lucri feci illis obtemperando? nempe crevit vobis fiducia, quia me bardum, qui illatarum injuriarum nihil sentirem, existimavistis. Attamen si ad paucula verba quæ super hâc te ad vos scripsi animum adverteritis, facilè ex iis percipietis de me dici posse:

Vultu simulat : premit altum corde dolorem.

Nonne ergo ipse prior idem quod vos, sed non absque causa clamare debui, *Vim patior; incredibile est quanto desiderio expectem responsum super hac re.* Quibus sanè verbis, ac multò etiam pluribus cùm ad R. P. Mersennum tum ad amplissimum D. *de Carcavy* scriptis, non obscurè significavistis vos, nisi coram vobis purgati fuerimus, in nos acerbius quidpiam omninò statuisse; ut sic & injuriâ, & mulctâ simul afficeremur. Sed de hoc satis : nunc ad alia capita transeamus.

Rursùs igitur, nonne primus omnium parabolas ego cum helicibus comparavi secundùm longitudinem? Nonne jam annus quintus excurrit, ex quo tale theorema vulgavi, idemque meo nomine prælis mandavit R. P. Mersennus? nonne vos ab amicis rescivistis, ac tum demum anno 1645 ad id animum applicuistis? Habeo sanè super hâc te vestras ad vestros amicos Romanos literas vestrâ manu ac vestro idiomate scriptas. Quid tum? Jam vos palam, omnibus ferè vestris literis gloriamini, non solùm parabolam conicam cum helice Archimedea comparasse, sed & reliquas parabolas cum propriis suis helicibus, immò & quemlibet helicis arcum vel partem, sive ex centro incipiat sive non, & sive primam revolutionem excedat sive non, demonstrasse cuidam lineæ parabolicæ esse æqualem. Quid hoc rei est? Gloriaris de rebus nostris tanquam si tuæ illæ sint; atque id postquam nostras esse sic rescivisti, ut nisi rescivisses, nequidem de illis forsan unquam somniasses. Nec est quod fingas existimasse te nos solam helicem Archimedeam considerasse; nimis enim frigidum fuerit figmentum, & absque ullo fundamento; cùm una eademque sit illius & cæterarum, demonstrationis via & methodus, quam qui invenerit, omnia procul dubio invenerit, si modo voluerit, nempe hæc, Quævis parabola unà cum helice sibi propriâ sic se habet, ut si portio axis parabolæ

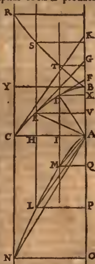
parabolæ, comprehensa inter ordinatim applicatam ad axem, & tangentem à termino applicatæ ductam, æqualis esse intelligatur circumferentiæ circuli primæ revolutionis in helice : (intellige helices planas ; nos enim conicas quoque cum parabolis comparavimus) applicata autem æqualis semidiametro ejusdem circuli : tum, quæ inter verticem & applicatam interjicitur parabola, æqualis sit longitudine helici primæ revolutionis. Quòd si in eadem parabola sumatur à vertice quævis portio ; à principio autem helicis propriæ sumatur etiam portio, à cujus termino ducta recta ad helicis centrum, æqualis sit rectæ à termino sumptæ portionis parabolæ ad axem applicatæ : erunt & hæ portiones æquales. His sic à nobis inventis, si quis quidpiam addiderit ; aut si imitando similia effecerit, habeat sanè quam ipse laudem merebitur. In helicibus conicis existente cono recto, omnia se habent ut suprà ; modò tantùm loco semidiametri circuli primæ revolutionis, qui circulus in ipso cono existit, sumatur recta à vertice coni ad circumferentiam ejusdem circuli terminata. Hîc autem, centrum helicis erit vertex coni ; & quæ à centro ad puncta helicis ducuntur rectæ, erunt portiones laterum coni ejusdem. At equidem resciviſſe me fateor, dices. Verùm demonstrationem proprio marte adinveni. Esto : quid inde? Sanè si quæstionem proposuissem tantùm, non etiam solvissem, illa tua fuisset, qui prior solvisses : nunc quando prior solvi ego, & solutam vulgavi, mea est ; nec mihi, etiamsi omnes conentur, verè eripi potest. An, quæso, meæ aut etiam vestræ sunt parabolarum Domini *de Fermat* quadraturæ? aut spatiorum helicum cum circulis comparationes, quas ambo proprio marte invenimus? Quid de ipsis speretis vos, nescio sanè : ego certè, quanquam mea multò quàm vestra potior sit causa, ipsam tamen prorsùs desero. An meum est solidum vestrum hyperbolicum? an mea hyperbolarum vestrarum novarum quadratura? minimè verò ; attamen amborum ipsorum theorematum demonstrandorum una eademque est methodus, quam nos invenimus, & jampridem ad vos misimus vestro solido accommodatam, quamque iisdem hyperbolis accommodare non admodùm difficile est. Reperi quoque in illarum singulis, ex parte unius tantùm ex asymptotis, resecari posse spatium planum acutum & versùs acumen infinitum, quod tamen spatio finito atque undique clauso sit æquale. Obiter autem, ut verum fatear, nonne istis hyperbolis occasionem dedere parabolæ illæ Domini *de Fermat?* Nonne etiam illa nostra propositio de helicibus & parabolis longitudine æqualibus ansam præbuit illi alteri de qua adeò magnificè gloriaris? de illo, inquam, helicum genere quæ describuntur, dum recta uniformiter quidem circa manens centrum circumvolvitur, at punctum interim secundùm illam rectam fertur proportionaliter, quam quidem helicem rectæ cuidam asseris æqualem? Quæ autem sit illa recta, & quomodo ad datas se habeat, tanquam si Cereris Sacrum sit, planè reticuisti. Non ramen nos latet, eam æqualem esse hypotenusæ cujusdam trianguli rectanguli, cujus unum laterum æquale sit rectæ à centro ad terminum helicis ductæ : sedenim, quis triangulum istud dabit, ex hypothesi quod dentur positione & longitudine duæ ex iis rectis quæ à centro ad helicem terminantur? vel contrà, quis triangulo dato, dabit helicem? Utrumque si dederis, Vir Clarissime, vel alterutrum tantùm, ego munus id eo munere compensabo, quod vel ipse duplo pluris facias. Sed cave : hîc via præceps est & lubrica ; ac talis, ex qua ad parallogismum lapsus sit facillimus : nisi tamen quod petimus datum fuerit, propositio nullius pretii remanebit. Illud etiam non videris animadvertisse, propositionem hanc non esse novam, sed ipsam prorsùs eandem esse cum antiqua illa, quâ quæritur linea per quam pondus ad centrum terræ laberetur secundùm uniformem ad suum horizontem inclinationem ; talis enim linea ad tale genus pertinet. Quàm

verò minimè nova sit propositio, testabitur ipse R. P. Mersennus. Verùm, quia datâ inclinatione, hoc est, dato specie triangulo rectangulo, datoque centro helicis in centro terræ, dato insuper uno ejusdem helicis puncto, putà in ipsius terræ superficie; non poterat geometricè, nec etiam suppositâ circuli quadraturâ, assignari aliud in ea punctum; ideò illa inculta permansit, ac ferè ex toto neglecta est. Neque rursùs, idem solum aut primum genus est earum helicum, quæ finitæ cum sint, infinitas tamen circa punctum quoddam revolutiones absolvunt: tales enim & longè antiquiores sunt illæ quæ in globis terrestribus atque in mappis mundi, loxodromias seu ventorum vias referunt, quæque præter has illud habent peculiare, quòd ex utraque parte finitæ sint; & tamen circa utrumque polum infinities circumvolvantur. Cumque sic imitando, res Geometricæ in infinitum plerumque abeant, quidni etiam linea recta circa manens centrum æqualiter vel proportionaliter circumvoluetur, ac simul punctum mobile vel æqualiter vel inæqualiter secundùm rectam eandem legibus quibusdam feretur vel à centro, vel versùs centrum, ad describenda infinities infinita helicum genera? Ex iis autem, genus illud novimus, cujus helices hyperbolis conicis demonstrantur æquales, quidni rursùs licebit, pro infinitis hyperbolis effingendis, imitari vigesimam primam propositionem libri primi Conicorum Apollonii, sicuti pro infinitis parabolis vigesimam propositionem imitatus est D. *De Fermat*? Verùm hîc omnia persequi nec lubet nec vacat. Superest unum expostulationis nostræ caput circa novas nostras quadratrices lineas, quas non ita pridem, vix scilicet ante biennium invenimus, nec multò post ad vos misimus. Possem hîc, & sanè potiori jure, eadem verba adjicere quæ vos circa centra gravitatis: *Utinam non misissem*; sed illa nimis acerbam, prorsùsque contumeliosam præ se ferunt exprobrationis speciem: quin contrà, & misisse lætor; quandoquidem ita vobis placuerunt; & nisi tunc misissem, nunc utique mitterem. Illas, inquam, lineas ex quibus fiunt spatia plana longitudine infinita, quæ tamen spatiis finitis undique clausis sunt æqualia; vos lineas Robervallianas, ab inventoris nomine, vocavistis; ego voco quadratrices, ab earum officio, & inventionis fine: ego enim figurarum quadraturæ intentus, dum nihil negligo eorum quæ ad propositum illum finem conducere videntur, præcipuè verò ipsarum figurarum in alias figuras transmutationem experior; in tales lineas incidi hac ratione.

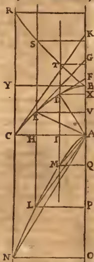
Esto in figura, trilineum ABC quale requiritur, cujus punctum B sit vertex; recta AB altitudo; recta AC basis; & linea BC sit quæcunque curva: nihil enim refert qualiscunque accipiatur. Verùm, ut ex infinitis generibus aliquod hic eligamus, quod vobis instar omnium sit, esto illa curva BC ad easdem partes cava, putà ad partes ductæ rectæ BC, ita ut ipsa tota sit extra triangulum ABC, & eadem à puncto B ad punctum C, continuè recedat à recta BA, & ad rectam CA propiùs accedat; sumpto utroque, recessu scilicet & accessu, secundùm perpendiculares à curva BC ad rectas BA, AC ductas. Tum in ipsa curva BC, sumantur continuè à vertice B, quæcunque & quotcunque puncta D, E, &c. à quibus ductæ intelligantur rectæ DF, EG, &c. tangentes curvam BC in iisdem punctis D, E, &c. atque occurrentes axi AB producto ultra verticem B, in punctis F, G, &c. Intelligatur quoque per punctum C recta CK tangens eandem curvam BC in puncto C; quæ quidem recta CK vel eidem axi AB occurret ultra verticem B, vel eadem CK eidem AB erit parallela, coinciditque cum recta CR, quam ipsi AB ponimus esse parallelam. Præterea, à punctis D, E, &c. ducantur rectæ DI, EH axi BA parallelæ, atque occurrentes basi AC in punctis I, H, &c. & per punctum A, ipsis tangentibus DF, EG, &c. ducantur totidem rectæ ordine parallelæ, AM qui-

Supple rectam lineam BC à puncto B ad punctum C ductam.

dem ipsi DF; AL autem ipsi EG, &c. occurratque recta AM rectæ DI productæ in M, atque ita habebimus punctum M: occurrat quoque recta AL rectæ EH productæ in L; atque ita rursùs habebimus punctum L & sic de cæteris. Quo pacto habebimus à puncto A infinita alia puncta continuo ordine disposita M, L, &c. Per hæc intelligatur ducta linea continua AML &c. illa erit primaria nostra quadratrix: primariam vocamus, quia ipsa prima occurrit, & prima à nobis vulgata est; cæteræ autem ab illa primaria, saltem per occasionem, dependerunt. Quòd si tangens CK occurrat axi AB, ductâ rectâ AN parallelâ eidem CK, & productâ rectâ RC donec ipsi AN occurrat in N, erit & punctum N in eadem quadratrice AMLN. Aliàs autem, si CK coincidat cum ipsa CR (cùm scilicet ipsi AB fuerit parallela) linea AML in infinitum producta nunquam concurret cum recta RC etiam infinitè producta; sed hæc RC producta, ipsius AML productæ erit asymptotos, & punctum N à puncto C infinitè distabit. Potuit etiam loco trilinei, assumi bilineum aut aliud quodcumque spatium; sed omnia exequi unicâ epistolâ, nec possumus nec volumus, ut ii quibus inventum placuerit, habeant quod imitando addere possint. Jam ergo, in assumpto exemplo trilinei ABC, positis quæ supra diximus, sit quadrilineum quoddam ABCN duobus curvis BC, AN, & duabus rectis BA, CN comprehensum; sive id quadrilineum finitum sit versùs N, sive idem in infinitum versùs illam partem abeat: hoc ergo spatium ABCN dico esse trilinei ABC duplum. Demonstratio nostra omninò universalis erit pro omnibus curvis, & spatiis; poteritque more Veterum, per duplicem positionem institui, nos tamen per infinita sic procedemus. Ducantur, aut duci intelligantur à puncto A ad infinita seu indefinita numero puncta curvæ BC, rectæ AD, AE, &c. ut sic spatium ABC in infinita trilinea resolvi concipiatur; quæ quidem trilinea totidem rectis AD, AE, &c. ac portionibus interceptis curvæ BC comprehendantur; spatium autem ABCN in totidem quadrilinea resolvatur, quot sunt trilinea quæ quadrilinea à parallelis DM, EL, &c. ac portionibus interceptis curvarum BC, AN constituantur: erunt ergo singula trilinea cum singulis quadrilineis, super eâdem basi constituta ad puncta D, E, &c. propter tangentes, (absque tangentibus enim falsum esset) atque in iisdem parallelis; putà trilineum ad AD cum quadrilineo ad DM, in iisdem parallelis DF, MA; trilineum autem ad AE, cum quadrilineo ad EL, in iisdem parallelis EG, LA, atque ita de reliquis. Quapropter singula quadrilinea singulorum trilineorum erunt ut dupla, ex legibus infiniti; & omnia omnium, hoc est totum spatium ABCN quod ex omnibus quadrilineis constat, duplum erit totius spatii ABC, quod constat ex omnibus trilineis. Patet autem eodem ratiocinio, quadrilaterum ABDM, trilinei ABD duplum esse; & quadrilaterum ABEL, trilinei ABE, & sic de cæteris. Si ergo trilineum CAMLN totum extra trilineum ABC existat, ut in assumpto exemplo, erunt duo illa trilinea æqualia, sive punctum N in infinitum abeat, sive non. Quòd si prætereà, eo casu quo curva AMLN tota extra trilineum ABC existit, ex punctis D, E, &c. ducantur rectæ DX, EV basi CA parallelæ, atque



axi occurrentes in punctis X, V, &c. fient spatia BDX, BEV, &c. spatiis AIM, AHL, &c. singula singulis æqualia. Quoniam enim, ex demonstratione universali præmissa, totum quadrilineum ABDM, totius trilinei ABD, duplum est; & ablatum parallelogrammum AXDI, ablati trianguli AXD est quoque duplum, erit & reliquum reliqui duplum : reliquum autem primum constat ex duobus trilineis BDX, AIM; secundum verò est solum trilineum BDM: quare duo illa trilinea BDX, AIX simul, hujus solius BDX dupla sunt, ac proinde æqualia sunt inter se trilinea illa BDX, AIM. De cæteris eadem est demonstratio. Sed & trilineum BDF bilineo AM, & trilineum BEG bilineo AL æquale esse facile demonstrabitur; & multa alia quæ consultò omittimus. Potest quoque ad solida extendi hoc nostrum inventum; si scilicet, prædictæ omnes figuræ circa axem AB utrinque productum quantùm satis, convertantur ; ac spatia quidem solida ad rectas AD, AE, &c. constituta, pro pyramidibus; spatia autem solida ad parallelas DM, EL, &c. pro parallelepipedis accipiantur. Quo pacto solidum descriptum à quadrilineo ABCN, sive illud versùs N infinitum sit, sive non, triplum erit solidi à trilineo ABC descripti : & solidum à trilineo ACN in assumpto exemplo descriptum, duplum erit solidi à trilineo ABC descripti; & hinc habentur innumeræ species solidorum infinitè finitorum.



Possunt etiam rectæ MI, LH, &c. produci versùs puncta D, E usque ad puncta T, S, &c. ita ut rectæ IT, HS, &c. æquales sint rectis DM, EL, &c. & per puncta BTS, &c. potest intelligi curva quadratrix BTS : hæc autem illa erit quam ad vos misimus; de qua ideò nihil est quod hic addamus: quòd autem illa secundaria sit, manifestum est.

Tandem, ductis tangentibus DF, EG, &c. ut suprà; potuit loco puncti A assumi aliud quodcunque punctum B vel C, vel quodvis in plano trilinei ABC quantumvis producto existens, per quod ducerentur rectæ tangentibus illis parallelæ; quemadmodum hic ductæ sunt AM, AL, &c. & per puncta D, E, &c. duci quoque potuerunt totidem aliæ rectæ inter se & cuivis datæ parallelæ, quæ cum tangentibus & tangentium parallelis parallelogramma constituerent, qualia sunt AFDM, AGEL, &c. unde aliæ infinitæ generabuntur quadratrices: sed hæc nunc indicasse sufficiat. Vides itaque, Vir Clarissime, quàm latus hoc loco ad imitandum pateat campus. Vides etiam alia protsùs à tuis hyperbolicis diversa genera solidorum infinitorum, & multitudine innumerabilia, & illis forsan, magis miranda; eo quòd hæc nostra de externa sua latitudine nihil unquam remittant, ut vestris necessariò accidit. Neque tamen nostra nos ad vestrorum imitationem effinximus (quod si factum fuisset, quantumcunque abstrusa, vobis tamen tribueremus) sed hæc à nostro linearum quadraticarum invento sic dependerunt, ut ab illis sejungi non potuerint. Vides denique nos nec plana, nec solida infinitè finita præcipuè intendisse; sed nostras quadratrices, quæ ex figurarum in alias transformatione nascuntur, ex quarum origine talia spatia necessariò consecuta sunt; & nobis aliud animo agitantibus, sese ultro obtulerunt.

Jam, quadratura parabolæ quomodo ex prædictis facile deducatur, sic ostendimus. Intelligatur in hoc nostro exemplo, curva BC esse quævis parabola,

bola, sive conica illa sit, sive alia: (unica enim omnibus inservit demonstratio) cujus axis sit A B; vertex B; basis A C; & recta B Y ipsam tangat in vertice, occurratque rectæ N C productæ in puncto Y, ut sit parallelogrammum A B Y C spatio trilineo parabolico A B C circumscriptum. Ducantur etiam, vel duci intelligantur à singulis punctis curvæ A M L N, purà à punctis M, L, N, &c. rectæ M Q, L P, N O, &c. basi A C parallelæ occurrentes axi B A producto in punctis Q, P, O, &c. quo pacto, constituetur aliud quoddam trilineum A N O, cujus axis erit A O, vertex A, & basis N O. In hoc trilineo, rectæ ad axem ordinatim applicatæ erunt M Q, L P, N O, &c. quæ ordinatim applicatis in parabola, D X, E V, C A, &c. singulæ singulis debito ordine sumptis, erunt æquales; at portiones axis A O inter verticem A, & applicatas interceptæ, purà A Q, A P, A O, &c. æquales erunt rectis F X, G V, K A, &c. singulæ singulis debito ordine sumptis: quæ omnia ex constructione manifesta sunt. Est autem in quavis parabola, ut F X ad X B, sic G V ad V B, & sic K A ad A B, propter tangentes D F, E G, C K. Quare erit quoque, positâ in nostro exemplo quâvis parabolâ B D E C, ut A Q ad B X, ita A P ad B V, & ita A O ad B A, &c. Est ergo curva A M L N parabola ejusdem speciei cum parabola B D E C; cùmque A C, O N sint æquales, erit spatium A O N ad spatium A B C, ut axis A O ad axem A B. Ostensum autem est spatium A B C æquale esse spatio A C N; quare spatium A O N ad spatium A C N est ut A O ad A B: & componendo, parallelogrammum A C N O ad spatium A C N, sive ad spatium A B C, se habet ut recta O B ad rectam B A. Sed ut parallelogrammum A Y ad parallelogrammum A N, ita recta A B ad rectam A O; ergo, ex æquo, in ratione perturbata, erit parallelogrammum A Y ad spatium A B C, ut recta O B ad rectam A O. Datæ autem sunt rectæ illæ O B, A O, quia A O ipsi A K datæ æqualis est, ex constructione: ergo data est ratio parallelogrammi A Y ad spatium trilineum parabolicum A B C, ut propositum est; & est talis ratio ut recta composita ex A K & A B, ad rectam A K.

Simili ratiocinio, in solidis ipsarum parabolarum circa axem A B conversarum, concludemus universaliter sic esse cylindrum A Y ad solidum A B C, ut recta composita ex A K & dupla ipsius A B, ad ipsam eandem A K.

Quomodo ergo in ejusmodi quadratrices inciderim, jam tenes: quàm verò ingenuè ad vos miserim, ipsi scitis: sciunt & Academiæ nostræ proceres, qui omnes epistolam nostram, antequam ad vos mitteretur, perlegerunt; sciunt & multi alii cum quibus eandem ego, vel amici communicavimus; sciunt, inquam, illi omnes, me expressis verbis, veluti florem quemdam ex horto illo delectum, vobis indicasse quadraturam parabolæ primariæ seu conicæ. Quis igitur meo loco constitutus, fore speravisset ut Clarissimus Torricellius, inde per imitationem, cæteras parabolas quadrandi arreptâ occasione, (quod nullius fuit negotii, quia una eademque est omnium methodus) hæc verba subjiceret: *Prædicta methodi, tum pro quadraturis, tum pro tangentibus, sunt quas minimi præ cæteris ego facio; non tamen patiar mihi illas eripi.* Et hæc: *Linea Robervalliana, si ortum ducat ex aliqua parabolarum, semper parabola evenit ejusdem speciei; quod ego novum esse scio, licet fortasse turpe videatur hoc fateri.* Et rursùs in alia epistola: *Quadraturas ad Clarissimum Robervallium mitto, fortasse ad subeundam eandem fortunam cum meo centro gravitatis cycloidis,* hoc est trochoidis. Atque ita, sicuti palam nos accusaverat Torricellius, tanquam si centrum illud nostræ trochoidis, à nobis illi surreptum fuisset, sic timere se simulavit, ne eodem fato illæ suæ (si Diis placet) parabolarum quadraturæ sibi à nobis eriperentur. Quis, inquam, hoc speravisset? Nam, Deum Immortalem! quid illis in quadraturis aut novum est aut ad Torricellium pertinet, ut ei possit eripi? An in universum quadraturæ illæ sunt Torricellii? Nequaquam. Pri-

mariæ enim five conicæ parabolæ quadratura Archimedis est; cæterarum autem, D. *De Fermat*: dico D. *de Fermat*; quia cæterarum illarum medium à medio Archimedis planè diversum est, & diversum esse debuit, quandoquidem ad illas, medium Archimedeum omnino ineptum est. Quòd si omnibus illud aptum fuisset; tunc, quantumvis ab eo diversum esset medium D. *de Fermat*, omnes tamen illas quadraturas uni Archimedi tribueremus, ac cæteras per imitationem inventas ad primariam remitteremus. Si quidem facile est inventis addere: authorem verò sese præbere, hoc opus hîc labor est. Non igitur aut Torricellii, aut nostræ sunt parabolarum quadraturæ in universum; nec illæ aut ipsi aut nobis eripi possunt. Superest igitur ut de medio decertemus. Sed ad quid hoc? Quandò, sive ego vicero sive Torricellius, ipsa res vel Archimedi cedet, vel D. *de Fermat*. Attamen quod in eo medio præcipuum est, nostrum est, ipso Torricellio concedente, nempe nostra quadratrix, quam ipse Robervallianam vocat. Quid igitur ipsi relinquitur? Forsan, inquiet aliquis, vult Torricellius suum esse, quòd usus fuerit complementis æqualibus parallelogrammorum, eaque prædictis Robervallianis quadratricibus accommodaverit, ut duplici positione inscriptorum & circumscriptorum uteretur more Veterum. Atqui ob tantillum, quod nec ipsum universale est, adeo sollicitum esse, adeoque invigilare ne sibi eripiatur, pauperis cujusdam est, qui hoc unum possideat, non autem ditissimi Torricellii, qui infinitos rerum multò pretiosiorum possidet thesauros. At, dicet alius: Robervallius unicam parabolam primariam seu conicam, Torricellius verò omnes omninò quadravit. Robervallius scilicet unicam! Quis autem nos usqueadeo cæcos existimaverit? præcipuè cùm una eademque sit omnium methodus quam suprà ostendimus? Egone in eo quod difficilius fuit, si tamen quid ibi difficile dici potuit, nempe in quadratricibus ipsis detegendis, atque in primariæ parabolæ quadratura perspicax, in facillimis repentè cæcutiero? Quin ergo saltem enuntiavisti? Satis fuit unam enuntiare; cæteræ sponte sequebantur. Quid hoc rei est? An tandem ego ea omnia ignorasse censebor, quæcunque unicâ quam ad Torricellium scripsi epistolâ expressis verbis non comprehendi? Respiciat ille ad verba nostra, ut quid voluerimus intelligat: florem mittebamus, non arborem. Ac jam decennium est ex quo absolutis nobis illis parabolis, vix animo occurrit, nisi urgeat occasio, ut illas ampliùs nominem; Torricellio verò ipsæ novæ sunt, adeoque ipsarum ille non obliviscitur, ut magnum quid putet, si centum modis illas quadraverit, cùm tamen infinitis id fieri possit. Rursùs ergo, quid in illis quadraturis novum est quod ad Torricellium pertineat? Non video sanè: attamen scire gestio, ne quod illius est, quodque sibi eripi minimè passurum esse minatur, imprudentes auferamus.

Jam perspiciat quicunque Torricellii legerit epistolas, quàm multa prætertteam legitimæ expostulationis capita. Enimverò, illud ne viro ingenuo ferendum fuit, quod nobis comminando scripsit super aliâ quadam methodo centrorum gravitatis inveniendorum, quam habere se gloriatur? *Oro vos*, inquit, *ne inter vestra hanc etiam habeatis: nam hoc esset tollere penitus omne litterarum, scientiarumque commercium.* Quid aliud ad manifestum furem scribi potuit? Interim tamen, de illa methodo callidè ac de industriâ, tacuit Torricellius: ita ut si aliquam ego aut alius quispiam proferamus, jam ipsi liberum sit illam astutiis ejusmodi, atque in longum prospicientibus verbis, sibi affetere, ac de ea locutum esse se, suâ fide affirmare.

Quis rursùs feret quod ad R.P. Mersennum scribit, cùm de centro nostræ trochoidis loquitur? *Quod certe* (ait) *immò certissimè scio non habuisse Robervallium, antequam demonstrationem meam videret; ut P.V. vel ipsemet, vel tandem universa Europa testis esse poterit.* De centro illo jam satis suprà, immò usque ad nauseam; nec circa illud universa Europa testis nobis formidanda;

quin, si fieri posset, præ cæteris optanda. Verùm, quid tale centrum ad universam Europam? Crede mihi, Clarissime Torricelli; esto (quod tamen sine arrogantia dici non potest) quòd in rebus Mathematicis ambo simus egregii ita ut paucos pares, nullos agnoscamus superiores: nequaquàm tamen, hoc pacto, tales erimus quos universa respiciat Europa; nempè misellos Geometras de nescio quo puncto disceptantes. Simus potiùs ambo, ego triginta millium peditum nostrorum veteranorum dux, tu totidem vestrorum: adsit utrique equitatus tali numero debitus, nihilque desit armorum, annonæ, aut fidei militum erga duces; ac tunc universa forsan nos respiciet Europa.

Hoc loco, vir Clarissime, cogitare subiit qui fieret, ut cùm semel ad te scripserim (prima enim alia nostra de te epistola ad R. P. Mersennum directa fuerat) idque stylo qui meo & amicorum judicio, nihil omninò acerbi, quanquam post ereptas à te nobis nostras trochoides, redolet; ipse tamen è contrario, aeri adeo stilo rescripseris; nec mihi soli, quo pacto faciliùs res componerentur, sed tribus (nescio num etiam pluribus) literis ad amplissimos celeberrimosque viros de me scriptis, haud alio argumento quamquòd existimares (nimis tamen leviter) centrum trochoidis ipsius tibi fuisse ereptum. Tantusne Torricellio earum quas suas putat, nugarum zelus (liceat eo tibi familiari nugarum vocabulo uti) ut statim atque eas sibi ereptas putaverit,

Irruat & frustra ferro diverberet umbras,

ne quidem cogitando quantas ille, cùm directè, tùm indirectè, ab aliis sumpserit, ob quas periculum sit ne quamvis placidos acriùs irritando, ipse vicissim pœnas luat? Atqui consentaneum erat, vir prudens cùm sit, ut meminisset hujus præcepti, quod qui dedit, is procul dubio fuit ad unguem factus homo; videlicet,

Qui, ne tuberibus propriis offendat amicum
Postulat, ignoscat verrucis illius.

Equidem, inter plurimas hujusce tam acris styli causas, hæc nobis videtur probabilior, quod tu, Vir Clarissime, spatium Mathematicum ingressus, seu fato seu sponte, viam à nostris jam ante plures annos tritam inieris, à qua huc usque parùm deflexeris; unde non mirum est si in easdem stationes, littora, portus, fluvios, & regiones incidas, quibus illi dudum detectis nomina indiderunt, eaque omnia in chartas intulerunt: ipse autem, cùm illa à te primùm detecta existimes, fit ut posteà indigneris si quis contrarium asseruerit, atque id quod verum est candidè enarraverit. Memineris ergo spatium illud infinities infinitè infinitum esse, idemque solidum, immò etiam plusquàm solidum, tibi verò nec pedes, nec pennas, nec alas deesse: deflectas ergo paululùm vel ad dextram, vel ad sinistram, vel suprà vel infra: curre, nata, vel etiam vola: hæc enim potes omnia, quæ sanè

pauci, quos æquus amavit
Jupiter, aut ardens evexit ad æthera virtus,
potuere;

sic enim fiet, ut, quod non semel, immò pluries jam præstitisti, & novas regiones detegas, & viros doctos non solùm adeò feliciter imiteris, quanquam nec ipsum laude careat; sed, quod multò laudabilius est, teipsum viris doctis præbeas imitandum.

Huc usque pro nobis plura diximus: nunc pro divino Archimede pauca liceat. Bis, ut tua excuses, tantum virum in discrimen adducis, Vir Clarissime; semel pro libris tuis de motu projectorum; iterum autem, pro illâ tuâ minimè verâ ratione solidi trochoidis circa axem, ad suum cylindrum ut 11 ad 18. Ac primùm quidem, pro libris de motu projectorum hæc ais: *Archimedes supposuit olim projecta, non per parabolas sed per lineas spirales suas*

procedere. Hanc Archimedis suppositionem nullibi videre licuit in ejus operibus: commentarios autem, forsan, non omnes legi; sed nec eorum authoribus licuit tanto viro absurdas ejusmodi suppositiones affingere. Deinde, pro excusando vestro illo fictitio trochoidis solido, hæc scribis ad R. P. Mersennum: *Habemus apud Archimedem, prop. 2. de circuli dimensione, circulum ad quadratum diametri esse ut 11 ad 14: quaro ab ipso (Robervallio, supple) undenam putet me habuisse rationem quam ad numeros 11 & 18 reducebam?* Quæ post verba illa sequitur linea, solitam totius epistolæ redolet acerbitatem. Equidem Archimedes hæc habet: at non dissimulavit statim (nempe propositione tertia, quæ manifestò lemma est ad illam secundam) talem rationem 11 ad 14 non esse accuratam, sed tantùm veræ proximam: apud vos autem nihil tale habetur; sed vestram illam rationem 11 ad 18 tanquam accuratam proposuistis, ex invento priùs centro tanquam accurato deductam: immò, illam pro accurata exceperunt quicunque existimaverunt vos adeò candidos esse, ut nefas existimaretis ea enuntiare quæ vera non essent. Enimverò, Vir Clarissime, plerique ex nostris vix persuaderi potuissent, Torricellium nobilem adeò Geometram, aliquid putè Geometricum sine demonstratione affirmare voluisse. Sed nec illa vestra ratio 11 ad 18 ex terminis vero proximis ab Archimede assignatis pro circuli dimensione deducta est, cùm eadem extra ipsos terminos longè evagetur; unde non video quid vobis hîc proficiat Archimedis authoritas, præcipuè in materia purè Geometrica, ubi pro errore accipitur quidquid accuratè verum non est, quantumcunque illud ad verum proximè accedere deprehendatur.

Hic fieri posse video, ut aliquis hujusce nostræ epistolæ stylum ideò carpat, quòd ille nec amico, nec adversario convenire videatur; ut potè qui pro amico, acrior, pro adversario contrà, lenior quàm par sit appareat. Equidem, Clarissimum Torricellium adversarium habere absit ut unquam optaverim; adversarius sanè illi ego ero nunquam, nisi ipse prior talem me effecerit. Quòd autem amicum & cupierim & adhuc cupiam, argumentum certissimum est, quòd prior amaverim, ac nomen ejus celebre per Galliam, quàm maximè potui, reddiderim. Siccine ergo (urgebit censor) cum amicis tuis te gerere solitus es? Primùm quidem, apologiam contra acerbam ipsius accusationem mihi debui; deinde metui (fateor) ne ipse quem summopere amicum mihi cupio, ex illis esset qui aliena veluti perspicillis cavis respiciunt; sua, convexis aut iis forsan quæ plurimis faciebus distinguuntur, unde fit ut iidem aliena contractiora, sua verò ampliora aut numerosiora, aut etiam pulchris coloribus ornatiora quàm sint reverà videre videantur. Itaque admonere eum volui officiosè, ut amorem proprium alieno temperaret. Ac, ne ad excitandum duriusculus haberetur, stylum adhibui utcunque acutum & mordacem: sic enim fore speravi ut sapiens cùm sit, se ab amante pungi sentiret, atque ira ad redamandum acriùs incitaretur. Quanquam autem tot paginas minimè inutiles fore spero, doleo tamen quòd illas in tractando ejusmodi ingrato ac planè tædioso argumento insumere oportuerit; cùm alia ferè innumera longè suaviora, ac viris doctis, ut puto, acceptiora, cùm ex nobis, tùm ex nostris habeamus; qualia sunt quæ sequuntur. Circa analysim quidem, de æquationum recognitione, & emendatione, novâ prorsus methodo, de earumdem determinatione ac de ipsarum per locos proprios resolutione, atque compositione. Circa Geometriam, de locis planis, solidis, atque ad superficiem; ubi in specie, restituta habemus loca solida ad tres & quatuor lineas: de cylindris, & conis isoperimetris, cùm demptâ base, tum additâ: de iisdem sphæræ inscriptis, & circumscriptis, seu spatiorum solidorum, seu etiam superficierum tantum habeatur ratio; ubi mirabere forsan quâ ratione à nobis concludi potuerit, positâ sphæræ diametro 32 partium, axem

axem coni inscripti cujus superficies comprehensa base sit maxima, esse hanc apotomen $23 - \sqrt{17}$; si sphæræ superficies uno, duobusve, vel tribus aut pluribus circulis, in quotcunque & quascunque portiones secta sit, quamcunque ex illis portionibus cum alia ac cum tota comparamus, ac uniuscujusque centrum gravitatis assignamus. Circa cylindricas & conicas superficies scalenas, tum etiam circa tectas, mira habemus. Inter illa perpende qualenam sit hoc problema: Portionem superficiei cylindri tecti exhibemus, quæ superficiei datæ cylindri scaleni sit æqualis. Sed & istud: Dato quadrato, æqualem damus cylindricæ superficiei portionem, idque absolutè, nullâ suppositâ circuli quadraturâ, & exclusis cylindri basibus. Problemata atque theoremata innumera habemus soluta, cùm circa conicas sectiones, tùm circa alia fere omnia Geometriæ huc usque notæ tam theoreticæ quàm practicæ capita. Circa Arithmeticam, Musicam, Opticam, Astronomiam, Gnomonicam, & Geographiam,

Plura quidem feci, quàm quæ comprehendere dictis
In promptu mihi sit;

sed illa omnia vulgaria æstimo. Attamen, dic quibus in terris Luna minori spatio quàm 24 horarum nostrarum communium, bis oriatur, aut bis occidat ejusdem horizontis respectu. Facile quidem theorema, sed quod primâ fronte impossibile multis videatur. At Mechanicam à fundamentis ad fastigium novam extruximus, rejectis omnibus, præter paucos admodum, antiquis lapidibus quibus illa constabat; ita ut nunc octo contignationibus, hoc est totidem libris, absolvatur. Primus est de centro virtutis potentiarum in universum, an detur tale centrum, & quibus potentiis conveniat, quibus verò minimè; secundus de libra, ubi de æquiponderantibus; tertius de centro virtutis potentiarum in specie; quartus de fune mira continet; quintus de instrumentis & machinis; sextus de potentiis quæ in diversis mediis agunt; septimus de motibus compositis; octavus denique, de centro percussionis potentiarum mobilium. In his omnibus nulla admitto nova postulata, sed tantùm ea quæ vulgò recepta sunt apud Authores: quòd sanè exequi, quàm non facile opus sit, testes sunt quotquot huc usque de gravibus super planis inclinatis existentibus egerunt; inter quos & ipse haberis, Vir Clarissime, qui propositione prima libri primi de motu gravium descendentium, ad id demonstrandum novo postulato usus es, quod quivis non facilè concesserit, quia pondera quæ proponis, non librâ rigidâ & rectâ, ut fieri solet, sed fune molli ac perfectè plicabili invicem alligantur. Nos autem ad hoc, librâ utimur modo usitato dispositâ, cujus beneficio propositionem illam non aliter demonstramus, quàm aut vectem aut axem in peritrochio: eam autem jam ante quindecim annos invenimus, atque anno 1636 tanquam Mechanicæ nostræ prodromum, prælo commisimus atque vulgavimus, sed Gallico idiomate. Neque etiam eum tantùm casum consideravimus qui solus ab omnibus attenditur, cùm scilicet potentia pondus in plano inclinato positum retinens, agit per lineam directionis ipsi plano parallelam; sed & dum eadem linea directionis aliam quamcunque positionem obtinuerit: quo pacto, ratio ponderis ad potentiam infinitè mutatur. Ibi autem quiddam demonstravimus quod multis omninò paradoxum visum est; nempe, si intelligatur prælum aliquod duobus planis parallelis perfectè rigidis constans, quod ita disponatur ut ejus plana horizonti non sint parallela: tunc, quantâcunque potentiâ prematur prælum illud, planis semper perfectè planis ac parallelis inter se remanentibus, illa nullum pondus inter se retinebunt; sed illud pondus propriâ gravitate statim labetur inter ipsa plana, atque idem à prælo sese liberabit, nisi aliunde retineatur. Hæc quidem ad quintum nostrum librum pertinent. Libet autem ex quarto quoque hæc addere. Si tres potentiæ totidem funibus ad

communem nodum religatis agentes, (nodus eſt quodvis punctum in fune) æquilibrium conſtituant: tunc deſcribi poterit triangulum cujus centrum gravitatis ſit nodus ipſe, tres autem anguli ad tria funium puncta alicubi terminentur (infinita quidem deſcriberentur triangula, ſed omnia ſimilia) erunt autem tunc tres potentiæ in eâdem ratione cum tribus rectis à centro trianguli ad tres angulos terminatis; ita ut quælibet potentia homologa ſit ei rectæ quæ in fune ipſius exiſtit. Si quatuor potentiæ non exiſtentes in eodem plano, totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, æquilibrium conſtituant: tunc quod ſuprà de triangulo dictum eſt, de quadam pyramide tetragona verum erit. Hinc aliud paradoxum, funis horizonti minimè perpendicularis quantâ vi tendatur, ſi perfectè plicabilis, nullo modo autem rigidus ex ſe exiſtat, impoſito quocunque vel minimo pondere, aut ſi ipſe ex ſe gravis eſſe intelligatur, flectetur neceſſariò, vel rumpetur, nec viribus ullis fieri poterit ut rectus evadat. Similiter, tres vel quotcunque funes ad communem nodum religari, totidem potentiis in eodem plano exiſtentibus, quod planum horizonti non ſit perpendiculare, quibuſcunque viribus tendantur; impoſito quocunque vel minimo pondere, vel ſi ipſi funes per ſe graves eſſe intelligantur, nunquam tamen poterunt eò adduci ut in eodem plano conſiſtant. Tandem etiam, ex octavo libro illud habebis: Omnis ſectoris circuli ſemicirculo non majoris circa centrum circuli circumvoluti, exiſtente axe motus ad planum ejuſdem circuli ſive ſectoris, perpendiculari, centrum percuſſionis ſive impetus in rectâ angulum ſectoris bifariam dividente quæſitum, ſic reperietur: Ut chorda arcus ſectoris ad ipſum arcum, ita tres quadrantes ſemidiametri circuli ad rectam inter ipſius circuli centrum, & centrum percuſſionis ſectoris interceptam. Ex tali centro quod extra ſectorem aliquando exiſtet, ſi impetus ſectoris eo modo moti quo dictum eſt, excipiatur, productâ ad id rectâ angulum bifariam dividente, ſi centrum illud extra ſectorem excurrerit, erit impetus ille maximus omnium qui ex quovis puncto in eadem recta exiſtente excipi poſſunt.

De his & aliis agemus in poſterum, ſi ita tibi placuerit, Vir Clariſſime, poſtquam litibus valere juſſis, ſolidam inierimus amicitiam, quam, ut ſpero, non recuſabis. Illius autem leges, quòd ad litterarum commercium attinet, tales ſunto. Nihil tentandi gratiâ ſcribam. Quicquid ſcripſero, niſi de eo dubitare me, aut illud quærere ſcripſero, verum exiſtimaſſe cenſear. Quoties per otium licuerit alicujus enuntiati demonſtrationem mittere, mittam: niſi miſero, ſi cupias, quàm citò mittere tenear. His legibus, ſi quid addere, aut detrahere; immò, ſi ipſas prorsùs tollere, & alias ferre voles, licet. Memineris tamen, quæſtionibus agere tentandi gratiâ, odioſum eſſe atque amico indignum; neque enim omnia poſſumus omnes: tum etiam amicum delectare oportet, non torquere. Hæc ſi obſervaverimus, tunc procul dubio, & durabit amicitia; & dum uterque noſtrûm viciſſim & reciprocè docebit & docebitur, uterque amborum ſcientiam, ſalvâ tamen inventoris laude, poſſidebit.

DIVERS
OUVRAGES
DE
M. HUGENS
DE ZULICHEM.

DE

DE
LA CAUSE
DE LA PESANTEUR.

Pour trouver une cause intelligible de la pesanteur, il faut voir comment il se peut faire, en ne supposant dans la nature que des corps qui soient d'une mesme matiere, dans lesquels on ne considere aucune qualité ni aucune inclination à s'approcher les uns des autres, mais seulement des grandeurs, des figures, & des mouvemens différens; comment, dis-je, il se peut faire que plusieurs pourtant de ces corps tendent directement vers un mesme centre, & se tiennent assemblez à l'entour, qui est le plus ordinaire & le principal phénomene de ce que nous appellons pesanteur.

La simplicité des principes que j'admets ne laisse pas beaucoup de choix dans cette recherche; car on juge bien d'abord qu'il n'y a point d'apparence d'attribuer à la figure ni à la petitesse des corpuscules quelque effet semblable à celuy de la pesanteur, laquelle estant un effort ou une inclination au mouvement, doit vraisemblablement estre produite par un mouvement; de sorte qu'il ne reste qu'à chercher dans quels corps il se peut rencontrer, & de quelle maniere il peut agir.

Nous voyons deux sortes de mouvemens dans le monde, le droit, & le circulaire; & nous avons quelque connoissance de la nature du premier, & des loix que gardent les corps dans la communication de leurs mouvemens, lors qu'ils se rencontrent. Mais tant que l'on ne considere que le mouvement droit & les réfléxions qui en arrivent entre les parties de la matiére, on ne trouve rien qui les détermine vers un centre. Il faut donc venir nécessairement aux propriétez du mouvement circulaire, & voir s'il y en a quelqu'une qui nous puisse servir dans cette recherche.

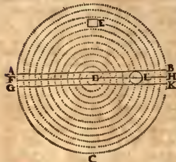
On sçait que M. Descartes a aussi tâché dans sa Physique d'expliquer la pesanteur par le mouvement de certaine matiére qui tourne autour de la Terre; mais on verra par les remarques que je feray dans la suite de ce Discours, en quoy sa maniére est diférente de celle que je vais proposer, & aussi en quoy elle m'a semblé défectueuse.

Il a consideré comme moy l'effort que font les corps qui tournent circulairement, à s'éloigner du centre, dont l'expérience ne nous permet pas de douter. Car en tournant une pierre dans une fronde, l'on sent qu'elle tire la main; & cela d'autant plus fort que l'on tourne vîte; jusques-là mesme que la corde peut venir à se casser. J'ay fait voir cy-devant cette mesme proprieté du mouvement circulaire par l'experience d'une table ronde qui tournoit sur un pivot; & j'ay trouvé la détermination de sa force, & plusieurs théorêmes qui la concernent, que nous examinerons icy quelque jour. Par exemple, je dis qu'un corps tournant horizontalement au bout d'une corde attachée à un centre, si cette corde a 9 pouces & 2 lignes de longueur, qui est celle d'un pendule à demi-secondes, & que chaque tour se fasse en une seconde, la corde sera tirée justement avec autant de force que si elle soûtenoit le mesme corps suspendu en l'air.

L'effort à s'éloigner du centre est donc un effet constant du mouvement

circulaire ; & quoy-que cet effet semble directement opposé à celuy de la gravité, & que l'on ait objecté à Copernic que par le tournoyement de la Terre, en 24 heures les maisons & les hommes devroient estre jettez dans l'air, je feray voir pourtant que ce mesme effort que font les corps tournans en rond à s'éloigner du centre, est cause que d'autres corps concourent vers le mesme centre.

Imaginons-nous qu'à l'entour du centre D il tourne de la matiere fluide contenuë dans l'espace ABC, dont elle ne puisse point sortir à cause des autres corps qui l'environnent. Il est certain que toutes les parties de ce liquide font effort pour s'éloigner du centre D, mais sans aucun effet, puis que celles qui devroient descendre pour succeder en la place des autres qui iroient vers la circonference, ont elles-mesmes autant d'inclination pour s'en approcher. Mais si parmi les parties de cette matiere il y en avoit quelqu'une, comme E, qui ne suivist pas le mouvement circulaire des autres, ou qui allast moins vite qu'elles ; je dis qu'elle sera poussée vers le centre : parce que ne faisant point d'effort pour s'en éloigner, ou en faisant moins que les parties du liquide voisines du costé du centre, elle cedera à leur effort, & leur fera place en s'approchant vers D, puisqu'elle ne le sçauroit faire autrement.



L'on peut voir cet effet par une experience fort aisée, mais qui est tres digne de remarque, parce qu'elle nous fait voir à l'œil quelque image de la pesanteur. Car en faisant tourner de l'eau dans quelque vaisseau qui ait le fonds plat, aprés y avoir mis de petites parcelles de quelque matiere un peu plus pesante que l'eau, afin qu'elles puissent aller au fonds, comme de la scieûre de bois, ou de la cire d'espagne concassée, l'on verra qu'au commencement, ces petits corps flottans dans l'eau à cause de son agitation, & suivans son mouvement circulaire, n'iront nullement vers le centre du vaisseau ; mais aussi-tost qu'ils commenceront à toucher au fonds, & que leur mouvement circulaire sera par là interrompu ou diminué, ils s'amasseront tous à l'entour du centre, s'en approchant par des lignes spirales, parce qu'ils suivent encore en partie le mouvement de l'eau. Cet effet se remarquera encore mieux, si on couvre l'eau d'un verre plat qui touche à sa surface, & qui bouche toute l'ouverture du vaisseau.

Que si dans le vaisseau l'on ajuste quelque corps solide, en sorte qu'il ne puisse pas suivre le mouvement de l'eau mais seulement s'approcher du centre, on verra qu'il y sera poussé en droite ligne. Comme si L est une petite boule qui puisse rouler librement entre les filets AB, GK, & un troisiéme un peu plus élevé FH, tendus par le milieu du vaisseau prés du fonds, lesquels filets soient arrestez immobiles pendant que l'eau tourne (ce qui se peut faire en arrestant subitement le vaisseau aprés l'avoir fait tourner, car l'eau continuera encore quelque temps le mouvement circulaire qu'elle aura conceu) l'on verra qu'aussi-tost cette boule s'en ira vers le centre D, & s'y tiendra arrestée. Et il faut remarquer que dans cette derniere expérience le corps L peut estre de la mesme pesanteur que l'eau, & que mesme l'expé-

rience en succedera mieux: de sorte que sans aucune difference de pesanteur des corps qui sont dans le vaisseau, le seul mouvement en produit icy l'effet.

Ce qui n'est pas ainsi dans l'experience que M. Descartes propose dans une de ses lettres imprimées: car il remplit le vaisseau ABC de menuë dragée de plomb entremeslée de quelque piéces de bois ou d'autre matiere plus legere que le plomb; & faisant tout tourner ensemble, il dit que les pieces de bois seront chassées vers le milieu du vase: ce que je puis bien croire, mais c'est un effet de la difference pesanteur du bois & du plomb; au lieu qu'il faut expliquer la pesanteur sans en supposer aucune, & en considerant tous les corps comme faits d'une mesme matiere. Il propose encore dans une autre lettre, de jetter dans de l'eau tournante de petits morceaux de bois, & il dit qu'ils s'en iront vers le milieu de l'eau: auquel endroit s'il entend du bois qui nage sur l'eau, comme il y a de l'apparence, il ne se fera point de concentration; mais s'il veut qu'il aille au fonds, ce sera veritablement la mesme experience que j'ay proposée un peu auparavant, & le bois s'amassera au centre; mais ce sera à cause qu'en touchant au fonds du vase son mouvement circulaire sera retardé, de laquelle raison M. Descartes n'a point parlé. *Lettre 32 du Tome 1.*

Or ayant trouvé dans la nature un effet semblable à celuy de la pesanteur, & dont la cause est connuë, il reste de voir si l'on peut supposer qu'il arrive quelque chose de pareil à l'égard de la Terre; sçavoir qu'il y ait quelque mouvement de matiere qui contraigne les corps à tendre au centre, & qui s'accommode en mesme temps à tous les autres phénomenes de la pesanteur.

Supposant le mouvement journalier de la Terre, & que l'air & l'ether qui l'environnent ayent ce mesme mouvement, il n'y a encore rien en cela qui doive produire la pesanteur: puisque suivant l'experience rapportée cy-dessus, les corps terrestes devroient ne point suivre ce mouvement circulaire de la matiere celeste, mais estre à son égard comme en repos, s'il falloit qu'ils fussent poussez par elle vers le centre.

Que si l'on supposoit que la matiere celeste tournast du mesme costé que la Terre, mais avec beaucoup plus de vitesse, il s'ensuivroit que ce mouvement rapide d'une matiere qui se mouvroit toute vers un mesme costé se feroit sentir, & qu'elle emporteroit avec elle les corps qui sont sur la Terre, de mesme que l'eau emporte la scieûre de bois dans nostre experience, ce qui pourtant ne se fait nullement. Mais outre cela, ce mouvement circulaire à l'entour de l'axe de la Terre ne pourroit en tout cas chasser les corps qui ne suivent pas le mesme mouvement, que vers ce mesme axe; de sorte que nous ne verrions pas les corps pesans tomber perpendiculairement vers la Terre, mais par des lignes perpendiculaires à son axe, ce qui est encore contre l'experience.

Pour parvenir donc à une cause possible de la pesanteur, je supposeray que dans l'espace spherique qui comprend la Terre & les corps qui sont autour d'elle jusqu'à une grande étenduë, il y a une matiere fluide qui consiste en des parties tres petites, & qui est diversement agitée en tous sens avec beaucoup de rapidité: laquelle matiere ne pouvant sortir de cét espace qui est entouré d'autres corps, je dis que son mouvement doit devenir en partie circulaire à l'entour du centre; non pas tellement pourtant qu'elle vienne à tourner toute d'un mesme sens, mais en sorte que la pluspart de ses mouvemens differens se fassent dans des surfaces sphériques à l'entour du centre dudit espace, qui pour cela devient aussi le centre de la Terre.

La raison de ce mouvement circulaire est que la matiere contenuë dans

quelque espace, se meut plus aisément de cette matiere que par des mouvemens droits contraires les uns aux autres, lesquels mesme en se refléchissant, parce que la matiere ne peut pas sortir de l'espace qui l'enferme, viennent nécessairement à se changer en circulaires.

L'on voit cét effet du mouvement lors qu'on essaye de l'argent par la coupelle ; car la petite boule de plomb où l'argent est meslé ayant ses parties fortement agitées par la chaleur, tourne incessamment autour de son centre, tantost d'un costé tantost d'un autre, changeant à tous momens & si viste que l'œil a de la peine à s'en appercevoir. Il arrive encore la mesme chose à une goutte de suif de chandelle, lors que la tenant suspenduë à la pointe des mouchettes on l'approche de la flame ; car elle se met à tourner avec une tres grande vitesse.

Il est vray que d'ordinaire cette goutte tourne toute d'un costé ou d'autre, selon que la flame de la chandelle vient à la toucher. Mais dans la matiere celeste, que j'ay supposée, il n'en doit pas arriver de mesme, parce qu'ayant une fois du mouvement en tous sens, il faut qu'il en demeure toûjours, quoy-qu'il soit changé en spherique, parce qu'il n'y a pas de raison pourquoy le mouvement d'une partie de la matiere l'emporteroit sur celuy des autres, pour faire que toute la masse tournast vers un mesme costé. Car au contraire la loy de la nature, que j'ay rapportée ailleurs, est telle dans la rencontre des corps qui sont diversement agitez, qu'il s'y conserve toûjours la mesme quantité de mouvement vers le mesme costé.

Et quoy-que ces mouvemens circulaires en tant de sens divers dans un mesme espace semblent se devoir contrarier & empescher souvent, la grande mobilité toutefois de la matiere, causée par la petitesse de ses parties qui surpasse de beaucoup l'imagination, fait qu'elle souffre assez facilement toutes ces differentes agitations. L'on voit quand on a broüillé de l'eau dans une phiole de verre, de combien de mouvemens differens ses parties sont capables ; & il faut se figurer la liquidité de la matiere céleste incomparablement plus grande que celle que nous remarquons dans l'eau, qui estant composée de parties pesantes entassées les unes sur les autres, devient par là paresseuse au mouvement ; au lieu que la matiere celeste se mouvant librement de tous costez, prend tres-facilement des impressions differentes par les diverses rencontres de ses parties, ou par la moindre impulsion des autres corps : & s'il n'en estoit ainsi, l'air ne cederoit pas si facilement qu'il fait aux mouvemens de nos mains. De sorte qu'il faut considerer que ses mouvemens circulaires de cette matiere fluide autour de la Terre, sont bien souvent interrompus & changez en d'autres, mais qu'il demeure pourtant toûjours plus de ces mouvemens-là que de ceux qui suivent d'autres routes ; ce qui suffit pour mon dessein.

Il n'est pas difficile maintenant d'expliquer comment la pesanteur est produite par ce mouvement ; car si parmi la matiere fluide qui tourne dans l'espace que nous avons supposé il se trouve des parties beaucoup plus grosses que celles qui la composent, ou des corps faits d'un amas de petites parties accrochées ensemble, & que ces corps ne suivent pas le mouvement rapide de ladite matiere, ils seront nécessairement poussez vers le centre du mouvement, & y formeront le globe terrestre s'il y en a assez pour cela, supposé que la Terre ne fust pas encore ; & la raison en est la mesme que celle qui fait dans l'experience expliquée cy-dessus que la scieûre de bois s'amasse dans le centre du vaisseau. C'est donc en cela que consiste vraysemblablement la pesanteur des corps, laquelle on peut dire que *c'est l'effort que fait la matiere fluide qui tourne circulairement autour du centre de la Terre en tous sens, pour s'éloigner de ce centre & pousser en sa place les corps qui ne suivent pas ce mouvement.*

Or

Or la raison pourquoy des corps pesans que nous voyons descendre dans l'air, ne suivent pas le mouvement sphérique de la matiere fluide, est assez manifeste; parce qu'y ayant de ce mouvement vers tous les costez, les impulsions qu'un corps en reçoit se succedent si subitement les unes aux autres, qu'il y intercede moins de temps qu'il ne luy en faudroit pour acquerir un mouvement sensible.

Mais comme il semble que cette seule raison ne suffit pas pour empescher que les corps les plus menus que l'œil puisse appercevoir, comme sont les brins de poussiere qui voltigent dans l'air, ne soient point chassez çà & là par la rapidité de ce mouvement, il faut ajoûter que ces petits corps ne nagent pas dans la seule matiere liquide qui cause la pesanteur, mais, qu'outre celle-cy, il y a dans les espaces qui sont autour de nous encore d'autres matieres de differens degrez, dont quelques-unes sont composées de particules plus grossieres, qui estant differemment agitées & reflechies entre elles, mais ne suivant pas le mouvement rapide de nostre matiere, peuvent aussi empescher ces corpuscules de la suivre & d'en estre emportez. L'on sçait qu'il y a autour de la Terre premierement les particules de l'air, lesquelles on fera voir un peu plus bas estre plus grossiéres que celles de la matiere liquide que nous avons supposée. On a de plus des raisons qui font croire qu'il y a encore une matiere dont les particules sont plus menuës que celles de l'air, mais d'un autre costé plus grossieres que celles de nostre matiere liquide. Car j'ay trouvé dans les experiences du vuide, outre la pesanteur de l'air, encore celle d'un autre corps invisible, qui fait sentir son poids là où il n'y a point d'air, ayant veû, non sans étonnement, que ce poids soûtient l'eau suspenduë dans un tube renversé au dedans d'un vaisseau de verre dont l'air a esté tiré, & qu'il fait couler l'eau d'un siphon recourbé dans le vuide de mesme que dans l'air, pourvû que l'eau dans ces experiences ait esté purgée d'air, ce qui se fait en la laissant pendant quelques heures dans le vuide. Il paroist par là premierement que les particules de ce corps pesant & invisible sont plus petites que celles de l'air, puis quelles passent au travers du verre qui exclut l'air, & qu'elles y font appercevoir leur pesanteur. Il paroist de plus qu'elles doivent estre plus grossiéres que les particules de la matiere fluide qui cause la pesanteur, afin que le corps qu'elles composent ne suive pas le mouvement de cette matiere, parce qu'en le suivant il ne seroit pas pesant. Il peut y avoir autour de nous encore d'autres sortes de matieres de differens degrez de tenuité, quoy que toutes plus grossieres que n'est la matiere qui cause la pesanteur; lesquelles contribuëront donc toutes à empescher les petits brins de poussiere d'estre emportez par le mouvement rapide de cette matiere, parce qu'elles ne suivent pas ce mouvement elles-mesmes.

Et quoy que par là ces matieres doivent avoir de la pesanteur, suivant l'explication que nous en donnons, il n'est pas nécessaire toutefois de s'imaginer leurs particules comme estant entassées les unes sur les autres, puis que l'on sçait que l'air ne laisse pas de peser, bien que ses particules soient dispersées avec beaucoup d'autre matiere entre deux : car c'est ce que je pourrois prouver facilement; comme aussi qu'il suffit, pour produire l'effet de la pesanteur, que les particules d'une matiere pesante, quoy que separées les unes des autres, soient remuées en des sens differens, qu'elles s'entrechoquent, & qu'elles frappent contre les surfaces des corps qui leur sont exposez.

Il ne faut pas au reste trouver étrange ces differens degrez de petits corpuscules, ni leur extrême petitesse. Car bien que nous ayons quelque penchant à croire que des corps à peine visibles sont déja presque aussi petits

qu'ils peuvent l'estre, la raison pourtant nous dit que la mesme proportion qu'il y a d'une montagne à un grain de sable, ce grain la peut avoir à un autre petit corps, & celuy-cy encore à un autre ; & cela autant de fois que l'on voudra.

Cette extrême petitesse des parties de nostre matiére fluide se doit encore supposer nécessairement à cause d'un effet considérable de la pesanteur, qui est que des corps pesans enfermez de tous costez dans un vaisseau de verre, de metail, ou de quelque autre matiére que ce soit, se trouvent peser toûjours également. De sorte qu'il faut que la matiére que nous avons dit causer la pesanteur, passe tres-librement au travers de tous les corps que nous estimons les plus solides, & avec la mesme facilité qu'à travers de l'air.

Il s'ensuivroit aussi, s'il n'y avoit pas cette liberté de passage, qu'une bouteille de verre peseroit autant qu'un corps de verre solide de la mesme grandeur ; & que tous les corps solides d'égal volume peseroient également, puis que, selon nous, la pesanteur de chaque corps est reglée par la quantité de la matiére fluide qui doit monter en sa place.

Ce qui fait donc la différence de pesanteur entre les corps terrestres, comme les pierres, les métaux, &c. c'est que ceux qui sont plus pesans contiennent plus de parties qui empeschent le passage libre de la matiére fluide, car il n'y a que celles-là en la place desquelles cette matiére puisse monter. Mais comme l'on pourroit douter si ces parties doivent estre solides, parce qu'estant vuides elles devroient, par la raison que je viens de dire, faire le mesme effet ; je demontreray icy qu'elles sont nécessairement solides ; & que par conséquent la pesanteur des corps suit précisément la proportion de la matiére qui les compose, & qui s'y tient arrestée. En quoy M. Descartes a esté d'un autre sentiment, aussi-bien qu'en ce qui regarde la liberté avec laquelle cette matiére traverse les corps qu'elle rend pesans. Nous examinerons cy-aprés ses raisons.

Pour prouver ce que je viens de dire, je feray remarquer icy ce qui arrive dans le choc de deux corps quand ils se rencontrent d'un mouvement horizontal. Il est certain que la résistance que font les corps à estre meûs horizontalement, comme seroit une boule posée sur une table bien unie, n'est pas causée par leur poids vers la terre, puis que le mouvement lateral ne tend pas à les éloigner de la terre, & qu'ainsi il n'est nullement contraire à l'action de la pesanteur qui les pousse en bas.

Il n'y a donc rien que la quantité de la matiére attachée ensemble que chaque corps contient, qui produise cette résistance : de sorte que si deux corps en contiennent autant l'un que l'autre, ils reflechiront également, ou demeureront tous deux sans mouvement, selon qu'ils seront durs ou mols. Or l'expérience montre que toutes les fois que deux corps refléchissent ainsi également, estant venus à se rencontrer avec d'égales vitesses, ces corps sont d'égale pesanteur. Il s'ensuit donc que ceux qui sont composez d'égale quantité de matiére sont aussi d'égale pesanteur ; ce qu'il falloit démontrer.

J'ay dit que M. Descartes estoit en cecy d'un autre sentiment, comme encore en ce qui regarde le passage libre de la matiére qui cause la pesanteur, au travers des corps sur lesquels elle agit. Cela paroist, pour ce qui est de ce dernier point, de ce qu'il veut que cette matiére fluide soit empeschée par la rencontre de la Terre, de continuër ses mouvemens en ligne droite, & que pour cela elle s'en éloigne autant qu'elle peut. En quoy il semble n'avoit pas pensé à cette proprieté de la pesanteur que j'ay fait remarquer un peu plus haut. Car si le mouvement de cette matiére est empesché par la Terre, elle ne penetrera non plus librement les corps des métaux ni du verre. D'où il s'ensuivroit que du plomb enfermé dans une phiole perdroit

son poids, ou que du moins, ce poids seroit diminué. De plus, en portant un corps pesant au fonds d'un puits, ou de quelque mine profonde, il y devroit perdre de sa pesanteur; ce qui ne se trouve point par expérience.

Quant à l'autre point, M. Descartes prétend que quoy-qu'une masse d'or soit, par exemple, vingt fois plus pesante qu'une portion d'eau de mesme grandeur, l'or néanmoins peut ne contenir que quatre ou cinq fois autant de matiére terrestre que l'eau. Premiérement à cause qu'il faut déduire (il falloit plûtost dire ajoûter) un poids égal à l'un & à l'autre, à raison de l'air dans lequel on les pese; & puis parce que l'eau & les autres liquides ont quelque legereté à l'égard des corps durs, d'autant que les parties des premiers sont en un mouvement continuel.

Mais l'on peut répondre à ces deux raisons: à la premiere, que la pesanteur de l'air n'estant à celle de l'eau qu'environ comme 1 à 900 ou à 1000, ce ne sera pas un poids considérable qu'il faudra ajoûter également à celuy de l'or & de l'eau trouvez par la balance. Et pour l'autre raison; si elle estoit bonne, il faudroit qu'une mesme portion d'eau aprés estre gelée pesast beaucoup davantage qu'estant liquide, & de mesme les metaux en masse, plus que quand il sont fondus, ce qui est contre l'expérience. Outre que je ne voy pas comment il a conceû que le mouvement des parties des corps liquides leur donneroit de la legereté, c'est-à-dire de la force pour s'écarter du centre, puis que pour cela il faudroit que ce mouvement fust circulaire autour du centre de la Terre, ou qu'il fust plûtost vers le haut que vers le bas, ce qu'il n'a jamais dit; mais bien au contraire, que les parties des liqueurs se meuvent en tous sens indifféremment.

Il ne semble pas non plus avoir consideré combien la vitesse de la matiére fluide doit estre grande, pour donner autant de pesanteur qu'elle en donne; parce qu'autrement il auroit bien jugé que le mouvement que peuvent avoir les parties de l'eau & de semblables liqueurs, n'est nullement comparable à celuy de cette matiére qui cause la pesanteur.

Pour moy, j'ay recherché soigneusement le degré de cette vitesse, & je croy pouvoir déterminer à peu prés à combien elle doit monter; & puis que plusieurs autres effets naturels en peuvent dépendre, il ne sera pas inutile de faire voir icy ce que produit mon calcul & sur quoy il est fondé.

Reprenant donc la figure dont je me suis servi cy-dessus: puis que la pesanteur du corps E est justement égale à l'effort avec lequel une portion aussi grande de la matiére fluide tend à s'éloigner du centre D, ou que c'est plûtost la mesme chose; il faut qu'une livre de plomb, par exemple, icy sur terre, pese autant vers le centre, qu'une masse de la matiére fluide, de la grandeur de ce plomb, pese vers en haut pour s'en éloigner par la vertu de son mouvement circulaire. Or puis que la matiére du plomb & la matiére fluide ne different en rien selon mon hypothese, l'on peut dire que la livre de plomb pese autant vers en bas qu'elle peseroit vers en haut, si demeurant à la mesme distance du centre de la Terre, elle tournoit à l'entour avec autant de vîtesse que fait la matiére fluide. Mais je trouve par ma théorie du mouvement circulaire, qui s'accorde parfaitement avec l'expérience, « qu'un corps tournant en cercle, si l'on veut que son effort à s'éloigner du centre égale justement l'effort de sa simple pesanteur, il faut qu'il fasse chaque tour en autant de temps, qu'un pendule de la longueur du demi-diamétre de ce cercle en employeroit à faire deux vibrations. » Il faut donc voir en combien de temps un pendule de la longueur du demi-diamétre de la Terre feroit ses deux vibrations. Ce qui est aisé par la proprieté connuë des pendules, & par la longueur de celuy qui bat les secondes, qui est de 3 pieds $8\frac{1}{2}$ lignes *; & je trouve qu'il faudroit pour ces deux vibrations 1 heu-

Voyez la figure de la page 306.

** Du pied de Paris.*

te 25 minutes, en supposant, suivant la mesure de Snellius, le demi-diamétre de la Terre de 19595154 pieds. * La vitesse donc de la matiére fluide à l'endroit de la surface de la Terre doit estre égale à celle d'un corps qui feroit le tour de la Terre dans ce temps de 1 heure 25 minutes; laquelle vitesse est à peu prés 17 fois plus grande que celle d'un point de la Terre situé sous l'Equateur, qui fait le mesme tour en 24 heures, comme il paroist par la proportion entre 24 heures & 1 heure 25 minutes.

* *Du pied de Rhin.*

Je sçay que la rapidité de ce mouvement doit sembler étrange à qui la voudra comparer avec ceux qui se voyent icy sur terre; mais si en regardant un globe terrestre, comme sont ceux qu'on fait pour l'usage de la Géographie, on s'imagine sur ce globe un mouvement qui n'avance que d'un degré de l'Equateur en 14 secondes ou battemens de pouls, qui est la vitesse de la matiére que je viens de dire, l'on trouvera ce mouvement tres-médiocre à l'égard de la grandeur de la Terre, & mesme il pourra sembler estre lent.

Au reste, la grande vîtesse de cette matiére, non-seulement ne répugne point à la raison, mais elle aide encore à satisfaire à d'autres phénomenes de la pesanteur; puisque par elle on conçoit facilement comment les corps pesans en tombant accelerent toûjours leur mouvement, quand mesme ils l'ont déja acquis tres-grand. Car celuy de la matiére qui fait la pesanteur, surpassant encore de beaucoup la vîtesse d'un boulet de canon, par exemple, qui retombe de l'air aprés y avoir esté tiré perpendiculairement, ce boulet jusqu'à la fin de sa cheûte ressent presque toûjours la mesme pression de cette matiére; & partant sa vîtesse en est continuellement augmentée. Que si elle n'avoit que peu de mouvement, la balle aprés en avoir acquis autant, n'accelereroit plus sa cheûte, parce qu'autrement elle feroit obligée de pousser la matiére fluide à succeder dans sa place avec plus de vîtesse qu'elle n'en auroit pour cela par son propre mouvement.

L'on peut enfin trouver icy la raison du principe que Galilée a pris pour démontrer la proportion de l'accéleration des corps qui tombent, qui est que leur vîtesse s'augmente également en des temps égaux. Car les corps estant poussez successivement par les parties de la matiére voisine qui tâchent de monter en leur place, & dont le mouvement est toûjours incomparablement plus vite que celuy qu'ils peuvent avoir acquis par des cheûtes qui tombent sous nostre expérience, cela fait que l'action de la matiére qui les presse, peut toûjours estre considerée comme estant aussi forte que lors qu'elle les trouve en repos; d'où l'on conclut ensuite assez facilement l'accroissement des vîtesses proportionné à celuy des temps.

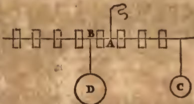
Ayant donc montré que mon hypothese ne contient rien d'impossible, & que par elle on peut expliquer tous les phénomenes de la pesanteur; sçavoir, pourquoy les corps terrestres tendent au centre; pourquoy l'action de la gravité ne peut estre empeschée par l'interposition d'aucun corps de ceux que nous connoissons; pourquoy les parties de dedans de chaque corps contribuënt toutes à sa pesanteur; & pourquoy enfin les corps pesans en tombant augmentent continuellement leur vîtesse, & cela suivant la proportion des temps de leur descente: il n'y a rien qui empesche qu'elle ne soit regardée comme véritable, tant qu'on ne trouvera pas d'autres phénomenes dans la nature qui luy soient contraires.



DEMONS-

DEMONSTRATION
DE L'EQUILIBRE DE LA BALANCE.

DANS la démonstration qu'Archimede à donnée de la proposition fondamentale des Méchaniques, il suppose tacitement une chose dont on peut douter avec quelque raison; c'est que si plusieurs poids égaux sont attachez à une balance, à distances égales les uns des autres, soit que tous se trouvent d'un mesme costé du point de suspension, soit que quelques-uns passent de l'autre costé, comme dans cette figure, où le point de suspension est A; ces poids auront la mesme force à faire incliner la balance, que s'ils estoient tous attachez au point où est leur commun centre de gravité, comme est icy le point B: de sorte que si estant attachez séparément, ils faisoient d'abord équilibre avec un contrepoids C, ils le feroient encore estant tous suspendus au point B, ou en leur place un poids D qui égale la pesanteur de tous.



Quelques Géometres, en diversifiant un peu cette démonstration, ont tâché d'en rendre le defaut moins sensible, mais je n'ay point trouvé qu'ils l'ayent osté. J'ay donc cherché à démontrer autrement la mesme proposition comme il s'ensuit.

I. L'on demande avec Archimede que deux poids égaux attachez chacun au bout des bras égaux d'une balance fassent équilibre.

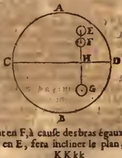
II. Et que les poids estant égaux, & les bras de la balance où ils sont attachez, inégaux, elle incline du costé du bras qui est le plus long.

III. L'on demande aussi qu'on puisse concevoir que les lignes & les plans dont il sera parlé dans cette démonstration soient inflexibles & sans pesanteur.

PREMIERE PROPOSITION.

Si sur un plan horizontal appuyé sur une ligne droite qui le coupe en deux, on applique quelque part un poids, la force que ce poids aura à faire incliner le plan de son costé sera plus grande que si on l'avoit placé prés de ladite ligne.

SOIT le plan horizontal AB appuyé sur la ligne droite CD; & qu'on y applique un poids E distant de CD par la perpendiculaire EH; & qu'ensuite on applique le mesme poids en F, en sorte que la distance FH soit moindre que EH: je dis qu'il a plus de force pour faire incliner le plan de son costé, estant appliqué en E qu'en F.



Car ayant prolongé la droite EFH en G, & faisant HG égale à HF, il est certain qu'un poids égal à celuy que nous avons dit, estant appliqué en G fera équilibre avec l'autre estant en F, à cause des bras égaux FH, HG. Mais le poids estant transporté de F en E, fera incliner le plan,

parce que le plan estant sans pesanteur, le mesme effet doit se rencontrer icy que dans la balance de bras inégaux avec des pesanteurs égales. Donc le mesme poids placé en E a plus de force à faire incliner le plan, que quand il est en F: ce qu'il falloit démonstrer.

SECONDE PROPOSITION.

Si un plan horizontal chargé de plusieurs poids demeure en équilibre estant appuyé sur une ligne droite qui le coupe en deux, le centre de gravité du plan ainsi chargé sera dans la mesme ligne droite.

SOIT le plan horizontal AB chargé des poids CC, DD, & qu'il demeure en équilibre, estant appuyé sur la droite EF. Je dis que son centre de gravité sera dans cette ligne EF. Car supposons, s'il est possible, que le centre de gravité soit quelque part hors de cette ligne au point G; & par ce point soit menée la droite HK parallele à EF.

Puis donc que le plan estant appuyé sur le point G demeure dans sa situation horizontale, il faut que quelque ligne droite qu'on mene dans ce plan par le point G, les poids des deux costez de cette ligne fassent équilibre. Partant les poids CC feront équilibre avec les poids DD, lors que le plan est appuyé sur la droite HK: ce qui est impossible, puis qu'il demeuroit en équilibre estant appuyé sur la droite EF. Car il paroist que toutes les distances des poids d'un costé sont diminuées, sçavoir celles des poids CC, & par conséquent aussi l'effet de leur pesanteur, mais que les distances des poids opposez DD sont augmentées, & en mesme temps l'effet de leur pesanteur; de sorte que ces derniers poids feront incliner le plan de leur costé; & encore à plus forte raison, si un ou plusieurs des poids CC se trouvent de l'autre costé de la ligne HK. Donc le centre de gravité du plan chargé sera dans la ligne EF: ce qu'il falloit démonstrer.

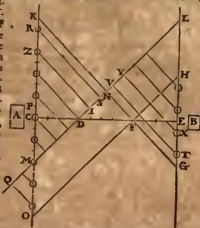
TROISIE'ME PROPOSITION.

Deux pesanteurs commensurables attachées à l'extrémité des bras d'une balance, demeureront en équilibre si ces bras sont en raison réciproque des pesanteurs.

SOIENT les pesanteurs commensurables A & B, desquelles A soit la plus grande, & la balance CDE, dont le bras DE soit à DC comme la pesanteur A à la pesanteur B: je dis que A estant attaché au bout C, & B au bout E, la balance soûtenuë au point D demeurera en équilibre.

Que l'on conçoive un plan parallele à l'horizon passant par la ligne CE; & dans ce plan soient menées par les points E, C les droites LEG, KCM perpendiculaires à CE. Puis ayant pris EF égale à CD, soient tirées GFK, MDL coupant toutes deux la droite CE à angles demi-droits, & se coupant l'une l'autre à angles droits en N. Ces lignes doivent rencontrer les deux premiéres que nous avons menées par E & C; supposons que ce soit dans les points G, K & M, L. Il est manifeste que EG sera égale à EF, & CK égale à CF; comme aussi que GK, ML se couperont par le milieu

au point N, & que les triangles GNL, KNM, seront semblables & égaux. Soit prise EH égale à EG & CO égale à CK; & puis que ED est à DC comme le poids A à B, il paroist que ED, DC sont commensurables, & que HG & KO seront de mesme commensurables, estant entre elles comme EF à FC, c'est-à-dire, comme CD à DE. Soient donc KO & HG divisées en parties égales à leur plus grande commune mesure; & les grandeurs A & B divisées de mesme. De cette sorte il y aura autant de parties de la pesanteur A, qu'il y a de parties dans la ligne KO; & autant de parties de la pesanteur B, qu'il y a de parties dans la ligne HG: lesquelles parties de pesanteur estant toutes égales, soient attachées chacune au milieu d'une des parties des lignes KO, HG.



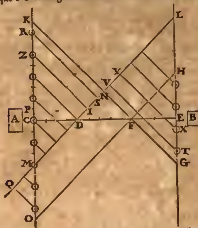
Nous montrerons maintenant que ces pesanteurs estant ainsi disposées, le plan demeure en équilibre lors qu'il est appuyé au point D. D'où la vérité de la proposition sera manifeste; parce qu'on peut concevoir que toutes les parties du plan sont ostées, & que les seules lignes KO, HG, chargées des poids égaux à ceux de A & de B, demeurent appuyées sur les extrémitez de la balance C & E: car le plan estant sans pesanteur, ses parties ostées ne peuvent en rien changer l'équilibre.

Pour montrer donc que l'équilibre du plan chargé, ainsi qu'il a esté dit, se fait sur le point D, soient menées de chaque poids des perpendiculaires sur la ligne LM, prolongée autant qu'il est nécessaire, comme RS, ZI, TV, XY, &c.

Maintenant les perpendiculaires TV & RS, qui descendent des poids les plus proches des points G & K, seront égales entre elles; parce que les triangles GNL, KNM estant égaux & semblables, comme il a esté dit, & le costé GL égal à KM, & l'intervalle GT à KR, comme estant chacun la moitié d'une des parties égales faites par la division des lignes HG, KO, il est évident que les lignes TV, RS seront aussi égales, comme il a esté dit. Donc si on appuye le plan par la ligne LMQ, le poids T fera équilibre contre le poids R. De mesme à cause de l'égalité des perpendiculaires XY & ZI, le poids X fera équilibre contre Z; & ainsi consécutivement tous les poids de la ligne GH feront équilibre contre autant de poids pris depuis K dans la ligne KO: c'est-à-dire, que si l'on prend la partie KP de cette ligne égale à GH, ce seront les poids attachez entre K & P qui feront équilibre contre tous ceux de la ligne GH.

Si donc les poids restans dans la ligne PO font aussi équilibre les uns contre les autres sur le plan appuyé par la ligne LMQ; il s'ensuivra que le plan chargé de tous les poids demeurera en équilibre sur cette mesme ligne.

Or l'équilibre de ces poids restans se prouve ainsi. Puis que K O est égale à deux fois C F, & K P égale à H G, c'est-à-dire à deux fois C D, il faut que P O soit égale à deux fois D F. Mais M O est égale à D F, parce que C M est égale à C D : donc M P est la moitié de P O. De sorte que la ligne P O qui contient le nombre des parties dont K O surpasse H G, estant coupée en deux parties égales par la droite L M Q, il est manifeste qu'il y aura nombre égal des poids que contient cette ligne P O des deux costez du point M, & rangez à pareilles distances ; & que si le nombre de ces poids est impair, celuy du milieu sera dans le point M. D'où il s'ensuit que les perpendiculaires, qu'on a menées des mesmes poids sur la ligne L M Q sont égales chacune à sa correspondante, & que par conséquent les poids font équilibre lors que le plan est appuyé par la ligne L M Q ; ce qui ayant esté aussi démontré des autres poids des lignes P K & H G, il s'ensuit que le plan avec tous les poids demeure en équilibre estant appuyé par la ligne L M Q. Le centre de gravité du plan ainsi chargé est donc dans cette ligne. Mais ce centre de gravité est aussi dans la ligne C E, parce qu'il est évident que le plan fait équilibre estant porté sur cette ligne. Donc il faut que ce soit le point commun à ces deux lignes L M Q & C E, sçavoir le point D, sur lequel le plan estant appuyé il demeure en équilibre. D'où se conclut, comme il a esté montré cy-dessus, la vérité du théoreme.

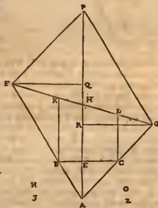


DE
POTENTIIS
FILA FUNESVE TRAHENTIBUS.
PROPOSITIO PRIMA.

Si punctum A trahatur à filis duobus AB, AC angulum BAC facientibus, sintque potentia trahentes ut filorum ipsorum AB, AC longitudines multiplices secundùm numeros datos N & O; juncta vero BC dividatur in E, ut sit reciprocè CE ad EB sicut numerus N ad O, & jungatur AE: dico filis AB, AC ita trahentibus, aquipollere filum AE tractum à potentia qua sit ut longitudo AE multiplex secundùm numerum aqualem utrisque N & O.

PRODUCANTUR enim AB, AC ad F & G, ut sit AF multiplex AB secundùm numerum N, & AG multiplex AC secundùm numerum O; junctæque FG occurrat AE producta in H, & sint BK, CL parallelæ AH.

Quia ergo FH ad HK ut FA ad AB, hoc est, ut numerus N ad unitatem; HK vero ad HL ut BE ad EC, hoc est, ut numerus O ad numerum N: erit, in proportione turbata FH ad HL, ut numerus O ad unitatem, hoc est ut GA ad AC, sive ut GH ad HL. Itaque FH ad HL ut GH ad HL, ac proinde FH æqualis HG.



Sit jam AH continuata usque in P, ut sint æquales AH, HP, & junganтur GP, FL: eritque FAGP parallelogrammum, ad cujus diametrum PA ducantur FQ, GR parallelæ BC. Manifestum igitur est fieri triangula similia & æqualia FPQ, GAR, quorum latera inter se æqualia PQ, RA. Est autem AE ad AR ut AC ad AG, hoc est, ut unitas ad numerum O. Eadem verò AE ad AQ ut AB ad AF, hoc est, ut unitas ad numerum N. Ergo erit AE ad utramque simul AQ, AR, sive AQ, QP, hoc est, ad AP, ut unitas ad utrumque simul numerum N & O.

Cùm ergo potentiæ fila AB, AC trahentes, sint ut AF, AG, quibus æquipollet attractio per filum AE à potentia quæ sit ut AP, ex theoremate Mechanico satis noto, manifesta est propositi veritas.

PROPOSITIO SECUNDA.

Datis poſitione quotlibet punctis; ſive in eodem plano fuerint, ſive non: ſi à puncto quod eorum commune eſt gravitatis centrum, ad unumquodque datorum fila extendantur, eaque ſingula trahantur à potentiis quæ ſint inter ſe ut filorum longitudines, fiet æquilibrium manente nodo communi in dicto gravitatis centro.

SINT data puncta A, B, C, D, E, quæ vel in eodem plano vel aliter utcunque collocata intelligantur: attributâ autem ſingulis æquali gravitate, conſtat commune eorum gravitatis centrum inveniri hoc modo.

Jungantur nempe duo quælibet datorum punctorum rectâ A B, quâ bifariam ſectâ in F, erit hoc centrum gravitatis punctorum A, B. Ducatur deinde ad punctum aliud C recta F C quæ ſecetur in G, ut ſit C G dupla G F; & erit G centrum gravitatis punctorum trium A, B, C. Rurſus ducatur ad aliud punctum recta G D, ſeceturque in H, ut ſit D H tripla H G, & fiet H centrum gravitatis punctorum quatuor A, B, C, D. Similiterque ductâ H E ad punctum quintum E, ſectâque in K, ut K E ſit quadrupla K H, erit K centrum gravitatis punctorum quinque A, B, C, D, E. Ac ſimili ratione quotcunque punctorum centrum gravitatis invenire licebit.



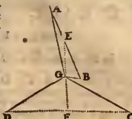
Porro extenſis filis à puncto K ad A, B, C, D, E, quæ trahantur ſingula à potentiis quæ ſint inter ſe ut ipſæ longitudines K A, K B, K C, K D, K E: dico fieri æquilibrium manente nodo communi in K. Ducantur enim à centris gravitatis inventis F, G, H, ad centrum gravitatis omnium punctorum K, rectæ F K, G K, H K. Itaque conſtat filis A K, B K, punctum K trahentibus cum potentiis quæ ſint ut longitudines eorum filorum, æquipollere filum F K, tractum à potentia quæ ſit ut dupla longitudo F K. Rurſus verò duobus his filo F K trahenti cum potentia quæ ſit ut dupla F K, & filo C K trahenti cum potentia quæ ſit ut ſimplex longitudo C K, æquipollet filum G K tractum à potentia quæ ſit ut tripla K G per præcedentem: ergo filum G K ita tractum æquipollet filis tribus K A, K B, K C. Similiter verò duobus his filo G K tracto à potentia quæ ſit ut tripla G K, & filo D K tracto à potentia quæ ſit ut ſimplex longitudo D K, æquipollet filum H K tractum à potentia quæ ſit ut quadrupla H K. Ergo hoc æquipollet filis omnibus K A, K B, K C, K D, punctum K uti dictum eſt trahentibus. Atqui filo K H in directum opponitur filum K E tractum à potentia quæ eſt ut longitudo K E, id eſt ut quadrupla K H. Ergo cùm filis K E, K H in partes directè oppoſitas trahentibus cum potentiis æqualibus, punctum K neceſſario locum ſuum ſervaturum ſit, ſequitur & filis K A, K B, K C, K D, uti dictum eſt trahentibus, & ex alia parte filo K E nodum teſtare immotum. Quod erat demonſtrandum.

Poſſunt autem & binorum quorumque punctorum centra gravitatis primò deſignari, & per hæc deinceps centra gravitatis quaternorum, & per hæc octonorum & ſic porro; qua ratione ſimplicior plerumque efficitur demonſtratio, ac præſertim ſi datorum punctorum numerus fuerit pariter par.

Ut ſi quatuor data fuerint A, B, C, D; ſive in eodem plano, ſive non: junctis A B, C D, diviſiſque bifariam in E & F; ductâque inde F E, quæ

rursus bifariam secetur in G; constat G esse centrum gravitatis punctorum A, B, C, D. Quòd si jam nodus G trahatur filis GA, GB, GC, GD, à potentiis quæ sint inter se ut hæ ipsæ filorum longitudines; dico fieri æquilibrium.

Constat enim filis GA, GB, æquipollere filum GE tractum à potentia quæ sit ut dupla GE; filis vero GC, GD, æquipollere filum GF tractum à potentia quæ sit ut dupla GF. Cùm ergo GE, GF æquales sint, unamque lineam rectam efficiant, eodem modo nodus G trahitur, ac si traheretur à potentiis æqualibus per fila GE, GF. Unde immotum manere necesse est.

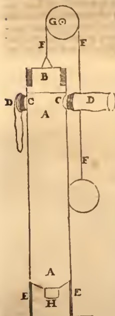


Constat verò si puncta A, B, C, D non sint in eodem plano, fore G centrum gravitatis pyramidis cujus anguli hæc ipsa quatuor puncta; cùm in omni pyramide idem sit centrum gravitatis ipsius solidi & quatuor punctorum angularium, uti ostendere facillimum est. Et hinc patet veritas theorematis Robervalliani, *Si à centro gravitatis pyramydis fila tendantur ad quatuor angulos, quæ trahantur à potentiis quæ sint inter se ut filorum ipsorum longitudines, fieri æquilibrium, manente nodo in dicto gravitatis centro.*



NOUVELLE FORCE MOUVANTE PAR LE MOYEN DE LA POUDRE A CANON ET DE L'AIR.

IL y a long-temps qu'on a souhaité de pouvoir appliquer la force de la poudre à canon à d'autres usages qu'à ceux ausquels elle a servi jusqu'à present, qui requierrent une violence tres-soudaine, comme l'explosion du canon & du mousquet, & le jeu des mines. On voyoit que si cette impetuosité trop prompte pouvoit estre moderée & reduite à une force plus traitable, elle deviendroit utile dans tout le reste de la Méchanique, & serviroit en bien-des occasions où l'on employe maintenant la force des hommes, des chevaux, du vent, & des autres puissances que nous avons. J'ay imaginé pour cet effet la machine que je represente icy, laquelle je ne propose pas comme estant dans la perfection qu'on pourroit souhaiter, mais comme une pensée, qui ayant réussi en partie, pourra estre poursuivie & peut-estre perfectionnée davantage par les avis de ceux de la Compagnie, aprés qu'ils auront esté informez des experiences que j'ay déja faites.



AA est un cylindre creux bien uni en dedans & d'une égale grosseur par tout. B est un piston au haut de ce cylindre, & qui peut couler dans le vuide AA. Aux endroits CC le cylindre est percé de deux ouvertures dont le diamétre a environ $\frac{1}{4}$ du diamétre du cylindre. Il y a des tuyaux DD d'un cuir mouillé & souple qui sont liez fermement à deux petites boëtes qui environnent ces ouvertures. L'un des tuyaux est représenté pendant, l'autre étendu. Au bas du cylindre il y a une petite boëte H, qui s'y attache à vis avec un cercle de cuir entre deux, afin de boucher exactement cette ouverture du cylindre. EE sont des liens qui tiennent le cylindre attaché par en bas à un chassis dans lequel il est enfermé, mais qui n'est point representé icy pour n'embarasser pas la figure. FF est la corde attachée au piston B, & qui passant par la poulie G, doit servir à mouvoir ce à quoy on l'applique.

Ayant versé un peu d'eau sur le piston qui doit estre arresté par en haut en sorte qu'il ne puisse point sortir du cylindre, on met dans la boëte H un peu de poudre à canon, avec un petit bout de meche d'Allemagne allumée, & on serre bien cette boëte par le moyen de sa vis. La poudre venant un moment

moment aprés à s'allumer, remplit le cylindre de flame, & en chasse l'air par les tuyaux de cuir CD, qui s'étendent, & qui sont aussi-tost refermez par l'air de dehors: de sorte que le cylindre demeure vuide d'air, ou du moins pour la plus grande partie. Ensuite le piston B est forcé par la pression de l'air qui pese dessus, à descendre, & il tire ainsi la corde FF, & ce à quoi on l'a voulu attacher.

La quantité de cette pression est connuë & determinée par la pesanteur de l'air & par la grandeur du diamétre du piston, qui estant d'un pied sera pressé autant que s'il portoit le poids d'environ 1800 livres, supposé que le cylindre fust tout à fait vuide d'air. Mais c'est ce que jusqu'icy je n'ay sçû effectuer, & mesme les expériences en grand & en petit n'ont pas reussi en ce point de la mesme façon.

Dans un cylindre de $2\frac{1}{2}$ pouces de diametre & de 20 pouces de long, avec le poids de 6 grains de poudre il s'est vuidé les $\frac{4}{5}$ parties de l'air. Dans le cylindre de la mesme grosseur, mais de la longueur de 44 pouces, il a fallu 36 grains de poudre pour chasser les $\frac{9}{10}$ de l'air. Et dans un cylindre d'un pied de diamétre & de $3\frac{1}{2}$ pieds de haut une dragme & demie de poudre a chassé la moitié de l'air; & en mettant deux fois autant de poudre, l'air ne s'est gueres mieux vuidé qu'auparavant.

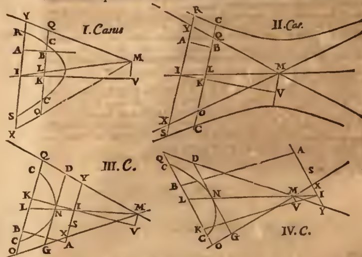
Or cet air qui reste dans le cylindre empesche une grande partie de l'effet que feroit cette machine si tout l'air se vuidoit parfaitement, comme il est aisé de le concevoir ou mesme de le déterminer par le calcul. C'est pourquoy il faudroit essayer quelle proportion entre la grosseur & la hauteur du cylindre est la meilleure dans cette machine pour faire le plus de vuide avec le moins de poudre; car encore que tout le cylindre ne se vuide pas, la force de cette pression ne laisse pas d'estre d'un grand effet.

Elle pourroit servir non seulement à élever toutes sortes de grands poids, & des eaux pour des fontaines, mais aussi à jetter des boulets & des fléches avec beaucoup de force, suivant la maniere des balistes des Anciens.

De plus, parce que le cylindre n'a pas besoin d'estre fort solide pour résister à la pression de l'air exterieur, car sa rondeur fait comme une espece de voute, il est certain que toute la machine se peut faire bien legere; & cette legereté jointe avec la grande force qu'elle a, pourroit peut estre servir à des effets que l'on a tenu impossibles jusqu'à present.

CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS.

IN æquatione loci ad hyperbolam, si neutra indeterminatarum linearum in seipsam ducta inveniatur, velut si sit $xy == bb$; vel $xy == cx. bb$; (literis x & y lineas indeterminatas A B, B C significantibus, quæ in dato angulo sibi mutuò sint applicatæ, quarumque altera, ut A B, positione data intelligitur, & in ea datum punctum A) constructio per asymptotorum inventionem facilè absolvitur, ut ostensum est à *Fl. de Beaune* in Notis ad Geometriam Cartesii. Cum verò habetur xx vel yy in æquatione, vel utrumque, nihilominus ad asymptotos rem deduci posse, & quidem breviùs quàm ad diametri laterumque recti & transversi inventionem, ostendemus hoc modo.



Sit æquatio ejusmodi reducta, $y == l. \frac{nx}{z} \sqrt{mm\ ox. + \frac{ppxx}{gg}}$; semper enim ad hos terminos reduci potest, nempe ut y altera linearum indeterminatarum, quæ applicata est ad positione datam, sola ab una parte æquationis habeatur, ab altera verò non plures termini quàm hîc inveniantur; nam sæpe pauciores etiam esse possunt, cùm soli necessarii sint $+ \frac{ppxx}{gg}$ cum alterutro horum mm vel ox.

Quum angulus A B C datus sit, ducatur per A punctum linea X Y quæ sit rectæ B C parallela, & in ea accipiatur A I æqualis l, idque ad partes B C,

si habeatur $+ l$ in æquatione, in contrarias verò si habeatur $- l$, & agatur IK parallela AB. Si verò non habeatur omnino l, recta IK in AB incidere intelligenda est.

Deinde sicut z ad n, quæ est ratio data, ita sit IK ad libitum sumpta, ad KL; quæ ipsi AI parallela ducenda est, sumendaque hoc pacto, ut puncta KL sita sint quo ordine AI, si habeatur $+ \frac{nx}{z}$, at contrà si habeatur $- \frac{nx}{z}$, & ducatur recta per IL; si verò desit $\frac{nx}{z}$, eadem est IL & IK.

Porro ut p ad g, ita sit $\div o$ ad singulas IX, IY sumendas in recta AI; atque ita quoque IX ad IV sumendam in IK ad partes AB si habeatur $- ox$, aut in contrarias si habeatur $+ ox$; & sit VM parallela AI, occurratque rectæ IL in M: erit jam M centrum hyperbolæ quæsitæ, asymptoti vero, rectæ per MX, MY ductæ.

Si verò non habeatur ox in æquatione, erit I centrum hyperbolæ; sumptisque IX, IY ad libitum sed inter se æqualibus, inventisque inde punctis V & M, ut ante, ducentur asymptoti per I parallelæ ipsis MX, MY.

Jam porro si habeatur $+ mm$, puncta S & R, per quæ hyperbola vel oppositæ sectiones transire debent, invenientur sumendo in recta AI à puncto I, singulas IS, IR æquales m: unde jam hyperbola data erit ac describi poterit, in qua BC erit ordinatim applicata ad diametrum, si $\frac{\div og}{p}$ major quàm m; sin verò $\frac{\div og}{p}$ minor quàm m, erit BC parallela diametro hyperbolæ ad quam est C punctum, ut hîc casu secundo. Quòd si forte punctum S incidat in X, locus puncti C, erunt ipsæ asymptoti. Si verò non habeatur mm, erit ipsum I punctum in hyperbola quæsita.

At si habeatur $- mm$, accommodanda est intra angulum XMI recta GN parallela IX, quæque possit quadrata ab IX & IS, vel tantum ipsi IS æqualis, si non habeatur ox; eritque punctum N in hyperbola quæsita, quæ proinde cursus data erit.

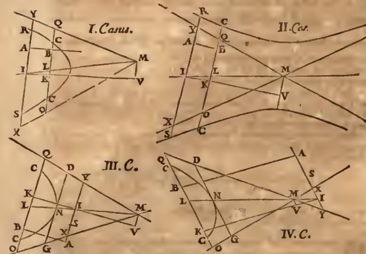
Sumpta enim in casu primo $AB = x$ ad arbitrium, eique applicata $BC = y$ in angulo dato, quæ ad hyperbolam inventam terminetur, ostendendum sit quòd

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}.$$

Demonstratio.

OCCURRAT BC utrinque si opus sit producta, asymptotis in O & Q. Ex constructione est IX vel IY $= \frac{\div og}{p}$, IV $= \frac{\div ogg}{pp}$. Ratio verò data IK ad KL, eadem nempe quæ z ad n. Sed & angulus IKL datus est. Ergo & ratio IK ad IL, quæ sit ea quæ z ad a. Ergo quia ut IK ad IL ita IV ad IM, erit IM $= \frac{\div aogg}{zpp}$. Ut autem IM ad IX, hoc est ut $\frac{\div aogg}{zpp}$ ad $\frac{\div go}{p}$, sive ut ag ad pz, ita ML, sive MI minùs IL, hoc est, $\frac{\div aogg}{zpp} - \frac{ax}{z}$ ad LO vel LQ; quæ itaque erit $\frac{\div og}{p} - \frac{px}{g}$. Porro quia BK

$= l$, & LK $= \frac{nx}{z}$, erit BL $= l - \frac{nx}{z}$; quâ ablatâ à BC $= y$, fit LC $= y - l + \frac{nx}{z}$. Propter hyberbolam verò erit rectangulum QCO æquale rectangulo YSX. Sed rectangulum QCO æquale est quadrato LO minus quadrato LC, hoc est quadrato ab $\frac{\frac{1}{2}go}{p} - \frac{px}{g}$ minùs quadrato ab $y - l + \frac{nx}{z}$: quorum quadratorum differentia est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - ox + \frac{ppxx}{gg} - yy + 2ly - ll + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{nnxx}{zz}$. Ergo hæc æquatur rectangulo YSX, hoc est quadrato IX minùs quadrato IS, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - mm$; quia IX $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ & IS $= m$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenietur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$, ut oportebat.



In secundo casu rectangulum QCO æquatur quadrato LC minus quadrato LO; & rectangulum YSX quadrato IS minus quadrato IX. Unde rursus valor Y idem qui casu primo invenietur.

Sit tertius casus quo habeatur $- mm$, sitque æquatio $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{- mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$, producta GN occurrat alteri asymptoto in D. Hîc jam eadem ratione qua prius, apparebit LO vel LQ esse $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$ +

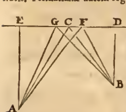
$+\frac{px}{g}$, & $LC = y + \frac{nx}{z} - l$. Et propter hyperbolam erit rectangulum QCO $=$ rectangulo DNG seu quadrato NG, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$, quia $XI = \frac{\frac{1}{2}go}{p}$, & $IS = m$, quorum quadratis æquale fecimus quadratum GN. Rectangulum autem QCO æquatur quadrato LO minus quadrato LC, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + ox + \frac{ppxx}{gg} - yy - \frac{2nxy}{z} - \frac{nnxx}{zz} + 2ly + \frac{2nlx}{z} - ll$. Ergo hoc æquale $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$. In qua æquatione deleto rursus utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenitur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$. Eademque est demonstrandi ratio in casu quarto, & aliis quibusvis, habita ratione signorum $+$ & $-$.

Cum non habetur $\frac{nx}{z}$ in æquatione, puncta M & V unum sunt, tunc verò si $p = g$, hoc est si habeatur $+xx$ pro $\frac{ppxx}{gg}$, erunt semper asymptoti sibi mutuò ad angulos rectos, quia ut p ad g, ita fecimus $\frac{1}{2}o$ ad IX & ad IY, & ita IX ad IV; fiunt enim jam æquales IX, IY, IV, & singulæ $= \frac{1}{2}o$, unde punctum V est in semicirculo super XY & proinde angulus XVY rectus. Item quia $IM = \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$, patet quod si $ag = zp$, hoc est si g ad p ut z ad a, tunc erit $IM = \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, ac proinde æqualis ipsi IX & IY quæ etiam erant $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Adeoque hoc casu erunt asymptoti sibi mutuo ad angulos rectos; cùm rursus punctum M sit futurum in circumferentia circuli descripti super XY centro I.



DEMONSTRATIO REGULÆ DE MAXIMIS ET MINIMIS.

AD investiganda Maxima & Minima in Geometricis quæstionibus, regulam certam primus, quod sciam, Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipso non traditam cùm exquirerem, inveni simul quo pacto ea ipsa regula ad mirabilem brevitatem perduci posset, utque inde eadem illa existeret quam postea vir amplissimus Joh. Huddenius dederat, tanquam partem regulæ suæ generalioris atque elegantissimæ, quæ ab alio prorsùs principio pendet. Hæc à Fr. Schotenio edita est unà cum Cartesianis de Geometria libris. Fermatianæ autem regulæ examen quod institui est hujusmodi.



Quoties Maximum aut Minimum in problemate aliquo determinandum proponitur, certum est utrinque æqualitatis casum existere: ut si data sit positione recta E D & puncta A, B, oporteatque invenire in E D punctum C, unde ductis C A, C B, quadrata earum simul sumpta, sint minima quæ esse possint; necesse est ab utraque parte puncti C, esse puncta G & F, à quibus ducendo rectas G A, G B; F A, F B oriatur summa quadratorum G A, G B æqualis summæ quadratorum F A, F B, & utraque summa major quadratis C A, C B simul sumptis.

Ut igitur inveniam punctum C, unde ductis C A, C B fiat summa quadratorum ab ipsis omnium minima; ductis A E, B D perpendicularibus in E D, quarum A E dicatur a; B D, b; intervallum verò E D, c: fingo primùm G F, differentiam duarum E G, E F æqualem datæ lineæ quæ vocetur e; & quæro quanta futura sit E G, quam appello x, ut quadrata G A, G B simul sumpta æquentur quadratis F A, F B.

Itaque quia A E $= a$, & E G $= x$, erit quadratum A G $= aa + xx$. Et quia G D $= c - x$, & D B $= b$, erit quadratum G B $= bb + cc - 2cx + xx$, unde quadrata A G, G B simul sumpta fient $= aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, qui dicantur termini priores; idque similiter in quovis alio problemate intelligendum, ubi maximum aut minimum inquiritur. Rursus autem quia E F $= x + e$, si ubique in summa quadratorum inventa substituam $x + e$ pro x, & quadratum ab $x + e$ pro xx, atque ita deinceps si altior potestas ipsius x reperiatur, certum est exorituram summam quadratorum F A, F B; quæ quidem erit $aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$, æquanda summæ quadratorum A G, G B; dicantur autem hi termini posteriores.

Itaque erit $aa + bb + cc - 2cx + 2xx = aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$. Ex qua æquatione prodibit valor E G sive x, quando G F sive e certæ magnitudinis lineam refert.

Ponendo autem e infinitè parvam, apparebit ex eadem æquatione quanta futura sit E G, cùm ipsi E F æqualis est, adeoque habebitur determinatio quæ-

fita puncti C, unde ductæ C A, C B faciant summam quadratorum minimam; nempe sublatis primùm, si quæ sunt, fractionibus, (quæ in hoc exemplo nullæ sunt) delentur termini qui utrinque iidem habentur, quales sunt necessariò omnes quibus litera e admixta non est; idque facile est intelligere, cùm dixerimus posteriores terminos ex prioribus describi, ponendo $x + e$ vel potestatem ejus, quoties invenitur x vel potestas ejus aliqua in prioribus. Deinde omnes termini per e dividuntur, quibusque post eam divisionem adhuc unum e aut plura inesse inveniuntur, ii delentur, quippe cùm quantitates infinitè parvas contineant respectu cæterorum terminorum quibus nullum ampliùs inest e. Ex quibus denique solis invenitur quantitas x quæsita in casu determinationis proposito; & hæc est ratio methodi Fermatianæ, quâ in compendium redactâ hanc aliam inveni, cujus partes duæ sunt. Nam primò,

» Quando termini, quos maximum aut mininum designare volumus, nullam fractionem habent, in cujus denominatore qnantitas incognita quæsita continetur; multiplicandus est terminus quisque per numerum dimensionum quem in illo habet quantitas incognita, omissis terminis iis in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque illa producta æquanda nihilo.

Ita in exemplo proposito, ubi termini priores inventi sunt $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, summam duorum quadratorum continentes, quam volo esse minimam; tantummodo hujusmodi instituenda erit multiplicatio,

$$\begin{array}{l} aa + bb + cc - 2cx + 2xx \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; 1 \qquad\quad 2 \\ \hline \end{array}$$

Ex qua orientur termini æquandi nihilo $-2cx + 4xx = 0$;

Unde fit $\frac{1}{2}c = x$.

Ita quoque si priores termini sint $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba^2}{3c}x + aab$,

multiplicatio erit hujusmodi $\quad 3 \qquad 3 \qquad 1.$

Unde termini æquandi nihilo $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba^2}{3c}x = 0$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba^2}{3c} = 0.$$

Hujus compendii ratio ut intelligatur, sciendum primò, quoniam termini posteriores ex prioribus describuntur, ponendo tantum ubique $x + e$ pro x, necessariò omnes terminos priores etiam in posterioribus reperiri; ideoque illos nihil opus esse describi, cùm utrobique mox delendi forent, atque adeo illos tantùm scribendos in quibus unum e vel plura insunt, ut in exemplo nostro $-2ce + 4ex + 2ee$; eosque æquandos nihilo. Sed etiam illos quibus plura quàm unum e inerunt, scribi frustra apparet, cùm divisione facta per e delendos postea constet, ut paulò ante diximus. Itaque nulli præterea ab initio describendi inter terminos posteriores quàm quibus inerit e simplex.

Hi autem termini ex terminis prioribus facilè deducuntur, cum constet nihil aliud esse quàm secundos terminos potestatum ab $x + e$, quia cæteri omnes plura quàm unum e vel nullum habent. Adeo ut ubicunque in prioribus terminis habetur x, scribendum sit in posterioribus $x + e$; & ubi habetur xx in prioribus, ponendum $2ex$ in posterioribus; & ubi x^3 in prioribus, in posterioribus $3exx$, atque ita deinceps. Dicti autem termini secundi cujusque potestatis $x + e$ ex ipsa potestate x facilè describuntur mutando unum x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius x, ita enim

ab xx fit $2ex$, & ab x^3, $3exx$; atque in cæteris pari modo. Itaque ex terminis prioribus in quibus x, quos solos considerandos esse patuit, facilè etiam termini posteriores, ii quos nihilo adæquandos diximus, describuntur; multiplicando tantùm singulos in numerum dimensionum quas in ipsis habet x. Nam mutare unum x in e nequidem opus est, cùm eòdem redeat, sive omnes postea per e sive per x dividantur, & ex his quidem aperta est ratio compendii ad primam partem regulæ pertinentis: nunc ad alteram veniamus quæ est hujusmodi.

» Si termini quos maximum aut minimum designare volumus fractiones ha-
» beant in quarum denominatore occurrat quantitas incognita, delendæ pri-
» mùm sunt quantitates cognitæ si quæ adsint; deinde si reliquæ quantitates
» non habeant eundem denominatorem, eò reducendæ sunt. Tum termini sin-
» guli numeratorem fractionis constituentes, ducendi in terminos singulos de-
» nominatoris, productaque singula multipla sumenda secundùm numerum quo
» dimensiones quantitatis incognitæ in termino numeratoris differunt à dimen-
» sionibus ejusdem incognitæ quantitatis in termino denominatoris. Signa au-
» tem affectionis productis singulis præponenda qualia lex multiplicationis exi-
» git, quoties dimensiones quantitatis incognitæ plures sunt in termino nume-
» ratoris quàm in termino denominatoris: at quoties contrà evenit, contraria
» quoque signa productis præponenda; quæ denique omnia æquanda nihilo.

Sint, exempli gratiâ, inveniri termini priores, quos maximum designare velimus, isti $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$, ubi nulla est quantitas cognita. Hic ergo, secundùm regulam, multiplico terminos omnes numeratoris primùm per bcc, priorisque producti ex bx^3 in bcc, scribo triplum, quia bx^3 habet tres-dimensiones quantitatis incognitæ x, bcc verò nullam. Secundi producti ex $- ccxx$ in bcc scribo duplum, propterea quod in $- ccxx$ duæ sunt dimensiones x, & in bcc nulla. Tertium verò productum ex $- 2bccx$ in bcc scribo simplex, quia in $- 2bccx$ & bcc differentia dimensionum x est unitas. Tribus autem hisce productis vera signa affectionis adscribo, quoniam dimensiones x in terminis numeratoris excedunt eas quæ in termino bcc, quippe quæ nullæ sunt, ita ut tria hæc producta sint

$$3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x.$$

Jam porrò terminos omnes eosdem numeratoris duco in x^3 terminum alterum denominatoris, primumque productum ex bx^3 in x^3 scribere omitto, sive per o multiplico, quoniam eædem dimensiones utrobique sunt ipsius x, ideoque differentia nulla. Secundum autem productum ex $- ccxx$ in x^3 scribo simplex, quia in his terminis differentia dimensionum x est unitas. At tertium productum ex $- 2bccx$ in x^3 scribo duplum, quia differentia dimensionum x in his est 2. Signa verò affectionis productis hisce duobus adscribo contraria iis quæ requireret lex multiplicationis, eo quòd dimensiones x pauciores sunt utrobique in terminis numeratoris quàm in x^3, termino denominatoris.

Itaque producta bina erunt hæc $+ ccx^5 + 4bccx^4$; quæ addita tribus præcedentibus

$$+ 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x,$$

faciunt summam æquandam nihilo

$$ccx^5 + 4bccx^4 + 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x = 0;$$

qua æquatione divisa per $ccbx + ccxx$, fit $x^3 + 3bxx - 2bcc = 0$.

Quomodo autem ad hæc perventum sit uno exemplo rursùs explicabimus, ex quo eandem in omnibus cæteris rationem esse intelligetur. Videamus igitur

priores

priores terminos quos modò proposueram, nempe $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$; ex quibus si alios quibuscum eos comparem, ut initio factum est, describere velim, ponendo ubique $x + e$ ubi est x; video quidem primò omnes illos in posterioribus terminis posse negligi in quibus plura quàm unum e inerit, quia semper ex iis quantitates orientur in quibus plura uno e inerunt, quæque proinde delendæ tandem erunt, ob causam in superioribus traditam.

Itaque erunt termini priores æquandi posterioribus

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{\begin{matrix} bx^3 - ccxx - 2bccx, \\ + 3bexx - 2ccex - 2bcce \end{matrix}}{bcc + x^3 + 3exx},$$

qui nempe ex prioribus hac lege descripti sunt, ut ubicunque est x vel potestas ejus in prioribus, ibi ponatur $x + e$ vel potestatis $x + e$ duo priores termini; quoniam scimus in cæteris plura quàm unum e contineri.

Jam verò porro, quia termini in quibus nullum e in numeratore ac denominatore priorum ac posteriorum terminorum, iidem planè reperiuntur, patet multiplicationes alternas eorum terminorum denominatoris in terminos numeratoris partis alterius e carentes, omitti posse, cùm quantitates inde ortæ eædem utrinque essent futuræ, ideoque delendæ. Quare in terminis posterioribus ii tantùm ab initio scribendi erant in quibus unum e, omissis omnibus reliquis, Ut æquatio hîc futura sit ista

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{3bexx - 2ccex - 2bcce}{3exx}.$$

Hîc jam multiplicationes alternæ per denominatores instituendæ essent ad tollendas fractiones. Verùm examinando diligentiùs quænam futura sint harum multiplicationum producta, aliud adhuc compendium inveniemus, & nec scribendos quidem omnino esse terminos posteriores: quia enim describuntur ex prioribus mutato x in e, præpositoque numero dimensionum ipsius x, non difficile est colligere ex solis terminis prioribus quænam futura sint ista omnia producta.

Ita quoniam propter $- ccxx$ in prioribus, habetur $- 2ccex$ in posterioribus; & propter x^3 in denominatore priorum, in posteriorum denominatore est $3exx$; facile perspicitur utraque producta ex $- ccxx$ in $3exx$ & ex $- 2ccex$ in x^3, quæ sunt $- 3ccex^4$ & $- 2ccex^4$, easdem literas habitura, sed diversos numeros præpositos 3 & 2, idque inde fieri quòd in termino $ccxx$ unam dimensionem minùs habeat x quàm in termino x^3. Itaque & auferendo postea ex utraque parte æquationis, $- 2ccex^4$, apparet superfuturum $- ccex^4$ à parte terminorum priorum. Quare ab initio hoc sciri potest, multiplicando tantùm in terminis prioribus $- ccxx$ numeratoris in x^3 denominatoris, unumque x in e mutando, ac productum simplex scribendo; quia differentia dimensionum x in istis duobus terminis est unitas.

Eadem ratione producta ex $- 2bccx$ in $3exx$, & ex $- 2bcce$ in x^3, quæ easdem literas habent, sunt enim $- 6bccex^3$ & $- 2bccex^3$, habebunt numeros præpositos diversos, propterea quod in $- 2bccx$ una tantum est dimensio x; at in x^3 tres, unde ablato ex utraque parte æquationis $- 2bccex^3$, scio superfuturum à parte terminorum priorum $- 4bccex^3$: quod rursus ab initio cognosci potuit, quia eadem quantitas oritur, multiplicando $- 2bccx$ numeratoris terminorum priorum, in x^3 denominatoris, mutandoque unum x in e, & productum multiplicando per 2, quæ est differentia dimensionum x in terminis $- 2bccx$ & x^3.

At quoniam in bx^3 & in x^3 eadem est dimensio x, sequetur producta ex bx^3 in $3exx$, & ex $3bexx$ in x^3, cum literas easdem, cum eosdem numeros præpositos habitura, ideoque sese mutuo sublatura, ut proinde multiplicatio illa omitti possit.

Atque hujusmodi animadversionibus inventum est quod in regula præcipitur, terminos singulos numeratoris in singulos denominatoris terminos esse ducendos, productaque quælibet multipla sumenda secundùm differentiam dimensionum quantitatis incognitæ in terminis binis qui in se mutuò ducuntur. Nam quod non præcipitur unum x in e mutandum, id hanc rationem habet, quod non referat utrum postea per e an per x omnes termini dividantur.

Quòd verò si signa affectionis vera productis singulis præponenda dicuntur, quoties dimensiones x plures sunt in numeratore quàm in denominatore, id quoque ex jam dictis intelligetur; uti consequenter etiam hoc quòd contraria signa sunt adponenda, quoties dimensionum numerus contrà se habet. Velut hîc, productum ex bx^3 in bcc scribendum est cum signo — præposito numero 3, ut fiat $-3bbccx^3$, quia nempe propter bx^3 scimus in posterioribus terminis fore $3bexx$; quod ductum in bcc faciet $+3bbccexx$, sed translatum in partem priorem æquationis, fiet $-3bbccexx$; sive, non mutato x in e, $-3bbccx^3$.

Quod denique in regulâ habetur, quoties in prioribus terminis priusquàm ad eundem denominatorem reducantur, quantitates cognitæ occurrunt eas primum omnium delendas, id ex hoc sequenti exemplo intelligetur rectè præcipi. Sint enim reperti termini priores, quos maximum aut minimum designare oporteat, isti $\frac{x^3}{2a-x} - 2vx + xx + vv$; ubi vv quantitatem cognitam significet: id igitur delendum esse ut appareat, videamus quid futurum sit si non deleatur. Nempe ut ad eundem denominatorem cum cæteris omnibus reducatur, ducendum erit vv in $2a - x$, fietque inde $\frac{2avv - xvv}{2a - x}$ in terminis prioribus. Propter quos in terminis posterioribus, secundùm superiùs explicata, scribetur $\frac{-evv}{-e}$, adeoque multiplicatione alternatim utrinque per denominatores instituta, ducendum erit hinc $2a - x$ in $-evv$; inde $-e$ in $2avv - xvv$. Ex quibus multiplicationibus eosdem utrinque terminos oriri necesse est, cum utrobique eadem hæc tria in se mutuò ducantur $2a - x$ in $-e$ in vv, qui proinde termini se se mutuò sublaturi essent, eoque frustra scriberentur; ac proinde liquet tutò deleri posse ab initio quantitatem vv, idemque quod in hoc exemplo accidit, necessariò quoque in quibuslibet aliis contingere, diligenter intuenti manifestum erit.

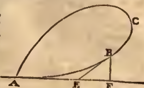
REGULA

ad inveniendas Tangentes linearum curvarum.

IDEM Fermatius linearum curvarum Tangentes regulâ sibi peculiari inquirebat, quam Cartesius suspicabatur non satis ipsum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epistolis ejus hac de re scriptis apparet. Sanè in Fermatii operibus post mortem editis, nec bene expositus est regulæ usus, nec demonstrationem ullam adjectam habet. Cartesium verò in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus assecutum invenio, nec tamen tam perspicuè eam explicuisse quàm per hæc quæ nunc tradimus fiet, quæ jam olim, multò ante istas literas vulgatas conscripsimus.

Præcipuum verò operæ pretium tunc fuit compendiosa hujusce regulæ contractio, quam, quoad potui, prosecutus, tandem in ipsas illas insignes Huddenii, Slusiique regulas desinere inveni, quas mihi Viri hi Clarissimi uterque fere eodem tempore exhibuerant: an vero hae eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum.

Sit data linea curva ut BC, quæ cognitam relationem habeat ad rectam aliquam positione datam AF, ac proinde applicatâ è puncto quolibet curvæ, ut B, rectâ BF, in dato angulo BFA; datoque in recta AF puncto A, certâ æquatione relatio quæ est inter AF & FB expressa habeatur. Exempli gratiâ, appellando AF, x; FB, y, sit æquatio $x^3 = xya - y^3$, ubi a lineam quandam datam significare censenda est.



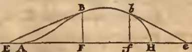
Quòd si jam ad punctum B tangens ducenda sit BE, quæ occurrat rectæ AF in E, voceturque FE, z, ejus longitudo per hane regulam Fermatianæ regulæ compendiariam, invenietur, ex sola æquatione data.

Translatis terminis omnibus æquationis datæ ad unam æquationis partem, qui proinde æquales fiunt nihilo, multiplicentur primò termini singuli, in quibus reperitur y, per numerum dimensionum quas in ipsis habet y, atque ea erit quantitas dividenda. Deinde similiter termini singuli in quibus x, multiplicentur per numerum dimensionum quas in ipsis habet x, & è singulis unum x tollatur; atque hæc quantitas pro divisore erit subscribenda quantitati dividendæ jam inventæ. Quo facto habebitur quantitas æqualis z sive FE. Signa autem + & — eadem ubique retinenda sunt; atque etiam si forte quantitas divisoris, vel dividenda, vel utraque minor nihilo sive negata sit, tamen tanquam adfirmatæ sunt considerandæ: hoc tantùm observando, ut cùm altera adfirmata est, altera negata, tunc FE sumatur versùs punctum A, cùm verò utraque vel affirmata est vel negata, ut tunc sumatur FE in partem contrariam.

In curvâ proposita cujus æquatio $x^3 + y^3 - axy = 0$, fiet secundum hanc regulam dividenda quantitas $3y^3 - axy$, divisor verò $3xx - ay$; ideoque $z = \frac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$, quæ est longitudo cognita, cùm dentur x, y & a.

Esto item alia curva ABH, cujus æquatio $axx - x^3 - qqy = 0$, posito scilicet a & q esse lineas datas, AF vero $= x$, FB $= y$. Sit BE tangens, & FE dicatur ut ante, z. Hîc fiet secundùm regulam, dividenda quantitas $-qqy$; divisor autem $2ax - 3xx$; unde $z = \frac{-qqy}{2ax - 3xx}$

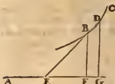
Ubi cum dividenda quantitas sit negata, si fuerit etiam divisor minor nihilo, hoc est si $2a$ minor quàm $3x$, erit z sive fe sumenda in partem ab A aversam. Si verò $2a$ major quàm $3x$, sumenda erit FE versùs A, ex præcepto regulæ.



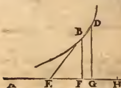
Horum vero rationem, ipsiusque regulæ & compendii quò reducta est, originem ut explicemus, proponatur ut ante curva BC, ad cujus punctum B tangens ducenda sit.

Intelligatur primùm recta EBD, quæ non tangat curvam sed eam fecet in B, atque item in alio puncto D, ipsi B proximo; rectæ autem AG oc-

currat in E; & ab utrisque punctis B, D ducantur ad rectam A G, iisdem angulis inclinatæ B F, D G; & sit A F $= x$, F B $= y$, sicut antea; ponaturque etiam F G data esse, quæ sit e, quæraturque F E $= z$.



Est itaque sicut E F ad F B, hoc est, sicut z ad y, ita E G, hoc est, $z + e$ ad G D, quæ erit $y + \frac{ey}{z}$; & hoc quidem in qualibet curva ita se habere manifestum est.



Nunc porro consideretur æquatio naturam curvæ continens, ex. gr. illa superiùs proposita $x^3 + y^3 - xya = 0$, ubi a rectam longitudine datam, velut A H significabat; & paret, cùm punctum D in curva ponatur, debere eodem modo duas A G, G D, hoc est $x + e$ & $y + \frac{ey}{z}$ ad se mutuò referri atque A F, F B, hoc est x & y. Nempe si in æquatione proposita pro x substituatur ubique $x + e$, & pro y, ubique $y + \frac{ey}{z}$, debebit æquatio hinc formata terminos omnes habere æquales nihilo; hoc est

$$x^3 + [3exx] + 3eex + e^3, + y^3 + [\frac{3ey^3}{z}] + \frac{3eey^3}{zz} + \frac{e^3y^3}{z^3} \\ - axy - [aey] - [\frac{aeyx}{z}] - \frac{aeey}{z} = 0.$$

In hac autem æquatione constat necessariò terminos prioris æquationis, ex qua formata est, contineri debere, nempe $x^3 + y^3 - axy$: qui cùm sint æquales nihilo ex proprietate curvæ, idcirco his in æquatione deletis, necesse est etiam reliquos nihilo æquari, in quibus singulis manifestum quoque est vel unum e vel plura reperiri, ideoque omnes per e dividi posse. Qui autem post hanc divisionem non ampliùs habebunt e, eos, neglectis reliquis, scio nihilo æquari debere, quantitatemque lineæ z sive F E ostensuros; si nempe B E jam tanquam tangens consideretur, ideoque F G, seu e, infinitè parva. Nam termini in quibus adhuc e superest, etiam quantitates infinitè parvas sive omnino evanescentes continebunt. Et his quidem hactenus Fermatianæ regulæ origo ac ratio declaratur: nunc porro ostendemus quomodo eadem ad tantam brevitatem perducta sit. Video itaque ex æquatione totâ novissimâ, tantùm eos terminos scribi necesse esse quibus inest e simplex, velut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$. Qui termini quomodo facili negotio ex datis æquationis terminis $x^3 + y^3 - axy = 0$, describi possint, deinceps explicandum. Et primò quidem apparet $3exx + \frac{3ey^3}{z}$ nihil aliud esse quàm secundos terminos cuborum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$ ideo scriptos quia in æquatione habentur cubi ab x & y. Nam reliqui omnes termini cuborum, ut & quarumvis aliarum potestatum ab $x + e$, & ab $y + \frac{ey}{z}$, vel plura quàm unum e habent, vel nullum; ideoque, ut jam diximus,

mus, frustra scriberentur. Eâdem itaque ratione, si aliæ potestates ab x vel y essent in æquatione propositæ, scribendi forent in æquatione alterâ termini secundi tantùm similium potestatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$. Notandumque secundos hosce terminos, ex ipsis datis potestatibus ab x & y, certa ratione confici; nempe ex potestate quavis x, velut x^3, mutando unum x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius x: ita hîc fit $3exx$. Ex potestate y verò ducendo eam in $\frac{e}{z}$ præponendoque similiter numerum dimensionum ipsius y: ita hîc ab y^3 fit $\frac{3y^3e}{z}$. Quorum quidem rationem ex potestatum formatione intelligere facillimum est.

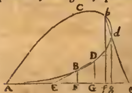
Porro propter xy in termino æquationis $-axy$, facile quoque apparet quid in æquatione secunda scribendum sit. Cùm enim substituendum sit pro xy productum ab $x + e$ in $y + \frac{ey}{z}$, sed ea tantùm scribenda in quibus unum e, ideo de duobus $x + e$ tantùm e ducemus in y, & tantùm x in $\frac{ey}{z}$; adeoque fient $ey + \frac{exy}{z}$; quibus in a ductis, præpositoque signo $-$, quia habetur $-axy$, existet $-aey - \frac{aexy}{z}$, sicut suprà.

Sic quoque si in æquatione proposita haberetur xxy^3; sumerem propter xx duos priores terminos quadrati ab $x + e$, nempe $xx + 2ex$; & propter y^3 duos priores terminos cubi ab $y + \frac{ey}{z}$, nempe $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$; quorum productum pro xxy^3 surrogandum. Sed etiam hîc de duobus $xx + 2ex$ tantùm xx ducendum in $\frac{3ey^3}{z}$, tantúmque $2ex$ in y^3 (nam cætera vel plura quàm unum e vel nullum habebent) adeo ut fiat $\frac{3exxy^3}{z} + 2exy^3$.

Atque ex his animadvertere licet, semper utrumque horum terminorum describi posse ex dato termino, qui hîc xxy^3, alterum quidem mutato uno x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius; ita enim fit $2exy^3$: alterum verò ducendo datum terminum in $\frac{e}{z}$, præponendoque similiter numerum dimensionum ipsius y; ita enim fit $\frac{3exxy^3}{z}$. Cumque hac eadem immutatione, paulo ante, etiam secundos terminos potestatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$ ex potestatibus x & y æquationis datæ describi ostensum sit, manifestum jam est à singulis terminis æquationis datæ, in quibus x vel potestas ejus, describi prædictâ methodo in secunda æquatione totidem terminos in quibus non est z; à singulis verò in quibus y vel potestas ejus, describi totidem terminos, dictâ etiam methodo, quarum fractionis denominator sit z; nec alibi hanc literam in secunda æquatione repertum iri.

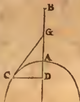
Hoc igitur cognito, quo pacto ex æquatione quavis proposita, velut hîc $x^3 + y^3 - axy = 0$, alia describenda sit, ut hîc $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$, animadverto porro, si termini divisi per z ad alteram par-

tem æquationis transferantur, ductisque omnibus in z, divisio deinde fiat per terminos in quibus initio non erat z, existere tunc ipsam quantitatem z ab una æquationis parte; uti hic fiet $z = -\frac{3ey^3 + aeyx}{3exx - aey}$. Atque hinc intelligo ad consequendam quantitatem z, ponendos tantùm eos terminos æquationis secundæ, qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus y, sublato tantùm denominatore z, mutatisque signis $+$ & $-$. Deinde dividendo istos terminos per eos qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus x. Porro ex omnibus, tam divisis quàm dividentibus, patet rejici posse e, adeo ut in hoc exemplo fiat $z = -\frac{3y^3 + ayx}{3xx - ay}$. Itaque rejicitur $\frac{e}{z}$ ex terminis qui descripti sunt ab iis qui habent y. Sic autem descriptos eos superiùs diximus ut ducerentur in idem $\frac{e}{z}$, præponereturque numerus dimensionum y. Itaque nihil requiri apparet ad terminos hosce (quatenus ad definiendam quantitatem z hîc adhibentur) ex terminis æquationis primæ, in quibus y, describendos, quàm ut præponamus tantùm iis numerum dimensionum quas in ipsis habet y, signaque $+$ & $-$ invertamus. Sic nempe ab $y^3 - axy$, describetur $-3y^3 + axy$. A terminis vero qui descripti sunt à terminis æquationis primæ in quibus x, cùm tantùm e hîc rejiciendum patuerit, cumque hos ita prius descriptos diximus ut unum x mutaretur in e, præponereturque numerus dimensionum ipsius x; apparet eos, quatenus hic ad constituendum divisorem adhibentur, sic tantùm describi opus esse ex terminis propositæ æquationis in quibus x, ut præponatur iis numerus dimensionum ipsius x, ac deinde unum x auferatur. Sic nempe ab $x^3 - axy$ describetur $3x^3 - axy$; & dempto ubique x uno, fiet $3xx - ay$. Atque ex his ratio regulæ ab initio positæ manifesta est. Nam quod signa $+$ & $-$ in terminis qui describuntur ab iis in quibus y, hîc immutanda diximus, in regulâ verò nulla omnino immutanda, id eòdem redire liquet cùm quantitatem negatam, sive minorem nihilo, tanquam affirmatam considerandam ibi diximus. Ut autem ratio observationis ibidem adjectæ, in utram partem linea FE accipienda sit, intelligatur, repetemus figuram in principio positam, ubi vidimus AG esse $x + e$, EG vero $z + e$; unde fiebat GD $+ y + \frac{ey}{z}$. Si autem tangens ab altera parte lineæ BF cadere intelligatur, velut be, atque hæc primùm curvam secare fingatur, ut ibi factum est in d, ducaturque dg parallela bf; fiet ponendo rursus $fg = e$, $fe = z$, ut Ag quidem fiat $x + e$, sed eg erit $z - e$, unde $gd = y - \frac{ey}{z}$. Atque hinc porro facile est perspicere æquationem secundam, quæ ex proposita æquatione, $x^3 + y^3 - axy = 0$ describitur, hoc casu fore $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = 0$, termini ut nempe qui per z dividuntur, habeant signa contraria iis quæ habebant in æquatione descripta casu priori, quæ erat $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z}$. Ex hac verò priori sequitur, quando quantitas $3exx - aey$, sive quando $3xx - ay$ (quæ divisorem constituit secundum regulam) fuerit minor nihilo, sive negata, tunc quan-



titatem reliquam $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$; ſive etiam $3y^3 - ayx$ (quæ quantitatem dividendam ſecundùm regulam conſtituit) eſſe affirmatam, aut cùm illa eſt affirmata, hanc eſſe negatam; quia omnes ſimul æquationis termini æquantur nihilo. At contrà ex illa æquatione $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = 0$, ſequitur, quando quantitas $3exx - aey$, ſive $3xx - ay$, fuerit negata, tunc reliquam $-\frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$, ſive etiam $-3y^3 + ayx$ eſſe affirmatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ eſſe negatam: aut quando $3xx - ay$ fuerit affirmata, tunc $-3y^3 + ayx$ eſſe negatam; ac proinde $3y^3 - ayx$ eſſe affirmatam. Per hæc itaque apparet ex quantitatibus per regulam inventis, quæ erant $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} = z$ judicari poſſe ad utrum caſum conſtructio tangentis pertineat; nempe ex comperta diſſimilitudine affectionis in diviſore & dividendo, ſequi ad priorem caſum eam pertinere, hoc eſt z, ſive FE, accipiendam eſſe versùs A: ex ſimilitude verò eorum affectionis ſequi ad contrariam partem ſumendam.

Poteſt autem quantitas z ſive FE per regulam inventa, nonnunquam ad ſimpliciores terminos reduci ope æquationis datæ, quæ naturam curvæ continet: velut in hac curva AC, axem habente AD, verticem A, cujuſque ea eſt proprietas ut, ſi à puncto C in eâ ſumpto, applicetur ordinatim CD, fiat productum ex cubo BD (eſt autem B punctum in axe extra curvam datum) in quadratum DA æquale cubo quadrato DC. Sive ponendo $BA = a$, $BD = x$, $DC = y$, fiat æquatio curvæ naturam continens, iſta $x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 = 0$. Hîc ponendo CG eſſe tangentem, quæ occurrat axi in G, vocandoque DG, z, fit ſecundum regulam $z = \frac{5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$. Quia autem ex datâ æquatione eſt $y^5 = x^5 - 2ax^4 + aax^3$, reſtituendo pro $5y^5$ id quod ipſi æquale eſt, fiet $z = \frac{5x^5 - 10ax^4 + 5aax^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$; ſive dividendo per xx, erit $z = \frac{5x^3 - 10axx + 5aax}{5xx - 8ax + 3aa}$. Et rursùs, dividendo hanc fractionem per $x - a$, habebitur $z = \frac{5xx - 5ax}{5x - 3a}$. Quòd ſignificat faciendum ut ſicut BD quinquies ſumpta minus BA ter, ſive ut BA bis unà cum AD quinquies ad AD quinquies, ita BD ad DG; atque ita GC tacturam in C curvam AC.

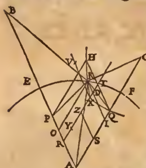


CONSTRUCTION D'UN PROBLEME D'OPTIQUE,

qui est la XXXIX. Proposition du Livre V. d'Alhazen, & la XXII. du Livre VI. de Vitellion.

Les points BC & le cercle EK dont le centre est A sont donnez sur un mesme plan; il faut trouver le point K sur le cercle, en sorte que les lignes BK, CK fassent avec la ligne AK des angles égaux entr'eux.

AYANT mené AB, AC soit fait comme AC à AF, ainsi AF à AQ; & comme AB à AE, ainsi AE à AP. Soit aussi AR & AS, chacune la moitié de AP & de AQ. Dans l'angle BAC soit achevé les parallelogrammes PAQH & ARZS. Sur RZ prolongée soit pris ZY & ZX, chacune égale à la ligne qui peut la difference d'entre les quarrez de QS & ZS. Ayant fait XV égale à XY & parallele à AB, sur les deux costez XV, XY soit décrit une hyperbole qui passera par les points Q & H, comme il est évident par la construction : cette hyperbole QXH rencontrera le cercle au point K qui est celuy que l'on cherche.



Ayant mené KO, & KI paralleles à AC & à AB, dont KI rencontre YX au point D; à cause de l'hyperbole le rectangle YDX est égal au quarré de KD ordonnée, ou de OR; & le rectangle YTX est égal au quarré de HT ou de PR; & ayant osté du rectangle YTX le rectangle YDT, & du quarré de PR le quarré de OR, il restera le rectangle RDT ou AIQ qui sera égal au rectangle AOP: donc PO est à AI ou OK son égale, comme QI est à AO ou IK. Et ayant mené les lignes KP, KQ, les triangles KOP, KIQ seront semblables, & partant équiangles; c'est pourquoy les angles APK, AQK qui sont les mesmes ou les supplemens des angles égaux OPK, IQK seront égaux entr'eux. Mais par la construction on a fait comme AB à AE ou à AK, ainsi AK ou AE à AP: c'est pourquoy les deux triangles BAK, KAP sont semblables; & pour les mesmes raisons les deux triangles CAK, KAQ sont aussi semblables : c'est pourquoy l'angle BKA est égal à l'angle APK; & l'angle CKA est égal à l'angle AQK. Mais nous venons de démontrer que les angles APK, AQK sont égaux; les angles BKA, CKA seront donc aussi égaux entre-eux; ce qu'il falloit démontrer.

Si le point H tomboit sur la circonference du cercle, ce point H seroit le point K que l'on cherche, & les lignes HP, KP, KO & semblablement les lignes HQ, KQ, KI ne feroient qu'une mesme ligne HP & HQ, d'où l'on prouveroit les mesmes choses qu'on a fait cy-devant, sans avoir besoin de l'hyperbole.

DIVERS

DIVERS
OUVRAGES
DE
M. PICARD.

AVERTISSEMENT.

MOnsieur Picard estant mort au mois d'Octobre 1682. tous ses écrits furent mis entre les mains de M. de la Hire pour éxaminer ce qui seroit en estat d'estre donné au public. Il ne trouva que le Traité du Nivellement qui fust achevé, & il le fit imprimer en 1684. par ordre de Monseigneur de Louvois. Pour les autres Ouvrages que l'on donne icy ils n'estoient encore qu'ébauchez. Celuy des Cadrans estoit le plus avancé; mais comme il l'écrivoit principalement pour luy, & pour ceux qui avoient beaucoup de connoissance de cette science, il y avoit supposé plusieurs choses que M. de la Hire a jugé à propos d'expliquer, pour faciliter l'intelligence de quelques endroits, qui sans cela pourroient paroistre difficiles. Sa Dioptrique que l'on donne icy sous le nom de fragmens, n'avoit encore nulle forme de traité; c'est pourquoy l'on s'est contenté d'en donner les propositions telles qu'on les a trouvées: on a seulement mis de suite celles qui avoient quelque ordre, & on les a rangées dans la place où l'on a jugé qu'elles devoient estre. On a aussi tiré de ses registres quelques remarques sur les poids & sur les mesures avec des observations de M. Auzout qui y estoient inserées. On y a joint les experiences sur les eaux, qu'il avoit faites autrefois avec M. Romer, & les conséquences qu'il en avoit tirées: mais pour éviter les redites on a retranché certaines choses qui sont expliquées plus au long dans le traité du Mouvement des eaux de M. Mariotte. On a réservé ses Observations & plusieurs Problemes astronomiques pour un second volume de ces col-

lections. Enfin l'on a ajousté à la fin de ces Ouvrages de M. Picard la maniére de prendre le diametre des Planetes que M. Auzout fit imprimer en 1667, tant à cause que M. Auzout reconnoist que M. Picard y a beaucoup de part, que parce qu'il ne s'en trouve presque plus d'exemplaires.



DE

DE
LA PRATIQUE
DES
GRANDS CADRANS
PAR LE CALCUL.

SI l'on voit peu de grands cadrans qui soient bons, cela vient autant de la difficulté qu'il y a de bien pratiquer en grand, & sur un mur les régles vulgaires de la Gnomonique, que de l'ignorance de ceux qui ont, pour ainsi dire, avili cette curieuse & utile partie des Mathématiques.

Mon dessein n'est pas de parler contre les pratiques de Géometrie, ni de prendre à tasche de m'en passer entiérement; principalement lors qu'elles sont simples & sans embaras de lignes: mais toutes choses bien considerées, on demeurera d'accord que la meilleure maniére pour bien réussir à la construction d'un grand cadran, est de le calculer; ce qui se peut faire à loisir & commodément dans le cabinet.

C'est cette maniére que je me suis proposé d'expliquer à ceux qui ont déja quelque entrée dans la Gnomonique, & qui d'ailleurs sçavent la pratique des triangles sphériques & l'usage des logarithmes.

CHAPITRE PREMIER.

Des Préparations.

JE suppose que l'endroit où l'on a dessein de faire un grand cadran soit bien plan, en sorte qu'une régle y convienne par tout & en tous sens. Ce n'est pas qu'on ne puisse faire des cadrans sur toutes sortes de surfaces, quoyqu'irréguliéres; mais cela demande des pratiques particuliéres, & souvent méchaniques.

On pourra commencer par un faux style qui sera de longueur à discrétion & qui ne servira que pour connoistre la position du plan à l'égard du ciel; le plus long sera toûjours le meilleur, pourveû que son ombre puisse estre terminée dans le plan: mais si on en veut mettre d'abord un qui soit pour demeurer, il sera bon d'avoir fait en petit sur le papier un dessein du cadran proposé; & pour cét effet il suffira d'avoir sçeû à peu prés par la boussole ou autrement la déclinaison du plan. Nous avons mis à la fin de ce traité des Tables, où l'on trouvera tout ce qui est nécessaire pour faire promptement un cadran vertical, supposé la déclinaison du plan.

Par le moyen de ce dessein ou modele, on connoistra suffisamment la forme que l'on devra donner au cadran, & les heures que l'on y pourra ménager; comme aussi le lieu & la hauteur convenable du style. Surquoy on peut remarquer en passant, que supposé deux plans verticaux d'égale grandeur, mais de différente déclinaison, celuy qui déclinera le plus demandera une plus grande longueur de style, suivant la raison des sinus de complément des

hauteurs du Pole sur ces plans. La raison est, que par ce moyen le rayon équinoxial sera d'une mesme longueur à tous.

La broche qui tiendra lieu de style sera recourbée & de figure propre, pour faire que le point qui répond perpendiculairement à l'extrémité du style, & que nous appellerons simplement le pié du style, soit dégagé du pié de la broche. On prendra garde aussi que le pié de cette broche n'embarasse pas la ligne soustylaire. Tout cela se sçaura assez bien par le petit dessein que nous avons supposé.

Le style sera terminé par une plaque ronde dont le bord sera abbatu par-dessous tout au tour en chanfrain, afin que l'ombre soit toûjours causée par la surface supérieure de la plaque, au centre de laquelle il y aura un point frapé, qui puisse arrester la pointe du compas. Le diamétre de cette plaque pourra estre environ la 36me partie de la plus grande distance à laquelle l'ombre devra estre portée.

On fera en sorte, en plantant la broche, que la plaque soit bien parallele au plan du cadran, ce qui se pourra faire facilement avec une équierre présentée tout au tour; ou bien simplement par le moyen de l'ombre, qui lors qu'elle ne sera pas beaucoup éloignée du pied du style, devra estre ronde. Je mets cette condition; car bien qu'il soit vray qu'une plaque ronde considerée sans épaisseur, & parallele à un plan, fist sur le plan un ombre qui seroit toûjours ronde si le soleil n'estoit qu'un point; néanmoins à cause de la grandeur du disque du soleil, si cette ombre est receüe obliquement, elle se trouve étressie tout au tour par une infinité d'ellipses de lumiére, dont les grands diamétres tendent vers le soleil, & sont tous paralleles entre eux; de-sorte que cette ombre ne peut demeurer ronde que tandis que les ellipses de lumiére peuvent passer pour des cercles.

De l'ombre qu'une plaque ronde exposée au soleil fait sur un plan parallele à la plaque.

SI une plaque que je considere sans épaisseur est parallele à un plan, l'ombre du soleil receû sur ce plan, à quelque obliquité que ce fust, seroit semblable & sensiblement égale à la plaque, si le soleil n'estoit qu'un point, à cause de la distance du soleil presque infinie. Mais pour comprendre ce qui doit arriver à l'ombre d'une plaque ronde, à cause de la grandeur du disque entier du soleil, il faut considerer qu'au lieu que le rayonnement du centre du soleil par le contour d'une plaque ronde parallele à un plan, enfermeroit toûjours sur le plan un cercle d'ombre égal à la plaque; au lieu de cela, dis-je, le rayonnement du disque entier du soleil, au travers du centre de la plaque, estant receû obliquement sur le plan terminant, y feroit une ellipse de lumiére; car il se feroit alors deux cônes de lumiére droits, & opposez l'un à l'autre, ayant leur sommet commun au centre de la plaque, & dont l'un auroit sa base droite dans le soleil, & l'autre seroit coupé obliquement par le plan terminant.

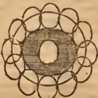
Nous appellerons cercle du milieu celuy que l'on s'imagine fait du rayonnement du centre du soleil par le contour de la plaque; comme aussi ellipse du milieu celle que nous avons imaginée faite par le rayonnement du disque entier du soleil au travers du centre de la plaque.

Cela supposé, il faut s'imaginer, 1°. Que le cercle d'ombre, tel qu'il seroit si le soleil n'estoit qu'un point, est diminué par une infinité d'ellipses de lumiére faites du rayonnement de tout le disque du soleil au travers de chacun des points de la circonférence de la plaque, lesquelles ellipses nous appellerons laterales.

2°. Que tous les grands diamétres des ellipses laterales sont paralleles & égaux à celuy de l'ellipse du milieu; car il faut s'imaginer des cones égaux, dont les axes qui sont des rayons venans du centre du soleil, sont tous paralleles, & par conséquent également inclinez au plan terminant qui les coupe tous à une égale distance de leur sommet.

3°. Que dans toutes les ellipses le point qui représente le centre du soleil, & auquel aboutit l'axe du rayonnement n'est pas le centre de l'ellipse; mais coupe inégalement le grand diametre en raison des costez du cône, ou des secantes des hauteurs des deux bords superieurs & inferieurs du soleil consideré à l'égard du plan terminant, ou en raison réciproque des sinus des mesmes hauteurs.

4°. Que ces mesmes points qui représentent le centre du soleil dans les ellipses laterales, sont tous rangez dans la circonférence du cercle du milieu; parce que les mesmes rayons qui viennent du centre du soleil, & qui passant par le contour de la plaque vont aboutir à la circonférence du cercle du milieu, sont aussi les axes des cones lateraux, d'où il s'ensuit que l'ombre est plus diminuée du costé du soleil qu'à la partie opposée, d'autant que la plus grande portion du grand diamétre de chaque ellipse laterale se trouve dans le cercle du costé du soleil, au lieu que de l'autre costé est la moindre: de sorte que l'ombre est rétressie comme en ovale, mais plus d'un costé



que d'autre, jusques à ce qu'elle se perde enfin à mesure que les ellipses croissent, & cette maniére d'ovalle d'ombre sera contreposée à l'égard des ellipses de lumiére.

5°. Que de mesme qu'on s'est imaginé une infinité d'ellipses de lumiére rangées à l'entour du cercle du milieu qui demeure toûjours égal à la plaque, on peut aussi s'imaginer une infinité de cercles égaux à celuy du milieu, qui auront leurs centres dans les bords de l'ellipse du milieu, lesquels cercles seront faits par le rayonnement de chaque point du bord du disque du soleil, par le contour entier de la plaque.

6°. Que si au lieu d'une plaque qui fait ombre, on considere un trou rond & parallele au plan terminant; il y aura une infinité de cercles de lumiére égaux au trou, qui venant du rayonnement de chaque point des bords du soleil par le trou tout entier, ont leurs centres dans les bords de l'ellipse qui représente le soleil: ou bien on aura une infinité d'ellipses de lumiére rangées dans la circonférence d'un cercle égal au trou, de la maniére que nous avons dit à la quatriéme remarque.

CHAPITRE II.

Des Préparations.

PREMIER PROBLEME.

Trouvez le pié du style.

AYEZ un grand compas à verge, dont les pointes soient recourbées en dedans: faites tenir une des pointes de ce compas appliquée au centre de la plaque du style, pendant qu'avec l'autre pointe vous décrirez sur le mur ou sur le plan du cadran un cercle qui soit le plus grand qu'il se pourra commodément. Le centre de ce cercle sera le pied du style requis.

On trouve communément le centre d'un cercle par trois points pris dans sa circonférence; mais la pratique la plus expeditive, sera d'ouvrir premiérement le compas de la grandeur du diametre entier du cercle, puis l'ayant transportée sur une échelle de parties égales, en prendre la moitié pour servir à trouver le centre requis.

Il faut prendre garde en traçant le cercle, de ne pas faire plier le compas, & supposé que le plan sur lequel on travaille soit bien dressé, on sera asseuré que l'on aura bien fait, si la hauteur du style, le demi-diametre du cercle, & la premiére ouverture du compas qui a servi à décrire le cercle, sont les trois costez d'un triangle rectangle, ce qui se connoistra facilement par les quarrez, en posant pour son hypotenuse l'ouverture du compas qu'on a prise d'abord. On voit par là qu'il auroit suffi d'avoir deux de ces grandeurs pour en conclure la troisiéme; joint que si la premiére ouverture du compas pour décrire le cercle, a esté faite exprés de 1000 parties, & que le demi-diametre du cercle se soit trouvé, par exemple, de 643 parties, lequel nombre cherché dans les Tables des sinus est celuy de 40 degrez 1 minute; son sinus de complement 766 sera la hauteur du style. Il est vray que dans les tables le sinus de $40^{d}\,1^{m}$ est 7658754; mais à cause que les quatre figures que j'ay retranchées vallent la fraction $\frac{8754}{10000}$, qui approche de l'entier, j'ay deu prendre le nombre 766 au lieu de 765.

On doit aussi retrancher les quatre derniéres figures des nombres naturels des sinus, des tangentes & des secantes, lors que l'on fait le rayon de 1000 parties, ou de quatre figures seulement, parce que dans les Tables il est ordinairement de huit figures. Mais à l'égard des logarithmes, parce qu'ils sont faits comme si le rayon estoit de onze figures, il s'ensuit que lors qu'on voudra faire le rayon de 1000 parties, il faudra deprimer de sept unitez la caracteristique des logarithmes des sinus & des tangentes; quoy-que leurs nombres naturels n'ayent esté déprimez que de quatre figures, ce qui soit dit seulement en passant pour servir d'avertissement.

Définition.

La ligne verticale est la section d'un plan perpendiculaire au plan du cadran, & qui passe par le centre de la plaque du style, ou bien par son pied, ce qui est la mesme chose.

SECOND PROBLEME.

Trouver la ligne verticale.

SUSPENDEZ un plomb au centre de la plaque du style, ou bien au costé d'une petite équerre dressée sur le pied du style, puis bornoyant par le pied du style, marquez sur le mur un autre point qui soit caché sous le fil du plomb: la ligne tirée par le pied du style, & par le point que vous aurez marqué, sera la verticale que l'on cherche.

REMARQUE.

On pourra encore trouver cette verticale par le moyen d'une ligne horizontale ou de niveau tracée sur le mur en quel endroit on voudra; car la ligne que l'on menera par le pied du style, & perpendiculaire sur cette ligne horizontale, sera la verticale que l'on cherche.



TROISIE'ME PROBLEME.

Trouver l'inclinaison du mur, ou du plan du Cadran à l'égard de l'horizon.

CETTE opération se fera par le moyen de l'instrument qu'on appelle *Inclinatoire* ou *Réclinatoire*, qui aura pour cét effet quelques degrez & leurs minutes marquées sur un petit limbe qui doit estre au bas: mais au defaut de cét instrument, & principalement lors qu'il ne fait point de vent, on pourra se servir d'un plomb & d'une grande régle, observant de combien sur certaine hauteur de la régle le plomb s'éloigne ou s'approche du plan du cadran, en appliquant un des costez de la régle contre le mur sur la verticale, le plomb estant attaché au haut de cette régle. Si le plomb s'approche plus du mur par le bas que par le haut, le mur sera en talus; au contraire, s'il s'éloigne plus du mur par le bas que par le haut, le mur sera surplombé.

On trouvera l'angle de l'inclinaison du mur à l'égard de l'horison, c'est-à-dire, l'angle que le mur fait avec le vertical, si l'on fait comme la longueur du fil du plomb sur la régle, à la difference d'entre les deux distances perpendiculaires au mur, depuis les extrémitez du fil du plomb sur la régle; ainsi le rayon ou sinus total au sinus de l'angle de l'inclinaison.

CHAPITRE III.

Des observations pour un grand cadran.

POUR estre asseuré de réussir à faire un bon cadran, il ne faut point épargner les observations. Car quoy-que dans la theorie, comme on verra cy-aprés, un point d'ombre observé soit suffisant pour trouver ce qui est nécessaire pour sa construction; on ne doit pas pour cela négliger dans la pratique d'en observer plusieurs pour operer avec plus d'exactitude. Il ne faut pas aussi prétendre se passer des choses que l'on peut sçavoir d'ailleurs, comme de la hauteur du pole du lieu où l'on est, & de la déclinaison du soleil: elles sont si faciles à sçavoir, que nous les supposerons toûjours connuës lors qu'on pourra s'en servir, puis que l'on ne sçauroit avoir trop de choses données.

Il faut premiérement considerer que les cadrans qui sont faits autour de la terre font aussi bien leur effet, que si l'extrémité du style estoit posée à son centre, & que dans un mesme lieu on peut faire servir toute sorte de cadrans. De plus, on doit aussi considerer tout plan comme un horizontal pour quelque lieu de la terre, puis qu'en effet, il est toûjours parallele à quelque horison; de sorte qu'il a son zenith, son méridien, & sa hauteur de pole particuliere. D'où il est facile de voir que si le méridien du plan convient avec celuy du lieu, un cadran sur ce plan se fera tout simplement à la maniére d'un horizontal pour une certaine hauteur de pole. Mais si les méridiens sont differens, les heures du plan seront aussi differentes de celles du lieu, & il sera nécessaire d'en faire la réduction; tout de mesme que si estant sous un méridien different de celuy de Paris, on vouloit avoir un cadran horizontal qui montrast les heures de Paris, c'est à dire, les heures, comme on les compte à Paris dans le mesme temps.



PREMIER PROBLEME.

Trouver par observation la ligne soustylaire.

LA ligne qu'on appelle soustylaire est proprement la ligne méridienne du plan du cadran. Marquez plusieurs points d'ombre correspondans de-

vant & aprés la soustylaire, comme on fait ordinairement pour trouver la ligne méridienne sur un plan horizontal. Car comme je suppose que l'on sçache à peu prés l'heure à laquelle l'ombre devra estre aux environs de la soustylaire, on sçaura assez les temps convenables pour les observations devant & aprés. Cette pratique hors les solstices a besoin de quelque correction que nous donnerons à la fin de ce Traité.

SECOND PROBLEME.

Trouver par observation la hauteur du pole sur le plan.

DE mesme qu'on trouve la hauteur du pole d'un lieu par la hauteur méridienne du soleil, supposé sa déclinaison; on trouve aussi la hauteur du pole sur le plan, par l'observation de l'ombre la plus courte & la plus proche du pied du style. Pour cét effet il faut dans un mesme jour, avoir marqué assez de points d'ombre aux environs de la soustylaire pour estre asseuré que celuy de la plus courte ombre y est compris. La plus petite distance entre le pied du style & la trace d'ombre observée, sera ce que j'appelle la plus courte ombre.

Maintenant il faut faire comme la hauteur du style A B est à la plus courte ombre A C, ainsi le rayon est à la tangente de l'angle A B C, qui est la distance entre le soleil dans le méridien du plan & le zenith du plan. De sorte que si le plan regarde vers le midy, il faudra oster la déclinaison septentrionale, ou bien ajouster la méridionale, pour avoir la distance entre le zenith du plan & l'equinoxial, laquelle distance est égale à la hauteur du pole. Mais si le plan regarde le Septentrion, il faudra oster la déclinaison méridionale, ou bien ajouster la septentrionale à l'angle A B C pour avoir la hauteur de pole du plan.

B A C

REMARQUE.

IL faut entendre par ces mots de plan qui regarde le midy, *que c'est lors que la soustylaire depuis le pied du style jusqu'à la trace de l'ombre, tend vers le midy; & au contraire, par les mots de* plan qui regarde le Septentrion.

Il faut aussi remarquer que lors que le zenith est entre le lieu du soleil & l'équateur, il faut oster l'angle A B C à la déclinaison méridionale ou l'ajouster à la septentrionale, de mesme qu'il est marqué cy-dessus, pour oster ou ajouster la déclinaison à l'angle A B C. Par exemple, si le plan regarde le Septentrion, c'est-à-dire, si la soustylaire depuis le pied du style jusqu'à la plus courte ombre, tend vers le Septentrion, & que le zenith soit entre l'équateur & le lieu du soleil, il faudra oster l'angle A B C à la déclinaison méridionale pour avoir la hauteur du pole; & au contraire, l'ajouster à la déclinaison septentrionale.

A l'égard de la plus courte ombre, qui sera quelquefois acourcie par la réfraction, il y aura quelque correction à faire dont nous parlerons à la fin.

LEMME.

Mesurer sur un plan un angle donné, ou bien en faire un de telle grandeur qu'on voudra.

DE la pointe de l'angle, comme centre, & de l'intervalle de 1000 parties, décrivez un arc & prenez-en la corde; la moitié de cette corde cherchée dans les tables des sinus, sera le sinus de la moitié de l'angle re-

quis; comme si la corde est 518, dont la moitié est 259, l'angle sera de 30 d, 2 m Car ayant cherché dans les tables le nombre 259 dans la colonne des sinus, on trouve l'angle qui luy répond de 15 d, 1 m, en supposant toûjours le rayon de 1000 parties.

Suivant cette pratique on fera facilement un angle droit en prenant une corde de 1414 parties; ce qui sera commode pour les perpendiculaires.

REMARQUE.

Monsieur Picard suppose que l'on a toûjours une régle divisée en parties égales, desquelles on se sert dans toutes les opérations qu'il faut faire pour déterminer quelque longueur; & que 1000 de ces parties valent le rayon.

TROISIE'ME PROBLEME.

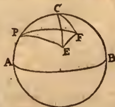
Deux points d'ombre estant donnez par observation, trouver la hauteur du pole sur le plan & la ligne soustylaire, supposé la déclinaison du soleil.

Il faut premierement mesurer les distances entre chaque point d'ombre observé, & le pied du style, dont je suppose la hauteur connuë; & par ce moyen trouver la distance entre le soleil & le zenith du plan pour chaque point d'ombre.

Il faut ensuite mesurer l'angle enfermé entre les deux lignes que l'on doit avoir menées du pied du style aux deux points d'ombre.

Cela supposé, la solution de ce probleme est la mesme que quand on cherche la hauteur du pole du lieu, & la ligne meridienne par le moyen de deux hauteurs de soleil & de l'angle compris entre les deux azimuths qui passoient par le soleil au temps de l'observation des points d'ombre. Voicy l'explication de l'opération qu'il faut faire.

A B est sur la sphere un horison parallele au plan du cadran. C est son zenith. P le pole élevé sur le plan; & par consequent A P C D sera le cercle meridien de ce mesme horizon. CE, CF sont les distances du zenith jusqu'aux lieux du soleil en E & F dans les observations des points d'ombre; & l'angle E C F est celuy qui est compris par les deux lignes d'ombre, qui représentent les azimuths du plan CE, CF.



Au triangle sphérique E C F, on connoist les deux costez C E, C F & l'angle E C F qu'ils comprennent; c'est pourquoy on trouvera par les régles de Trigonométrie la valeur du costé EF, & l'angle EFC. En suite au triangle P E F, supposé la déclinaison du soleil, les costez P E, P F seront connus, & EF vient d'estre trouvé dans le triangle CEF; on trouvera donc aussi l'angle EFP, qui estant osté de EFC connu, il restera l'angle PFC. Mais les costez PF, FC sont donnez; c'est pourquoy dans le triangle P F C, les deux costez & l'angle compris estant connus; on trouvera le costé opposé qui est l'arc PC du méridien compris entre le zenith & le pole, qui est le complément de la hauteur du pole sur le plan. On trouvera aussi dans le mesme triangle, l'angle PCF ou son supplément à deux droits FCB, qui est l'angle que doit faire la soustylaire avec la ligne d'ombre, dont le point a esté marqué lors que le soleil estoit en F. On aura donc par ce moyen la position de la soustylaire sur le plan & la hauteur du pole.

Ce probleme comprend les deux premiers; mais quand il ne seroit pas em-

barassé de calculs, il ne s'en faut servir qu'au besoin : car c'est de mesme que si l'on vouloit trouver la hauteur de pole d'un lieu autrement que par les hauteurs méridiennes; & la ligne méridienne autrement que par des observations correspondantes faites devant & aprés midy.

REMARQUES.

Sur le premier article de ce probleme, on doit remarquer que pour trouver la distance en degrez entre le zenith du plan & le lieu du soleil au temps où l'on a marqué les points d'ombre, il faut resoudre un triangle rectangle & rectiligne, dont l'un des costez autour de l'angle droit est la hauteur du style, & l'autre est la longueur de l'ombre; car l'angle qu'on trouvera opposé à ce dernier costé sera l'arc de l'azimut, comme C E ou C F compris entre le zenith C & le lieu du soleil E ou F au temps où l'on a marqué les points d'ombre.

Sur le second article, pour mesurer l'angle compris entre les deux lignes d'ombre, il le faut faire par le moyen d'un Rapporteur sur le plan, ou bien par la Trigonométrie rectiligne, ayant mesuré exactement la longueur des deux lignes d'ombre & la distance entre les deux points d'ombre : car par le moyen des trois costez connus dans le triangle rectiligne on trouvera l'angle opposé au costé entre les deux points d'ombre, qui est celuy de la sphere marqué E C F.

Sur le dernier article, il faut remarquer que sur un tres-grand nombre de plans, on ne sçauroit trouver la soustylaire par observation ni la plus courte ombre; c'est pourquoy on est tres-souvent obligé de se servir de ce probleme.

QUATRIÉME PROBLEME.

La ligne soustylaire & un point d'ombre estant donnez; trouver la hauteur du pole sur le plan, supposé qu'on sçache la déclinaison du soleil.

IL faut avoir mesuré l'angle que la ligne menée du pied du style au point d'ombre, fait avec la soustylaire; comme aussi la distance entre le zenith du plan & le soleil, supposé la hauteur du style & la longueur de l'ombre, comme au troisiéme probleme.

Cela supposé, soit dans la figure précedente du probleme 3e, le lieu du soleil au point F sur la sphére. Par les choses qu'on suppose connuës, on aura dans le triangle sphérique C P F les costez C F, P F & l'angle azimuthal F C P; c'est pourquoy on trouvera P C qui sera le complement de la hauteur du pole sur le plan.

REMARQUES.

LA déclinaison du soleil doit estre connuë au temps où lon a marqué le point d'ombre, comme dans toutes les opérations où l'on se sert de la déclinaison du soleil, à cause qu'elle change continuellement.

On remarquera aussi, comme on a fait dans le probleme précédent, que pour mesurer l'angle que fait la soustylaire avec la ligne de l'ombre menée du pied du style jusqu'au point d'ombre, il faut se servir du Rapporteur, ou bien de la Trigonométrie rectiligne, en prenant un point où l'on voudra sur la soustylaire duquel on menera une ligne jusqu'au point d'ombre; car par la mesure on connoistra les trois costez de ce triangle, d'où l'on viendra à la connoissance de l'angle que l'on cherche.

Pour la distance entre le zenith du plan & le lieu du soleil au temps où l'on a marqué le point d'ombre, on se servira de ce que j'ay dit dans la remarque sur le premier article du troisiéme probleme.



CINQUIÉME PROBLEME.

La hauteur du pole sur le plan, un point d'ombre, & la déclinaison du soleil estant donnez, trouver l'angle que fait la soustylaire avec la ligne de l'ombre.

CETTE proposition est la converse de la précedente. Car par l'hypothese les trois costez du triangle CPF estant donnez, on trouvera l'angle PCF ou FCB que la soustylaire fait avec la ligne de l'ombre donnée.

REMARQUES.

PAr la hauteur du pole donnée on aura son complément, qui sera l'arc CP: la longueur de l'ombre depuis le pied du style jusqu'au point d'ombre servira à trouver l'arc azimuthal CF, comme j'ay dit dans la premiére remarque sur le troisiéme probleme; & la déclinaison du soleil estant ajoustée ou ostée à 90 degrez, donnera l'arc PF.

Il faut oster la déclinaison boréale à 90 degrez, & ajouster la méridionale, si P est le pole boréal; mais au contraire, il faudra ajouster la boréale & oster la méridionale si P est le pole austral.

Définitions.

I. LA déclinaison d'un plan est proprement l'angle que la section de ce plan & de l'horison du lieu fait avec la ligne du levant & du couchant équinoxial: mais c'est aussi l'angle qui se fait au zenith du lieu entre son méridien & un vertical, qui joint le zénith du lieu avec le zénith du plan, & qui pour ce sujet sera appellé vertical commun, dont la section sur le plan, est la ligne verticale.

II. Plan oriental ou occidental, est celuy qui décline vers l'orient ou vers l'occident, & dont le zenith est dans la partie orientale ou occidentale de la sphére, laquelle est partagée en deux hemisphéres par le meridien du lieu.

III. Plan meridional ou septentrional, est celuy dont le zenith est dans la partie meridionale ou septentrionale de la sphére, laquelle est partagée en deux hemisphéres par l'équateur. Le pole meridional est élevé au dessus des plans meridionaux, & le pole septentrional est élevé au dessus des plans septentrionaux.

SIXIÉME PROBLEME.

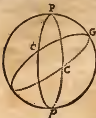
L'angle de la soustylaire avec la verticale, la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan, s'il y en a, estant donnez; trouver la hauteur du pole sur le plan, la difference des meridiens & la déclinaison du plan.

P est le pole septentrional, G le zenith du lieu; donc PGp le meridien du lieu, qui partage le globe en deux hemisphéres, l'un oriental qu'il faut imaginer en devant, & l'autre occidental en arriere dans la partie opposée. C est le zenith du plan: PC une partie du meridien du plan, & GC le vertical commun.

Au triangle PGC le costé PG est le complement de la hauteur du pole du lieu que je suppose septentrional. PC estant moindre que 90^d sera aussi le complement de la hauteur du pole du plan, lequel sera septentrional: mais PC estant plus grand que 90^d, son supplement à deux droits sera la hauteur du pole meridional du plan.

GC est la distance entre le zenith du lieu & celuy du plan, laquelle est de 90^d si le plan est vertical ou à plomb: mais elle sera moindre que 90^d

si le plan est en talus ; & enfin elle sera plus grande que 90 d s'il est panché en devant ou surplombé ; en sorte que le defaut ou l'excés à l'égard de 90 d, est égal à l'inclinaison du plan. Cela se comprendra facilement en considerant que le zenith d'un plan, qui est en talus, est élevé sur l'horison du lieu ; mais si le plan est surplombé, son zenith est abbaissé au dessous de l'horison.



Au triangle GPC, les costés GP, GC, c'est à sçavoir le complement de la hauteur du pole du lieu, & le complement de l'inclinaison du plan, sont donnez par l'hypothése, aussibien que l'angle GCP, qui est égal à celuy que la soustylaire fait avec la verticale : on connoistra donc toutes les autres parties de ce mesme triangle ; c'est à sçavoir CP complement de la hauteur du pole sur le plan, GPC la difference des meridiens, & CGP la déclinaison du plan ou son supplement. Surquoy il faut remarquer que pour trouver la difference des meridiens, l'angle PCG de la soustylaire avec la verticale estant donné, il ne faut qu'une simple proportion. Car comme le sinus de complement de la hauteur du pole du lieu, est au sinus de complement de l'inclinaison du plan, s'il y en a, ou au rayon, si le plan est à plomb ou vertical ; ainsi le sinus de l'angle que fait la soustylaire avec la verticale, au sinus de la difference des meridiens.

REMARQUE.

J'Ay trouvé à propos d'ajouster à ce probleme & aux suivans, quelques exemples pour les rendre plus faciles.

Soit donc l'angle de la soustylaire avec la verticale de 30 d, 25 m, lequel angle est compris sur la sphere par les arcs de cercle CP, CG. La hauteur du pole du lieu soit comme à Paris, 48 d, 50 m ; & par consequent l'arc PG, qui est compris entre le pole & le zenith, sera le complement de cette hauteur 41 d, 10 m. Supposons aussi que le plan du cadran ou le mur sur lequel on doit faire le cadran soit incliné en talus, c'est-à-dire panché en arriere par le haut, & que cette inclinaison soit de 5 d, dont le complement 85 d, est marqué sur la sphere par l'arc de cercle CG. Ces trois choses estant données, on trouvera par la Trigonometrie spherique les trois autres parties de ce mesme triangle ; à sçavoir l'arc CP de 54 d, 52 m, 35 f, qui sera le complément de la hauteur du pole sur le plan du cadran ; & par consequent la hauteur du pole sur ce plan sera de 35 d, 7 m 25 f. On aura par ce moyen le centre du cadran, qui est l'endroit où l'axe rencontre la soustylaire, ce qui se peut trouver par la resolution d'un triangle rectiligne & rectangle dont l'un des costés autour de l'angle droit, est la hauteur du style, & l'angle complément de la hauteur du pole qu'on a trouvé est opposé à la distance, depuis le pied du style jusqu'au centre du cadran, qui est l'autre costé de ce triangle autour de l'angle droit & lequel on cherche. L'angle CPG qui est la difference entre les merediens, se trouvera de 50 d, 0 m, 50 f, ce qui peut servir à déterminer la rencontre de la meridienne du lieu avec l'équateur. Enfin l'angle PGC sera de 38 d, 58 m, 55 f, qui est la déclinaison du plan : cette déclinaison se prend sur l'horison depuis la verticale, qui rencontre toûjours la ligne horizontale du plan à angles droits.

SEPTIE'ME PROBLEME.

La plus courte ombre ou la hauteur du pole sur le plan, la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan estant donnez; trouver la soustylaire, la différence des méridiens, & la déclinaison du plan.

LEs mesmes choses estant exposées que dans le probleme précédent, on aura les trois costez donnez dans le triangle GCP; c'est pourquoy on trouvera les angles, qui est ce que l'on cherche.

Il faut remarquer que la précedente détermination par la position de la soustylaire donnée, est préferable à celle-cy, lors que le plan décline peu; parce qu'alors pour beaucoup de changement à l'angle soustylaire, il en arrive peu à la hauteur du pole sur le plan: mais quand la déclinaison est grande, c'est tout le contraire.

Remarquez aussi que dans la pratique ce probleme & le précedent, sont toûjours préferables au quatriéme & au cinquiéme.

REMARQUES.

IL prend icy la plus courte ombre ou la hauteur de pole sur le plan, comme une mesme chose; cependant pour déterminer la hauteur du pole sur le plan du cadran par la plus courte ombre, il faut nécessairement connoistre la déclinaison du soleil, comme on l'a enseigné dans le second probleme de ce chapitre.

Dans le triangle CPG l'arc CP est le complément de la hauteur du pole sur le plan; c'est pourquoy si la hauteur du pole sur le plan est donnée, il en faudra prendre le complement pour avoir l'arc CP de ce triangle. La hauteur du pole du lieu estant aussi donnée, on en doit prendre le complement pour former l'arc PG; & enfin l'inclinaison du plan estant donnée, on aura aussi l'arc du vertical commun compris entre les deux zeniths, C & G, lequel arc CG est le complement de cette inclinaison.

EXEMPLE.

SOit comme cy-devant la hauteur du pole du lieu de 48 d, 50 m, pour Paris; l'arc PG qui est son complement sera donc de 41 d, 10 m. Soit la hauteur du pole sur le plan de 32 d, 10 m, dont le complement qui est l'arc CP sera 57 d, 50 m. Enfin soit l'inclinaison du mur 15 d, 20 m, dont le complement est l'arc CG de 74 d, 40 m, on trouvera par la Trigonometrie, que l'angle PCG, qui est celuy que la soustylaire fait avec la verticale, est de 41 d, 26 m, 15 s; l'angle CPG, qui est la difference entre les meridiens, est de 75 d, 50 m, 30 s; & l'angle PGC qui est la déclinaison du plan, est de 58 d, 19 m, 45 s.

HUITIE'ME PROBLEME.

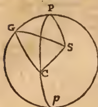
Un point d'ombre, la déclinaison du soleil, la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan estant donnez, trouver la hauteur du pole sur le plan.

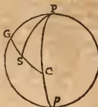
IL faut premiérement par la longueur de l'ombre & par la hauteur du style trouver la distance, entre le centre du soleil & le zenith du plan, comme aussi l'angle que la ligne de l'ombre fait avec la verticale. Cela supposé.

Soit dans la figure du sixiéme probleme, les arcs SC, SG, les distances entre le soleil S & les zeniths C & G; & soit aussi SP, la distance entre le soleil & le pole boreal.

Soit pour le premier cas l'arc CS separé d'avec l'arc CG. Au triangle

GCS les costes CG, CS sont donnez aussibien que l'angle GCS, qui est celuy que la ligne d'ombre fait avec la verticale; on connoistra donc SG & l'angle CSG. Mais au triangle GSP les trois costés estant connus, on trouvera l'angle GSP. Mais CSG est connu; c'est pourquoy on aura l'angle CSP. Puis enfin au triangle CSP, les costez CS, SP, & l'angle CSP estant connus, on trouvera CP, qui est la distance entre le pole boreal & le zenith du plan.





Pour le second cas, si S est sur l'arc CG, comme il arrivera, lors que le point d'ombre observé sera dans la verticale; ayant osté CS de CG, il restera SG. Puis au triangle SPG, les trois costés estant connus, on trouvera l'angle GSP supplement de PSC. Enfin au triangle PSC, l'angle PSC & les costés PS, CS estant connus, on trouvera CP.

REMARQUES.

ON demande dans ce probleme quatre choses, quoy que dans un triangle, il suffise d'en avoir trois pour sa resolution: mais il faut remarquer que ces quatre choses, sont employées dans la résolution de differens triangles.

On trouvera la distance entre le centre du soleil & le zenith du plan, suivant la remarque que j'ay faite, sur le premier article du troisiéme probleme.

Pour l'angle qui est compris par la ligne de l'ombre, c'est-à-dire par la ligne, qui va du pied du style au point d'ombre, & par la verticale, lequel par consequent a son sommet au pied du style puis que ces deux lignes passent par le pied du style, on en prendra la grandeur ou avec le Rapporteur, ou par le moyen d'un autre ligne tirée du point d'ombre à quelque point de la verticale, laquelle on mesurera, & dont on formera un triangle rectiligne, dans lequel on connoistra les trois costez; & l'angle opposé au costé pris à volonté, sera l'angle qu'on cherche.

Lors qu'on dit icy, soit dans la figure du sixiéme probleme les arcs, &c. *c'est-à-dire, que les arcs marquez icy GP, GC, CP soient les mesmes que ceux que l'on a marquez des mesmes lettres, dans la figure du sixiéme probleme. GP sera donc le complement de la hauteur du pole du lieu; CG sera le complement de l'inclinaison du plan, ou l'arc entre le zenith du lieu, & le zenith du plan; enfin CP sera le complement de la hauteur du pole sur le plan.*

De plus, comme le point S est le centre du soleil, au triangle GCS, puis que l'arc CG represente la verticale, l'arc CS representera la ligne de l'ombre; & l'angle GCS sera égal à l'angle compris par la verticale & par la ligne de l'ombre, puis que le point C, qui est le Zenith, est dans la ligne du style élevée perpendiculairement au dessus du pied du style, & que les plans des cercles CS, CG s'entrecoupent dans cette mesme ligne: car sans cela l'angle spherique ne seroit pas égal au rectiligne.

EXEMPLE.

SOit dans le triangle GCS l'arc GC donné, comme cy-devant, de 74 d, 40 m, & l'arc CS de 35 d, 8 m, qui est l'arc compris entre le zenith du plan, & le soleil S; & enfin l'angle GCS de 59 d, 33 m. Ces trois parties du triangle GCS estant données, on trouvera par la Trigonometrie, le costé GS de 60 d, 9 m, 50 s; & l'angle CSG sera de 106 d, 34 m, 40 s.

Main-

Maintenant dans le triangle GSP les trois costez sont connus, à sçavoir SG que l'on vient de trouver de 60^{d}, 9^{m}, 50^{s}: mais le costé SP estant la distance entre le soleil & le pole, on le connoistra en ajoustans ou en ostans la déclinaison au quart de cercle, suivant la nature de la déclinaison, comme on l'a expliqué dans la remarque sur le second probleme de ce chapitre. Soit donc SP de 80^{d}, 57^{m}, & GP estant comme dans le probleme precedent, de 45^{d}, 10^{m}, on trouvera l'angle GSP de 38^{d}, 32^{m}, 0^{s}.

Enfin au triangle CSP on a le costé CS, comme cy-dessus de 35^{d}, 8^{m}, le costé SP de 80^{d}, 57^{m}, & l'angle CSP de 145^{d}, 6^{m}; 40^{s}, qui est la somme dans cét exemple des deux angles CSG, GSP. On trouvera le costé CP de 109^{d}, 6^{m}, 4^{s}, qui sera la distance entre le zenith du plan & le pole Boreal, pourveu que l'on ait pris l'arc SP, par rapport au pole Boreal.

Pour le second cas, le calcul en est facile, aprés avoir entendu celuy que je viens de faire; il est mesme un peu plus simple, puisqu'on n'y employe que la résolution de deux triangles, & qu'il y en a trois dans le precedent. Si l'on vouloit réduire cette opération à ce cas, il faudroit marquer par observation, sur la ligne verticale, le point d'ombre dont on se sert.

NEUVIÉME PROBLEME.

Les mesmes choses que dans le huitiéme probleme, estant données; trouver la déclinaison du plan.

DANS les figures précedentes, au triangle GCS on connoistra GS, & l'angle CGS. Puis au triangle SGP, les trois costez estant connus, on trouvera l'angle SGP. Mais CGS est connu; on aura donc CGP, ou son supplement CG*p*, qui est la déclinaison du plan.

REMARQUES.

SUpposons les angles & les costez donnez dans les triangles, dont il faut faire la résolution, de la mesme grandeur que dans l'éxemple precedent.

On a déja résolu le triangle GCS, & l'on a trouvé le costé GS de 60^{d}, 9^{m}, 50^{s}, l'on trouvera aussi dans ce mesme triangle, l'angle CGS de 34^{d}, 53^{m}, 2^{s}. Ensuite, au triangle GSP, les trois costez estant connus, comme cy-devant, on trouvera l'angle SGP de 155^{d}, 5^{m}, 0^{s}, qui estant joint à l'angle CGS de 34^{d}, 53^{m}, 2^{s}, fera l'angle CGP de 145^{d}, 58^{m}, 2^{s}; ou son supplement 34^{d}, 1^{m}, 58^{s}, qui est l'angle de la déclinaison du plan, c'est-à-dire, l'angle que le vertical du plan fait avec le meridien du lieu.

Dans tous ces calculs des triangles, il faut toûjours bien prendre garde à prendre les supplemens des arcs & des angles qu'on trouve, quand ce qui est donné le demande; car par le calcul on n'a seulement que les angles aigus, comme dans l'éxemple cy-dessus, où l'angle CSG se trouve par le calcul de 73^{d}, 25^{m}, 20^{s}, il faut prendre son supplement de 106^{d}, 34^{m}, 40^{s}. On a aussi trouvé le costé CP de 70^{d}, 53^{m}, 56^{s}; cependant il faut prendre son supplement 109^{d}, 6^{m}, 4^{s}.

DIXIÉME PROBLEME.

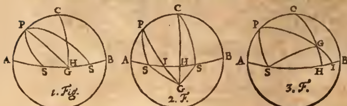
Par l'observation du soleil, qui est faite lors qu'il rase le plan; trouver la déclinaison du plan, supposé que l'on sçache la déclinaison du soleil, la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan.

POUR connoistre par observation, quand le soleil rase le plan, c'est-à-dire, quand le soleil est dans le plan du cadran, il faut avoir une grande régle, sur le plat de laquelle il y ait deux pinnulles dressées aux deux bouts;

dont l'une soit percée au centre, pour laisser passer les rayons du soleil, & l'autre ait un cercle décrit à l'entour du centre, pour recevoir l'image du soleil.

Cette régle ainsi préparée sera appliquée de plat contre le plan, & pointée continuellement vers le soleil, jusqu'à ce que l'image du soleil tombe justement dans le cercle de la pinnule; ce qui estant arrivé, & la régle demeurant ferme dans sa position, on tracera une ligne qui représentera le rayon du soleil pour le moment auquel il aura rasé le plan, supposé que le costé de la régle soit bien parallele à la ligne des centres des pinnules.

Ensuite de cette observation on mesurera l'angle que la ligne tracée sur le plan fera avec la verticale. Cela supposé, soit sur la sphére A B un horizon



parallele au plan du cadran, & C son zenith; P le pole élevé sur le plan; G le zenith du lieu, qui sera ou dans l'horizon A B, ou au dessus, ou au dessous; S le centre du soleil sur l'horizon A B; H l'intersection du mesme horizon A B avec le vertical commun C G prolongé ou retranché.

S H estant la mesure de l'angle observé, si d'ailleurs S G & S H conviennent, comme dans la premiére figure, les trois costez du triangle S P G estant connus, on connoistra l'angle S G P, dont le complement P G C sera la déclinaison du plan, laquelle on doit trouver.

Mais si le zenith G est audessous ou audessus de l'horizon A B, comme dans les deux autres figures; au triangle rectangle S G H, l'inclinaison G H, & l'autre costé S H estant donnez, on connoistra l'hypotenuse S G, & l'angle oblique S G H. Puis au triangle S G P dont les trois costez seront connus, on trouvera l'angle S G P. Mais S G H est connu; on aura donc P G C qui est celuy que l'on cherche.

Remarquez que sans avoir tracé aucune ligne sur le plan, si l'on a sçû par quelque moyen que ce soit, l'heure & le moment auquel le soleil a rasé le plan; cela dis-je supposé, au triangle S P G les costez S P, P G, & l'angle horaire S P G estant connus, on connoistra S G & l'angle S G P. Puis au triangle rectangle S G H, connoissant l'hypotenuse S G & le costé G H, on connoistra S G H, & le reste, comme au premier cas.

REMARQUES.

ON dit que S H est la mesure de l'angle observé, c'est-à-dire, de l'angle fait par la verticale, dont le cercle est le vertical C G H, & par la ligne du rayon du soleil, lors qu'il rase le plan. Cét angle doit estre consideré comme ayant son sommet au pied du style, par lequel point passe la verticale, & par lequel aussi on peut supposer que passe le rayon du soleil, puis qu'il n'a point de lieu déterminé sur le plan. Alors ces deux lignes sur le plan du cadran, représenteront les sections du plan horizontal du cadran, & des deux cercles verticaux, dont l'un passe par le Zenith du lieu, & l'autre par le centre du soleil, lors qu'il est dans le plan du cadran.

EXEMPLES.

Pour le premier cas où le plan du cadran n'a point d'inclinaison; ou ce qui est la mesme chose, lors que le zenith du lieu est dans le plan du cadran; soit la distance SG entre le Zenith du lieu & le lieu du soleil, qui est l'angle observé de 46 ^{d}, 7 ^{m}, 10 ^{s}; & par la déclinaison du soleil on connoistra l'arc SP, qui est la distance entre le pole P & le lieu du soleil S, au temps de l'observation de 77 ^{d}, 3 ^{m}, 20 ^{s}. Enfin par le complement de la hauteur du pole du lieu, on a l'arc PG d'un meridien entre le pole, & le zenith du lieu, lequel soit de 41 ^{d}, 10 ^{m}. Ces trois costez estant connus dans le triangle SPG, on trouvera l'angle SGP de 128 ^{d}, 52 ^{m}, 40 ^{s}.

Pour le second cas où le Zenith est au dessus ou au dessous de l'horizon, c'est-à-dire, lors que le mur est incliné; dans le triangle rectangle SGH, dont l'arc SH de l'horizon soit donné comme cy-devant de 46 ^{d} 7 ^{m}, 10 ^{s}, l'arc SH estant compris entre le lieu du soleil S, au temps où il rase le plan, & le vertical commun CG, qui est toûjours perpendiculaire sur l'horizon. Mais l'arc GH est mesuré par l'inclinaison du plan, laquelle soit de 3 ^{d}, 00 ^{m}, 30 ^{s}; on trouvera donc l'hypotenuse SG de 46 ^{d}, 12 ^{m}, 14 ^{s}, qui est la distance entre le zenith du lieu, & le centre du soleil, au temps de l'observation du soleil dans le plan. On trouvera aussi l'angle SGH de 86 ^{d}, 57 ^{m}, 5 ^{s}.

Ensuite au triangle SGP dont on connoist les trois costez, à sçavoir SG de 46 ^{d}, 02 ^{m}, 14 ^{s}, PG comme cy-devant, de 41 ^{d}, 10 ^{m}, & PS aussi de 77 ^{d}, 3 ^{m}, 20 ^{s}, on trouvera l'angle SGP de 128 ^{d}, 40 ^{m}, 20 ^{s}. Mais si dans la seconde figure on oste de cét angle SGP l'angle SGH, il restera l'angle PGC de 41 ^{d}, 44 ^{m}, 15 ^{s}; & dans la troisiéme figure, si l'on ajoûte ces deux angles ensemble, on aura l'angle total HGP de 215 ^{d}, 38 ^{m}, 25 ^{s}, dont le supplement à quatre droits PGC sera de 144 ^{d}, 21 ^{m}, 35 ^{s}. Cét angle PGC est celuy qui est fait par la verticale commune representée par CG, & par la meridienne du lieu, qui est le meridien PG: cét angle doit estre fait sur l'horizon du lieu, sur lequel se mesure la déclinaison du plan.

Pour ce qui est de la remarque, dont il est parlé à la fin de ce probleme, je n'en donneray point d'exemple; car comme il est tres-difficile de sçavoir l'heure qu'il est au temps de l'observation, ceste régle devient presqu'inutile.

ONZIÉME PROBLEME.

La déclinaison du plan estant donnée, trouver la hauteur du pole sur le plan, la ligne soustylaire, & la difference des meridiens, supposé la hauteur du pole du lieu, & l'inclinaison du plan.

SOIT dans la figure du sixiéme probleme le triangle CGP dont les costez GC, GP, & l'angle qu'ils renferment sont donnez, on connoistra le troisiéme costé & les angles requis. *Voyez la figure de la page 350.*

EXEMPLE.

Soit PG le complement de la hauteur de pole du lieu de 40 ^{d}, 00 ^{m}; GC qui est la distance entre les zeniths, & par consequent le complement de l'inclinaison du plan, soit de 80 ^{d}, 09 ^{m}, 30 ^{s}; & soit l'angle CGP la déclinaison du plan de 35 ^{d}, 05 ^{m}, 10 ^{s}, on trouvera le costé CP, qui est le complement de la hauteur du pole sur le plan de 49 ^{d}, 50 ^{m}, 23 ^{s}; l'angle PCG sera celuy que doit faire la soustylaire representée par l'arc CP & par la verticale commune representée par l'arc CG: ces deux lignes s'entrecoupant au pied du style, feront un angle de 29 ^{d}, 48 ^{m}, 40 ^{s}. Enfin l'angle CPG, qui est la difference des meridiens, sera de 48 ^{d}, 07 ^{m}, 45 ^{s}. Cét angle CPG n'est point mar-

qué sur le plan du cadran par des lignes ; mais c'est celuy qui est fait à la pointe du style, sur le plan de l'équateur par deux rayons, dont l'un va à la soustylaire, & l'autre à la meridienne.

DOUZIE'ME PROBLEME.

La déclinaison du plan, & son inclinaison estant données ; trouver l'obliquité de ligne meridienne.

DANS les deux dernieres figures du dixiéme probleme, soit I la rencontre de l'horizon A B, avec P G retranché ou prolongé. Au triangle rectangle G H I, le costé G H est l'inclinaison du plan, & l'angle I G H sa déclinaison, lesquelles sont données. On connoistra donc le costé H I, qui est la mesure de l'obliquité de la meridienne requise. Car comme le rayon est au sinus de l'inclinaison du plan, ainsi la tangente de la déclinaison du plan, est à la tangente de l'obliquité requise.

Ce probleme ne sera point nécessaire dans la suite : mais il pourra servir à ceux qui voudroient tracer une ligne meridienne par un point observé.

REMARQUES

ON ne propose icy que deux choses connuës ; car le triangle qu'il faut résoudre est rectangle ; & l'obliquité de la ligne meridienne que l'on cherche, est l'angle que fait la ligne meridienne avec la verticale.

Pour ce qui est de la position de la ligne meridienne par le moyen d'un point d'ombre observé, il faut auparavant connoistre la déclinaison du plan par le neuviéme probleme : car pour l'inclinaison elle est employée dans la solution de ce mesme probleme ; c'est pourquoy elle sera aussi connuë.

TREIZIE'ME PROBLEME.

La difference des meridiens estant donnée, trouver l'heure de la soustylaire.

LA difference des meridiens est la distance horaire entre le midy du lieu & l'heure de la soustylaire, qui est le midy du plan. De sorte que si le plan est occidental, la difference des meridiens convertie en temps donne l'heure de la soustylaire, à compter depuis midy ; mais si le plan est oriental, il faut oster de 12 heures la difference des meridiens, & prendre le reste qui se comptera depuis minuit.

EXEMPLES.

SI la difference des meridiens, est de 30 degrez ou de deux heures, & que ce soit vers l'occident ; la soustylaire sera à deux heures du soir ; mais si la mesme difference est orientale, la soustylaire sera à 10 heures du matin. Ou bien si la difference des meridiens est de 150 degrez, ou de 10 heures, & que ce soit vers l'occident, la soustylaire sera à 10 heures du soir ; mais si la mesme difference est orientale, la soustylaire tombera sur deux heures du matin.

QUATORZIE'ME PROBLEME.

La hauteur du pole estant donnée, trouver la moitié du plus grand jour.

IL faut faire comme le rayon est à la tangente de 23 d, 29 m, qui est l'obliquité de l'écliptique ; ainsi la tangente de la hauteur de pole est au sinus de l'excés de la moitié du plus grand jour pardessus six heures.

EXEMPLE.

La plus grande obliquité de l'écliptique ayant esté trouvée de $23^d, 29^m$, si l'on donne la hauteur du pole du lieu de $48^d, 50^m$, on trouvera par la régle, que le sinus de l'excés du plus grand jour pardessus six heures est de $29^d, 47^m, 37^s$, ce qui se réduit à 1 heure, $59^m, 47^s$; donc la moitié du plus grand jour sera de 7 heures, $59^m, 47^s$.

QUINZIÉME PROBLEME.

Déterminer les heures qui doivent estre marquées, sur un plan donné.

ON sçait qu'à l'égard d'un plan horizontal, le plus grand jour du lieu détermine le nombre des heures qui doivent estre marquées sur ce plan; & il en seroit de mesme de tout autre plan consideré comme horizontal, si l'horizon du lieu n'y faisoit point d'empeschement.

PRATIQUE

pour les plans septentrionaux dans un lieu septentrional, & pour les plans meridionaux dans un lieu meridional.

IL faut sçavoir l'heure de la soustylaire, & la moitié du plus grand jour, tant du lieu que de l'horizon du plan consideré sans empeschement.

Si de l'heure de la soustylaire on oste la moitié du plus grand jour du plan, on aura l'heure du lever du soleil à l'égard de l'horizon du plan. Si au contraire l'on ajoûte la moitié du plus grand jour du plan à l'heure de la soustylaire, on aura l'heure du coucher du soleil à l'égard du mesme horizon du plan consideré sans empeschement: mais ensuite il faudra voir si aux heures trouvées le soleil sera sur l'horizon du lieu; ce qui sera facile, supposé que l'on sçache l'heure du lever & du coucher du soleil au plus grand jour du lieu.

EXEMPLE.

SOIT à Paris un plan septentrional dont la moitié du plus grand jour soit de sept heures, & dont la soustylaire soit à dix heures du soir. Ayant osté 7 de 10, je trouve qu'aux plus grands jours le soleil doit commencer le soir à éclairer le plan à trois heures; & parce qu'à Paris le soleil est alors sur l'horizon, je dis que la premiére heure du soir, qui devra estre marquée sur ce plan, sera celle de 3 heures.

Puis ajoustant 7 heures à 10 heures du soir, je trouve encore que le soleil finira d'éclairer le plan à 5 heures du matin; & parce qu'à Paris au plus grand jour, le soleil est sous l'horizon depuis 8 heures du soir jusqu'à 4 heures du matin, il faudra que toutes les heures d'entre deux soient retranchées du cadran, sur lequel par consequent on pourra marquer les heures depuis les 4 heures du matin jusqu'à 5 heures, & depuis 3 heures du soir jusqu'à 8 heures.

Suivant cette pratique il y aura des cadrans, qui n'auront point d'heures le matin, & d'autres qui n'en auront point le soir, ce que le calcul fera voir.

L'exemple que nous venons de donner est pour un cadran septentrional dont la soustylaire tombe à une des heures de nuit, parce que c'est le cas le plus ordinaire; ce qui n'empesche pas qu'il ne puisse y avoir un plan, dont la soustylaire tombe par exemple à 10 heures du matin, mais qui sera tellement incliné vers le nord, que sa hauteur du pole sera septentrionale, & qui par consequent sera septentrional. Un tel plan, supposé que la moitié de son plus grand jour fust de 7 heures, devroit estre éclairé en Esté depuis 3 heu-

res du matin jusqu'à 5 du soir : mais parce qu'à Paris le soleil ne se leve qu'à 4 heures, il faudroit retrancher la premiére heure du matin.

PRATIQUE

pour les plans meridionaux dans un lieu septentrional, ou au contraire.

IL faut trouver l'heure à laquelle le soleil se leve ou se couche à l'égard du plan proposé, ce qui suppose la hauteur du pole du lieu, & la déclinaison du plan. On fera donc, comme le rayon est au sinus de la hauteur du pole du lieu : ainsi la tangente de la déclinaison du plan est à la tangente d'un arc qu'il faudra oster de 90 degrez ou de six heures, si le plan est oriental ; ou bien qu'il faudra ajoûter à six heures, si le plan est occidental. L'heure ainsi trouvée sera la premiére, ou la derniere qu'il faudra marquer sur le plan.

La raison de cette pratique est que par ce moyen on détermine l'heure à laquelle le soleil commence plûtost, ou finit plus tard à éclairer le plan, ce qui arrive lors qu'il se leve ou qu'il se couche dans l'interſection des deux horizons ; car quand les jours sont plus longs à l'égard de l'horizon du plan, c'est alors qu'ils sont davantage accourcis par l'horizon du lieu, & quand les jours du plan sont le plus dégagez de l'horizon du lieu, c'est alors qu'ils sont plus courts à l'égard du plan. De sorte que le milieu se trouve dans l'interſection des deux, & que ces sortes de cadrans n'ont jamais plus de douze heures.

On peut aussi se servir d'un cadran horizontal, en observant les lignes horaires qui rencontreront la ligne du plan. Mais cette maniére n'est pas universelle, & ne peut valloir pour les plans septentrionaux, lors qu'ils ont des heures du matin & du soir, & que l'heure de la soustylaire est de nuit. J'entens les septentrionaux dans un lieu septentrional ; & il en seroit de mesme des méridionaux dans un lieu méridional : car le cadran horizontal déterminera bien la premiére heure du matin, & la derniere du soir ; mais il n'en sera pas de mesme à l'égard de la derniere du matin, & de la premiére du soir qui dépendront du plus grand jour du plan.

CHAPITRE IV.

Du calcul des heures astronomiques.

TROUVEZ premiérement l'heure de la soustylaire par le treiziéme probleme, puis faites une liste de toutes les heures que vous voulez avoir, la partageant à l'endroit où vous sçavez que doit estre la soustylaire, que nous avons marquée S, avec un zéro au dessous.

Premier Cas.

SI l'heure de la soustylaire convient justement avec une des divisions horaires, soit heure entiere ou demi-heure, soit mesme un quart d'heure, supposé qu'on les voulust avoir ; il n'y aura autre chose à faire, qu'à écrire sous chaque division horaire sa distance équinoxiale à l'égard de la soustylaire, de mesme que vous feriez à l'égard de 12 heures dans un cadran qui ne déclineroit point.



PREMIER EXEMPLE

pour un cadran méridional & oriental, dont la différence est de 22 d, 30 m, & duquel par consequent, la soustylaire est à 10 heures & demie du matin.

								Midy.		
	½	IX.	½	X.	½	XI.	½	XII.	½	I.
Angles.	30 0	22 30	15 0	7 30	S	7 30	15 0	22 30	30 0	37 30
Tangentes.	577	414	268	132	0	132	268	414	577	767

SECOND EXEMPLE

pour un cadran méridional occidental, dont la soustylaire est à une heure & demie aprés midy.

	XI.	½	XII.	½	I.	½	II.	½	III.
Angles.	37 30	30 0	22 30	15 0	7 30	S	7 30	15 0	22 30
Tangentes.	767	577	414	268	132	0	132	268	414

On voit que les distances horaires estant les mesmes de part & d'autre de la soustylaire, il suffiroit de les avoir écrites d'un costé seulement.

TROISIE'ME EXEMPLE

pour un cadran septentrional oriental, dont la difference des méridiens est de 157 d, 30 m, & duquel par consequent, la soustylaire tombe sur une heure & demie du matin.

	Soir.		Septentrional Oriental.				Matin.	
	VII.	½	VIII.	I. ½	IV.	½	V.	½
Angles.	97 30	90 0	82 30	S	37 30	45 0	52 30	60 0
Tangentes.	7596	Infin.	7596	0	767	1000	1303	1732

QUATRIE'ME EXEMPLE

pour un cadran septentrional occidental, dont la soustylaire tombe à dix heures & demie du soir.

							Septentrional Occidental.		
	VI.	½	VII.	½	VIII.	X. ½	IV.	½	V.
Angles.	67 30	60 0	52 30	45 0	37 30	S	82 30	90 0	97 30
Tangentes.	2414	1732	1303	1000	767	0	7596	Infin.	7596

Ces sortes de cadrans septentrionaux sont renversez, ayant les heures du soir à gauche, & celles du matin à droit. Ils ont d'ailleurs plusieurs heures supprimées, lesquelles il faut supposer dans le calcul : comme par exemple, pour 8 heures du soir, si la soustylaire est à 1 heures ½ aprés minuit, l'intervalle est de 5 heures ½, qui estant réduit en degrez, est de 82 d, 30 m. Et pour 4 heures du matin, parce que l'intervalle est de 2 heures ½, j'écris 37 d,

30 m, c'est le contraire pour le cadran occidental, à cause que la soustylaire est devant minuit.

Il ne peut pas y avoir de difficulté à l'égard des autres heures ; car on voit qu'elles se suivent avec un continuel accroissement de 7 d, 30 m, que l'on suppose icy de demi-heures en demi-heures.

REMARQUES.

Monsieur Picard passe au calcul des heures astronomiques, aprés avoir enseigné plusieurs élémens pour les cadrans. Mais il faudroit qu'il eust expliqué la maniére de tracer la ligne équinoxiale, avant que d'enseigner la pratique de ce calcul, puis qu'on ne le peut faire sans sa position ; ce qu'il ne fait qu'à la fin de ce chapitre.

On peut trouver par le mesme calcul dont on s'est servi dans les problemes précedens, le point où la soustylaire doit estre coupée par la ligne équinoxiale qui fait toûjours avec elle des angles droits.

La hauteur du pole sur le plan du cadran estant trouvée, on fera comme le sinus de cette hauteur de pole est à la hauteur du style, ainsi le sinus du complement de la mesme hauteur de pole, est à la distance entre le pied du style, & le point de la ligne équinoxiale sur la soustylaire. Ce point estant determiné, on menera la ligne équinoxiale, qui coupera la soustylaire à angles droits dans ce mesme point.

Tout le calcul que M. Picard propose icy pour les distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis sa rencontre avec la soustylaire, est fondé sur la distance qu'il y a entre la pointe du style, & cette mesme rencontre ; laquelle distance est le rayon, & les distances horaires sont des tangentes par rapport à ce rayon. Il faudra donc avoir divisé une ligne droite égale à cette distance en 1000 parties, desquelles on se servira pour prendre les distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis la rencontre de la soustylaire. Mais si l'on veut seulement connoistre toutes ces distances horaires sur la ligne équinoxiale depuis la soustylaire, en mesmes parties que celles de la hauteur du style que l'on a supposée dés le commencement divisée en 1000 parties ; il faudra premiérement trouver la distance entre la pointe du style & la rencontre de la ligne équinoxiale avec la soustylaire, en mesmes parties que celles de la hauteur du style, ce que l'on fera par cette analogie.

Comme le sinus de complement de la hauteur du pole sur le plan du cadran est à 1000 parties, qui est la hauteur du style ; ainsi le rayon est au nombre des mesmes parties de la hauteur du style, qui est la distance que l'on cherche, que l'on peut appeller Rayon équinoxial.

Mais si l'on se sert de la longueur de ce rayon équinoxial, il faudra trouver les distances horaires sur la ligne équinoxiale par des analogies separées, en faisant comme le rayon des Tables est au rayon équinoxial que l'on a trouvé, ainsi la tangente de l'angle de la distance entre l'heure de la soustylaire & l'heure que l'on cherche, à la distance équinoxiale de cette mesme heure depuis la soustylaire ; c'est-à-dire depuis la rencontre de la soustylaire sur l'équinoxiale jusqu'au point où cette mesme heure coupe l'équinoxiale. Et par consequent il faudra faire autant de calculs separez, qu'il y aura d'heures à poser sur l'équinoxiale ; mais aussi on aura l'avantage de se servir toûjours des mesmes parties, dont on s'est servi pour tout le calcul du cadran.

Les tangentes qui sont dans les exemples que l'on a donnez icy, sont celles des Tables, supposant le rayon équinoxial de 1000 parties seulement.

Lors que l'angle depuis la soustylaire jusqu'à l'heure que l'on veut marquer sur l'équinoxiale est de 90 d, la tangente est infinie ; & en ce cas la ligne horaire est parallele à la ligne équinoxiale. Mais lors qu'on veut marquer des heures

heures audelà de 90 d, comme dans le troisiéme & quatriéme exemple cy-dessus 97 d 30m, alors on doit se servir des tangentes de supplement de ces angles, & porter les grandeurs trouvées sur la ligne équinoxiale de l'autre costé de la soustylaire : mais l'heure que l'on tracera par ce point & par le centre du cadran, sera prolongée audelà du centre du cadran vers le lieu où elle doit suivre les autres.

Second Cas.

MAIS si l'heure de la soustylaire ne convient justement avec aucune division horaire, il faut chercher premiérement les distances horaires entre la soustylaire & les deux plus proches heures, puis faire les autres par une addition continuelle, de mesme qu'aux exemples cy-dessus.

Soit la différence des méridiens de 19 d, 35 m, & par consequent, la soustylaire entre 10 heures ½ & 11 heures du matin.

Premiérement, la distance entre 10 heures ½ & midy, est 22 d, 30 m ; ayant donc osté 19 d, 35 m, je trouve 2 d, 55 m pour 10 heures ½.

Secondement, entre 11 heures & midy il y a 15 d que j'oste de 19 d, 35 m, & il reste 4 d, 35 m pour 11 heures.

Cela supposé, si à 2 d, 55 m j'ajoûte 7 d, 30 m, la somme sera 10 d, 25 m pour 10 heures; & ainsi de suite de ce costé-là. Pareillement, si à 4 d, 35 m j'ajoûte 7 d, 30 m, la somme sera 12 d, 5 m pour 11 heures ½ & ainsi de suite en ajoûtant toûjours 7 d, 30 m pour chaque demi-heure.

Sur quoy vous remarquerez, que si vous avez bien fait, la différence des méridiens se trouvera pour midy, ce qui pourroit donner lieu à une nouvelle maniére de calcul, que le Lecteur trouvera facilement.

Cadran Méridional Oriental.

	$\frac{1}{2}$	X.	$\frac{1}{2}$	19 35	XI.	$\frac{1}{2}$	Midy. X II.	$\frac{1}{2}$
			22 30	S	19 35			
			19 35		15 0			
Angles.	17 55	10 25	2 55	0	4 35	12 5	19 35	27 5
Tangentes.	323	184	51	0	80	214	356	511

Cadran Méridional Occidental.

	XI.	$\frac{1}{2}$	Midy. XII.	$\frac{1}{2}$	I.	19 35	$\frac{1}{2}$	II.	$\frac{1}{2}$
					19 35	S	22 30		
					15 0		19 35		
Angles.	34 35	27 5	19 35	12 5	4 35	0	2 55	10 25	17 55
Tangentes.	689	511	356	214	80	0	51	184	323

Cadran Septentrional Oriental.

	Soir.					Matin.		
	VII.	½	VIII.	1 h, 18 m, 20 s.	IV.	½	V.	½
			60 0	19 35	60 0			
			19 35	S	19 35			
Angles.	94 35	87 5	79 35	0	40 25	47 55	55 25	62 55
Tangentes.	12474	19627	5440	0	852	1107	1450	1956

Cadran Septentrional Occidental.

	½	VII.	½	VIII	10 h, 41 m, 40 s.	IV.	½	V.
				60 c	19 35	60 0		
				19 35	S	19 35		
Angles.	62 55	55 25	47 55	40 25	0	79 35	87 5	94 35
Tangentes.	1956	1450	1107	852	0	5440	19627	12474

AUx deux derniers éxemples la différence des méridiens est effectivement de 160 d, 25 m; mais pour la facilité du calcul (ce qui se devra toûjours pratiquer lors qu'il y aura plus de 90 d) nous avons osté les 160 d, 25 m, de 180 d, & nous avons pris le reste, sçavoir 19 d, 35 m, pour la différence entre le midy du plan & le minuit du lieu. Le reste s'entendra assez aprés ce que nous avons dit cy-dessus aux premiers éxemples.

Nous avons seulement exposé les cas ausquels les cadrans méridionaux ont la différence des méridiens moindre que 90 d, & les septentrionaux plus grande que 90 d; parce que c'est ce qui arrive le plus ordinairement, comme nous avons déja remarqué au treiziéme probleme du chapitre précedent.

Or aprés avoir trouvé les distances équinoxiales pour toutes les heures à l'égard de la soustylaire, il en faudra prendre les tangentes dans les Tables, comme vous voyez qu'on a fait dans les éxemples précedens. Ces tangentes serviront ensuite à trouver les points horaires dans la ligne équinoxiale; & si quelque distance horaire est précisement de 90 d, la ligne de cette heure-là sera parallele à l'équinoxiale: mais s'il s'en trouve quelqu'une plus grande que 90 d, la ligne de l'heure s'éloignera de l'équinoxiale; & parce qu'elle ne peut s'éloigner d'un costé qu'elle ne s'approche de l'autre, vous trouverez son point de rencontre, en prenant la tangente du supplément de l'angle à 180 d; ce qu'il suffit d'avoir indiqué.

Voyez la figure suivante.

Soit maintenant A le pied du style, A B sa hauteur que je suppose connuë; DC la soustylaire trouvée par les problemes cy-dessus, & menée par le point A. On cherche C le point de la ligne équinoxiale, & D le centre du cadran.

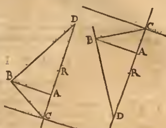
Pour cét effet, comme le sinus du complément de la hauteur du pole sur le plan est au rayon, ainsi AB connuë est à la longueur du rayon équinoxial BC, laquelle estant connuë sera divisée en 1000 parties pour servir d'échelle à tout le reste du cadran.

Cela supposé, A C sera le sinus de la hauteur du pole sur le plan, & C D la

secante de son complement. Une ligne menée par le point C à angles droits à la soustylaire sera l'équinoxiale, dans laquelle on marquera les points horaires par le moyen des tangentes cy-dessus trouvées.

REMARQUES.

J'Ay expliqué assez au long la pratique pour trouver la ligne équinoxiale à la fin du premier cas, ce qui pourra servir d'éclaircissement à ce qui est dit icy un peu trop en abbregé.



Pour la manière de trouver le centre du cadran sans se servir de la secante, on fera comme la tangente de la hauteur du pole sur le plan est à la hauteur B A du style, ainsi le rayon sera à A D qui est la distance sur la soustylaire entre le pied du style A & le centre du cadran D, ce centre est le point où l'axe, qui passe par la pointe du style, doit rencontrer le plan.

On peut encore trouver la grandeur A D pour déterminer le centre du cadran D, en faisant comme le rayon est à B A hauteur du style, que nous avons posée de 1000 parties; ainsi la tangente de complement de la hauteur du pole sur le plan, à la grandeur de A D.

La somme des grandeurs de A D, & A C sera celle de C D dont on se sert dans la suite.

Par le centre du cadran & par les points horaires trouvez sur la ligne équinoxiale on tirera les lignes des heures. On fera de mesme pour les demi-heures, & mesme pour les quarts-d'heures s'il y en a.

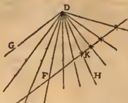
Mais si le centre du cadran est hors le plan, ou si l'on manque de quelques points horaires, il faudra prendre C R moitié de C D, dont on connoist la grandeur par le calcul, puis par le point R tirer une ligne parallele à la ligne équinoxiale, dans laquelle on trouvera de nouveaux points horaires en prenant la moitié de chaque intervalle donné dans l'équinoxiale à commencer à la soustylaire.

REMARQUES.

LE centre du cadran pourroit estre si éloigné de la ligne équinoxiale, que pour avoir un point comme R sur la soustylaire, il faudroit prendre C R, comme la cinquiéme ou sixiéme ou huitiéme, ou mesme quelqu'autre partie beaucoup plus petite de la ligne C D: mais alors pour marquer les heures sur cette seconde ligne équinoxiale, il faudroit oster une mesme partie aux grandeurs des heures de la ligne équinoxiale pour les transporter sur cette seconde; comme si l'on prenoit C R de la dixiéme partie de C D, il faudroit seulement oster à chaque intervalle d'heure sur la ligne équinoxiale depuis la soustylaire une dixiéme partie, & transporter le reste sur la seconde ligne équinoxiale.

Mais enfin si la ligne C D se trouvoit infinie, on pourroit tracer cette seconde ligne équinoxiale par quel point on voudroit de la soustylaire & y transporter les mesmes grandeurs des heures de l'équinoxiale. Ensuite on joindra les points correspondans de ces deux équinoxiales, pour avoir les lignes des heures.

Il suffira mesme d'avoir six heures de suite pour trouver toutes les autres; car ayant pris dans la ligne du milieu D F le point F à discretion, si par ce point on tire F K qui soit parallele à l'une des extrémes D G, & qui coupe l'autre extréme D H en K; ayant mis une des pointes du compas au point K, *Voyez la figure suivante.*



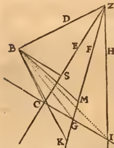
on transportera sur F K prolongée audelà de K les divisions qui sont audeçà, & l'on aura la suite des heures requises de ce costé-là.

CHAPITRE V.

Du calcul des arcs des Signes.

ON cherche par ce calcul les points de rencontre des arcs des signes sur chaque ligne horaire, & sur les lignes des demi-heures pour une plus grande justesse; on tracera ensuite par tous les points trouvez les lignes des arcs des signes.

Soit l'axe B D, & E C la soustylaire, avec le rayon équinoxial B C & C G I la ligne équinoxiale. Soient aussi les lignes des heures F G, H I, &c.



B est la pointe du style, & le rayon équinoxial B C estant perpendiculaire sur la ligne équinoxiale C I, si l'on mene les lignes B G, B I, les triangles B C G, B C I, &c. seront rectangles; & dans chacun de ces triangles, on connoist par les calculs des chapitres précedens les costez C G, C I, &c, & le costé B C qui est commun à tous. On sçait de plus, pour chaque ligne C G, C I, &c. quel est l'angle C B G, C B I, &c. c'est pourquoy dans ces mesmes triangles on trouvera les hypotenuses B G, B I, &c.

Par éxemple, supposons que l'on ait trouvé le rayon équinoxial de 1185 parties de celles dont la hauteur du style B S est de 1000, & que l'angle C B G soit de 9 d, 15 m, on aura donc trouvé C G de 193 parties; & dans le triangle C B I, si l'angle C B I est pour l'heure suivante, il sera de 24 d, 15 m; c'est pourquoy l'on trouvera C I de 534 parties, & dans ces mesmes triangles on trouvera B G de 1201 parties, & B I de 1300 parties, &c.

Mais la hauteur du pole sur le plan a esté trouvée de 32 d, 27 m, c'est pourquoy on a dû trouver la longueur de l'axe depuis la pointe du style jusqu'à la rencontre du plan de 1864 parties. Et soit le point Z la rencontre du plan & de l'axe B D, qui est le centre du cadran: il n'importe pas que ce centre Z soit sur le plan ou hors le plan, pourveû qu'il y en ait un.

Il faut maintenant dans tous les triangles Z B C, Z B G, Z B I, &c. qui sont rectangles en B, trouver les angles C, G, I, &c. L'angle C qui est sur la soustylaire sera le complement de la hauteur du pole sur le plan, qui sera icy de 57 d, 33 m. Dans tous les autres triangles on fera comme Z B à B G, à B I, &c. ainsi le rayon sera à la tangente de l'angle complement à l'angle G, I, &c. comme par les logarithmes.

Somme

Somme de B G & du rayon	13. 07940
Mais Z B eſt	3. 27038
Tangente de l'angle	9. 80902

32^{d}, 47^{m}, complement de 57^{d}, 13^{m}, qui eſt l'angle cherché B G Z.

Somme de B I & du rayon	13. 11384
Mais Z B eſt	3. 27038
Tangente de l'angle	9. 84346

34^{d}, 53^{m}, complement de 55^{d}, 7^{m}, qui eſt l'angle cherché B I Z.

Ces angles eſtant connûs on a auſſi leurs ſupplemens à deux droits, qui ſont les angles K G B, L I B, &c.

Maintenant pour trouver les points des Signes, comme ſur la ligne horaire Z G pour les points M & K du premier ſigne au deſſus & au deſſous de la ligne équinoxiale; on joindra la déclinaiſon de ce ſigne 11^{d}, 29^{m}, 34^{s}, avec l'angle Z G B & K G B, ce qui fera les deux ſommes 68^{d}, 42^{m}, 34^{s}, & 134^{d}, 16^{m} 34^{s}, dont on prendra les ſupplémens à deux droits, qui ſeront 111^{d}, 17^{m}, 26^{s}, & 45^{d}, 43^{m}, 26^{s}. Enſuite on fera comme le ſinus de ces angles eſt au coſté B G de 1201 parties; ainſi le ſinus de l'angle de la déclinaiſon du ſigne 11^{d}, 29^{m}, 34^{s}, aux diſtances G M, G K depuis l'équinoxiale G juſqu'aux points des ſignes M & K. Ces diſtances ſeront 257 & 334 des meſmes parties de la hauteur du ſtyle qui ſervent dans tous ces calculs.

DE
MENSURIS.

SUPPOSITO pede Parisino partium 720
Erit pes Rhinlandicus vel Leydensis, ex propria observatione, 696
Pertica Rhinlandica continet 12 pedes.
Londinensis ad me missus 675 [illegible]
Danus, ex propria observatione, 701 [illegible]
Ulna Danica continet duos pedes.
Dantiscanus, ex proportione cum Leydensi, lib. 1. Selenograph. Hevelii, 636
Lugdunensis Galliæ, ex observatione D. Auzout, 757 [illegible]
Bononiensis Italiæ, ex observatione ejusdem, 843
Bracchium Florentinum, ex eodem & Mersenno, 1290
Bracchium Florentinum dividitur in 20 solidos, solidus in 3 grossos.
Pes Suecus mihi traditus, 658 [illegible]
Pes Bruxellensis ad me missus 609 [illegible]
Amstelodamensis ex Leydensi juxta Snellium, 629
Palmus Romanus Architect. ex propria observatione & D. Auzout, 494 [illegible]
Canna Architect. continet Palmos 10.
Pes Romanus Capitolii ex propria observatione & D. Auzout, 653
vel, 653 [illegible]
Melius ex Græco, 652

Numerus 652 pro pede Romano Capitolii exactè convenit cum pede Græco, qui ibidem prostat partium 679, juxta proportionem 24 ad 25. Sed quia ex Gravio pes Anglus est ad Romanum ut 1000 ad 967, sequitur Romanum esse 653 [illegible] in eo statu in quo est.

Pes Romanus Vilalpandi ex congio juxta Ricciolum, 665 [illegible]

Nam ex Ricciolo Romanus est ad Bononiensem ut 120 ad 152, vel 15 ad 19. Verum, si ex observatione D. Auzour, dictus congius Vespasiani, seu Farnesianus continet aquæ fontanæ Trevianæ uncias Parisienses 109, grossos 3, grana 24; proindeque pes cubicus congii octuplus, fit librarum 54, unciarum 11, grossorum 2, & granorum 48, cum ex propria observatione pes cubicus Parisiensis continet aquæ fontanæ libras 69, cum 9 unciis, 3 grossis, 22 granis. Hinc supposita aquarum similitudine, esset pes Romanus congialis ad Parisiensem, ut 663 ad 720.

Si pes Romanus esset 664 [illegible], erit ratio ut 13 ad 12, sicut unciarum ratio.
Sed pes Romanus Statilii in Belvedere, 655 [illegible]
Pes Romanus qui in hortis Mattei, 657 [illegible]
Pes Romanus ex palmo, 658 [illegible]
Seu ferè & proximè, 659

Vide Plin. libro 7, capite 2, & Ghetaldum in Archim. promot. ubi palmus seu spithama per dodrantem indicatur.

Romæ in pavimento Panthei lapidum quadratorum latera Parisienses pedes 9 cum lineis 8 continent; quæ si Romanorum pedum 10 supponantur, erit pes Romanus, 653

Fascia marmorea ejusdem pavimenti lata ped. Parif. 2, cum lineis 8 [illegible]: quæ si fuerit 3 pedum Romanorum, erit pes Romanus, 650

Portæ ejusdem Templi latitudo est pedum Parisinorum 18, cum pollicibus 4 [illegible]; hinc si supponamus dictam Portam fuisse pedum Romanorum 20, erit pes Romanus 661 [illegible]

Nota ex Greaves Anglo, dictam portam esse pedum Londinensium 19 cum [illegible], unde sequeretur pedem Londinensem esse ad Parisinum, ut 674 $\frac{1}{7}$ ad 720, eum reverà sit ut 675 $\frac{1}{2}$ ad 720. Hinc arguitur, aut pedem Anglum mutatum fuisse, aut dictum Greaves usurpasse pedem Anglum justo minorem. Idem prorsus arguitur ex proportione Bracchii Florentini quam tradit.

Pyramidis Cestii basis latera pedes Parisinos habet 86 $\frac{1}{4}$. Sed si ea supponamus passuum Romanorum 19, aut pedum 95, erit pes Romanus 653 $\frac{1}{3}$.

In arcu Septimii Severi columnarum diameter prope basim est pedis Parisini 1, cum 4 poll. $\frac{1}{4}$; quod accedit ad latitudinem Fasciarum Porphyreticarum in pavimento Rotundæ seu Panthei; nempe 1 pedis cum pollicibus 4 $\frac{1}{3}$, pro sesquipede Romano.

Ex diametro Columnarum, erit pes Romanus. 650

Ex Fascia Porphyretica. 653 $\frac{1}{3}$

Longitudo penduli cujus vibrationes singulis temporis medii secundis absolvuntur, observata Parisiis, Uraniburgi, Lugduni, in monte Setio, & ad Pyrenæos montes inventa fuit 36 poll. 8. lin. $\frac{1}{2}$, seu pollicum 36 cum [illegible] fere juxta pedem Parisiensem.

Longitudo penduli juxta varias mensuras.

Mensuræ variæ ad pedem Parisinum comparatæ.		*Pollices, seu unciæ.*	*Millesimæ partes pollicis.*
Pes Parisinus	720	36	cum 708
Rhinland.	696	37	974
Bononiensis	843	31	352
Palm. Rom. Arch.	994 $\frac{1}{6}$	53	472
Brach. Florent.	1290	20	480
Seu 1. brach. cum solidis 14. groff. 0 [illegible].			
Pes Rom. Capit.	653 $\frac{1}{6}$	40	459
	653 $\frac{1}{2}$	40	443
	652	40	536
Ex Congio	665	39	744
Sit pollex Parisin. 40 $\frac{1}{2}$, erit tunc pes Romanus partium earumdem 652 [illegible].			
Pes Anglus	675 $\frac{1}{2}$	39	126
seu pollicum fere, & quam proxime 39 $\frac{1}{8}$.			

Hero Mechanicus in Isagoge.

Ὁ δὲ Ἰταλικὸς ποὺς δακτύλους ἔχει τεσσαρες, καὶ δέκα καὶ τρίτον.

Hinc Salmasius in exercitationibus Plinianis, pag. 684, arguit pedem alium fuisse 16. digit. in urbe scilicet, alium in Italia digitorum 13. $\frac{1}{3}$, sed malè; loquitur enim Hero de pede Romano expresso in digitis Alexandrinis. Constat enim ex eodem Herone Alexandrinum fuisse ad Romanum, ut 6 ad 5, seu ut 16 ad 13 $\frac{1}{3}$.

Item Hyginus de limitibus constituendis: *In Germania*, inquit, *& in Tungris pes Drusianus habet monetalem & sescunciam.* Constat pedem Romanum in 12 uncias divisum hic appellari monetalem. Unde si supponamus pedem Romanum 665, erit Drusianus 747, major scilicet Parisiensi, sed minor Lugdunensi. Sed si fuit pes Romanus 653, erit Drusianus 737 circiter. *Vide Greaves de pede Rom. p. 6.*

Ibidem loquens de Cyrene: *Pes eorum qui Ptolemaïcus appellatur, habet monetalem & semunciam*, seu ut 25 ad 24 quemadmodum Græcus ad Romanum, quod non convenit cum Herone, nisi dicamus pedem Cyrenensem minorem fuisse Alexandrino.

Item Hero Mechanicus in Isagoge.

MILLIARE, intellige Alexandrinum, stadia habet 7 $\frac{1}{2}$. Pedes Philetereos, hoc est Alexandrinos seu Regios 4500, Italicos 5400. Hinc sequitur ratio pedis Alexandrini ad Romanum ut 6 ad 5. Itemque ratio milliaris Alexandrini ad Italicum ut 5400 ad 5000. Nam Italicum fuit passuum 1000.

Nota Alhazenum dum tribuit terræ ambitui milliaria 24000, intelligendum de milliari Alexandrino.

Pro pede Arabico.

JUXTA Abulfedam 500 stadia, & quidem Alexandrina, ut suppono, æquivalent milliaribus 66 $\frac{2}{3}$: ergo milliare Arabicum æquivalebit 7 $\frac{1}{2}$ stadiis, sicut & milliare Alexandrinum ex Herone supra citato: ergo milliare Arabicum æquale Alexandrino. Sed in milliari Alexandrino dantur pedes Alexandrini 4500, & in Arabico 6000 Arabici; est igitur ratio pedis Alexandrini ad Arabicum, seu pes Arabicus erit dodrantalis seu spithama, respectu Alexandrini, hoc est ut 4 ad 3.

In Ægypto singula latera majoris pyramidis sunt pedum Anglicorum 693 seu Parisiensium 650. Hinc Ægyptius ad Parisiensem ut 13 ad 12.

Nota. Parisiis anno 1668 facta est reformatio pedis latomorum, quorum sexpeda veram excedebat lineis 5.

Ulna Parisiensis, alia *des Merciers* continet pedes 3, pollices 7, lign. 10 $\frac{1}{2}$; alia *des Drapiers* continet pedes 3 poll. 7 lin. 9 $\frac{1}{2}$.

Prior æqualis est 4 pedibus Romanis quorum singuli 658 $\frac{1}{2}$ partium, quarum pes Parisinus 720.

Canna Monspeliensis continet pedes Parisin. 6. cum pollice 1 $\frac{1}{2}$, dividiturque in 8 palmos, vulgò *pans*, quorum singuli æquales sunt palmo Romano mercatorum, quorum 8 in canna.

Pan Monspeliensis continet 9 pollices, 2 lineas $\frac{1}{4}$, sicut Romanus Mercatorum palmus.

Pedum comparatio & æquipollentia.

Alexandrini	144
Græci	125
Romani	120
Arabici	108
Parisienses	131

MESURES PRISES SUR LES ORIGINAUX *& comparées avec le pied du Chastelet de Paris par M. Auzout.*

LE pied de Paris dont on s'est servi, est celuy qui fut réduit l'an 1668 conformément à la Thoise du Chastelet. Il est divisé en 1440, c'est-à-dire, chaque ligne en 10 parties; & c'est sur cette mesure que les suivantes sont réduites.

Le palme de Rome pris au Capitole contient 988 $\frac{1}{4}$, ou 8 pouces, 2 lignes, 8 $\frac{1}{2}$ parties. Celuy des passets est quelquefois un peu plus grand, & fait 8 pouces, 3 lignes. Le passet est une mesure de buis qui contient ordinairement 5 palmes,

mes, & qui est faite de plusieurs pieces qui sont jointes ensemble par des clous, pour pouvoir se plier, & se porter commodément.

Le palme est divisé en 12 onces, & l'once en 5 minutes; ce qui fait soixante minutes au palme : on ne se sert point d'une plus petite division. 10. palmes font la canne que l'on nomme d'Architecte.

Le pied Romain que l'on nomme ancien, qui est celuy de Lucas Pœtus pris au mesme lieu, contient 1306 ou 1307 parties. Il est un peu trop petit, puis que le palme devant estre les trois quarts du pied, ou 12 doigts des 16 qui composent tout le pied, il devroit contenir suivant la premiere mesure 1318 parties.

Il reste à Rome deux pieds antiques sur deux sepulcres de Massons ou d'Architectes; l'un dans le Jardin de Belvedere, & l'autre dans la Vigne Mattei; & quoy-que les divisions en soient malfaites & inégales, on peut pourtant supposer que le total en est bon. Celuy de Belvedere contient 1311 parties ou bien 10 po. 11 l. & 1 partie ou $\frac{1}{11}$; & celuy de la Vigne Mattei en contient 1315; ou bien 10 po. 11 l. 5 parties ou $\frac{1}{2}$ ligne; & comme ils peuvent estre un peu diminuez sur les bords, on peut les estimer égaux à 16 onces du palme moderne.

Par toutes ces mesures on peut prendre l'aune de Paris pour 4 pieds Romains antiques.

Le pied Grec pris au Capitole a 1358 parties, ou bien 11 po. 3. l. 8 parties, estant au Romain comme 25 à 24, comme on déduit d'ordinaire de la difference de leurs stades dont l'une contenoit 600 pieds, & l'autre 625. Le pied Romain estant 1306 ou 1307, le pied Grec devroit estre 1364 ou 1365; & si le Romain estoit 1318, le Grec devroit estre 1373 : si le Romain estoit 1311, le Grec seroit 1365 $\frac{2}{3}$: si le Romain estoit 1315, le Grec seroit 1369 $\frac{19}{24}$; toûjours plus grand que celuy du Capitole marqué par Lucas Pœtus.

Nota. Le pied qui est à Belvedere sur le tombeau de T. Statilius Mensor, est divisé en palmes & en doigts; la division en est malfaite & grossiére : l'autre qui est dans la Vigne Mattei sur un autre tombeau de Cossutius, n'est point divisé en doigts. Il est à croire que Lucas Pœtus avoit marqué le pied Romain & le pied Grec de juste proportion; mais qu'à force de prendre le pied Romain, on l'a augmenté. Si le Romain estoit 652, le Grec seroit 679 $\frac{1}{6}$. *Voyez Lucas Pœtus, p. 5.*

Le palme de Marchand dont 8 font la canne, dont on se sert pour mesurer toutes les étoffes, a 1102 $\frac{1}{2}$ parties, ou bien 9 pouces 2 $\frac{1}{4}$ de ligne. La canne faisant justement 6 pieds, 1 pouce, 6 lignes, elle revient à peu prés à une aulne & deux tiers de celle de Paris.

Le palme & la canne de Rome pour les Marchands, est précisément le pan & la canne dont on se sert à Montpellier.

Le palme de Naples pris sur l'original, a 1161 ou 1162 parties, ou bien 9 pouces, 8 lignes, 1 ou 2 parties.

La brasse de Florence prise à la mesure publique contre la prison, a 2580 ou 2581 parties, c'est à dire 1 pied, 9 pouces & 6 lignes, ou 1 partie davantage; mais le premier est plus juste.

Le pied de Boulogne pris dans le Palais de la Vicairie, a 1686 parties, ou bien 1 pied, 2 pouces & 6 parties.

Le bras pris au mesme lieu a 2826 parties, ou bien 1 pied, 11 pouces, 6 lignes; ce qui ne fait pas justement 5 pieds de 3 bras, comme le suppose le P. Riccioli.

Le bras de Modene a 2812 $\frac{1}{2}$ parties; ou bien 1 pied, 11 pouces, 5 lignes $\frac{1}{2}$.

Le bras de Parme pris auprés du Dome a 2526 parties, ou bien 1 pied, 9 pouces, 6 parties.

Le bras de Lucques a 2615 parties; ou bien 1 pied 9 pouces, 9 l. 5 part.

Le bras de Sienne pris ſur la canne publique qui eſt poſée horizontalement ſous la loge de l'Hoſtel de ville, & qui contient 4 bras, a 2667 parties ; ou bien 1 pied 10 pouces, 2 lignes, & 7 parties.

Le pied de Milan pris ſur le Traboco de bois où on éprouve les meſures, a 1760 parties ; ou bien 1 pied, 2 pouces, 8 lignes : & le bras dont le pied fait les deux tiers, a 2640 parties ; ou bien 1 pied, 10 pouces.

Le pied de Pavie pris ſur la canne de fer qui eſt à la porte du Dome, a 2080 parties ; ou bien 1 pied, 5 pouces, 4 lignes ; & le bras dont il eſt les trois quarts, a 2780 parties, ou 1 pied, 1 pouce, 2 lignes.

Le pied de Turin pris ſur la meſure de cuivre qui eſt dans l'Hoſtel de Ville, a 2274 parties ; ou bien 1 pied, 6 pouces, 11 lignes, 4 parties.

Le pied de Lyon contient 1515 & [illegible] de partie ; ou bien 1 pied, 7 lignes, & [illegible].

La thoiſe contient 7 pieds [illegible].

L'aulne de Lyon contient 3 pieds, 7 pouces, 8 lignes & 3 parties.

Fin des Meſures données par M. Auzout.

DE

MENSURA LIQUIDORUM ET ARIDORUM

DOLIUM Pariſienſe, vulgò *muid*, æquale habetur communiter 8 pedibus cubicis, ita ut dolia 27 impleant ſexpedam cubicam.

Ex antiquis Statutis, *Ordonnances*, dolium deberet continere pintas 300 ; ſed nunc 288 ; ita ut pintæ 36 implere debeant pedem cubicum.

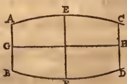
Dividitur etiam communiter dolium in ſextarios, *ſextiers*, 36 ; ſextarius verò in pintas 8 ; inde 2[illegible]8 pintæ in dolio.

Pinta quæ in domo publica Pariſienſi aſſervatur, continet pollices cubicos 47 [illegible] ; cùm ex dolio deberet eſſe pollicum cubicorum 48.

Sextarius, *chopine*, qui ibidem aſſervatur, major eſt dimidio pintæ, eſtque circiter pollicum cubicorum 24.

Demiſextier quater ſumptus excedit pintam pollicibus cubicis 2 [illegible].

Dolium cujus longitudo G H eſt pollicum 32, diameter A B vel C D 22 pollicum, ſed diameter E F 25 per medium foramen, *le bondon* ; continet pintas 289 [illegible]. Sed ſi diameter E F ſit pollicum 25 [illegible], erit capacitas pintarum 296 ferè.



Nota contractionem unius pollicis in longitudine 8 pintas proxime demere.

Si longitudo G H ſit 30 [illegible] poll. diameter A B 23, & diameter E F 25, continet pintas 287 [illegible].

Item, ſi longitudo G H ſit 32, diameter A B 23, & diameter E F 24, continet pintas 289 [illegible].

Modius Pariſienſis pro granis, vulgò *le boiſſeau*, æqualis eſt cubo cujus latus 8 pollicum, 7 linearum [illegible] ; ſeu continet pollices cubicos 644 [illegible].

De Ponderibus.

PARISIIS in libra ſunt unciæ 16, ſeu groſſi 128, ſeu grana 9216.

In uncia ſunt groſſi 8, ſeu grana 576.

In groſſo ſeu drachma ſunt 3 ſcrupuli, ſeu 72 grana.

In ſcrupulo ſeu denario grana 24.

Facto experimento Pariſiis in Curia *des Monnoyes*, conſtitit cubum cujus capacitas 171. pol. $\frac{1}{2}$, continere aquæ puræ fontanæ *d'Arcueil* libras 6 cum unciis 14, groſſis 4, & granis 21 ſeu omnino grana 63650. Unde ſequitur cubum pedalem Pariſienſem continere ejuſdem aquæ libras 69 cum unciis 9, groſſis 3, & granis 22, ſeu ſummatim grana 641326. Hinc pollex cubicus ejuſdem aquæ grana 371 $\frac{1}{10}$.

Pollices cubici 171 $\frac{1}{2}$ ſunt pintæ 3 $\frac{1}{2}$ cum pollicibus 3 $\frac{1}{2}$, ſuppoſito quod pinta ſit pollicum 48, uti in dolio. Fuiſſet congii Farneſiani pondus granorum 63162, poſito latere cubi 665 partium.

Hinc ſi pinta ſupponatur pollicum cubicorum 48, continebit libras 2, minus 1 uncia, cum 41 granis, ſeu continebit grana 17814 $\frac{1}{2}$ dictæ aquæ, ſeu 1 libram cum unciis 14 & groſſis 7 $\frac{1}{2}$ circiter; at vini libram unam cum unciis 14 & groſſis 2 $\frac{1}{2}$; eſt autem differentia $\frac{1}{10}$ totius ponderis.

Latus dicti cubi continentis pollices cubicos 171 $\frac{1}{2}$ eſt partium decimarum lineæ 666 $\frac{1}{10}$, cùm debuiſſet eſſe 685, ut æquaretur dictus cubus congio Farneſiano ſeu octanti pedis Romani cubici; excedebat ergo granis 488, ſeu groſſis 6 & granis 56.

Ex D. Auzout libra Romana hodierna, quæ eſt unciarum Romanarum 12, continet uncias Pariſienſes 10 cum groſſis 7 & granis 12; ſeu ſummatim 6276 grana.

Hinc patet unciam Romanam hodiernam aurificam, leviorem eſſe Pariſienſi granis Pariſienſibus 43.

Merſennus dicit unciam Romanam leviorem eſſe Pariſienſi granis 45, *tom. 3 Obſervat. Phyſicomathem*. Erit igitur ex D. Auzout ratio unciæ Rom. ad Pariſ. ut 11 ad 11 $\frac{221}{333}$. Sed ſi ponamus unciam Romanam minorem non 43, ſed 44 gran. erit ratio ut 12 ad 13.

Ex eodem D. Auzout congius Farneſianus qui debuit continere libras antiquas 10, ſeu uncias 120 vini, deprehenſus eſt continere aquæ fontanæ *di Trevi* uncias Pariſienſes 109 minus granis 24, ſeu libras 6 cum unciis 12, groſſ. 7, & granis 48: fuiſſet autem pondus vini levius.

Congius qui aſſervatur Pariſiis in Bibliotheca PP. S. Genovefæ, continet aquæ Sequanæ libras 7 cum uncia 1, groſſis 2, & granis 36.

Vas cujus capacitas 171 $\frac{1}{2}$ pollicum cubicorum, ſeu cujus latus 666 $\frac{1}{10}$ partium, qualium Pariſienſis pes, continet 1440: deficiebat à dicto congio unciis 2 & groſſis 6; proindeque dictus congius excedit dictum congium Veſpaſiani unciis 3, groſſis 4, & granis 65. Dicunt illum eſſe quem dimenſus eſt Gaſſendus.

Pondus aquæ excedit pondus vini communiter parte octogeſima.

Pondus aquæ ad pondus aeris, ut 960 ad 1.

Pondus aquæ marinæ ad aquam Sequanæ, ut 46 ad 45.

Menſuræ liquidorum antiquæ.

AMPHORA, ſeu pes cubicus continet pondus vini librarum Romanarum 80.

Urna dimidium amphoræ, ſeu libras 40.

Congius libras 10, ſeu ſemipes cubicus; ac proinde pars octava amphoræ.

Sextarius eſt ſexta pars congii.

Hemina, ſeu cotyla eſt ſemiſextarius cujus pondus unciarum Pariſienſium 9 $\frac{1}{12}$. Si congius ſit unciarum Pariſienſium 109,

Ciatus eſt ſexta pars heminæ.

Deprehendit Gaſſendus, ut ipſe narrat in vita Peireskii, aquam quæ Romano pondere debuit eſſe decem librarum ſeu unciarum 120, antiquarum

Experimentum

circa necessariam declivitatem aquæ effluentis.

IN tubo A B cujus diameter pollicum 6, & longitudo sexped. 1000, notatæ sunt extremitates A B bene æquilibratæ, ope scilicet aquæ in tubo quiescentis. Tunc accedente per B, continuo affluxu, 6 pollicum aquæ quantitate, ut tota exiret per alteram extremitatem distantem mille sexpedis, necessarium fuit tubum aperire in C quinque pollicibus inferiùs quam A.



Propositio.

Vas aqua indesinenter plenum, cujus altitudo sit pedum 15, cum pollicibus 5, & lineis fere 7, per foramen rotundum pollicis unius, quantitatem aquæ cubicam pedalem emittet intra tempus 6 secund. quod sic demonstro.

SUPPONO corpus grave (guttam aquæ verbi gratia) motu naturaliter accelerato cadere ex altitudine pedum 15 cum pollice 1 & 2 lineis intra unicum minutum secundum temporis. Hoc supposito, quoniam aqua ex fundo vasis eo velocitatis gradu erumpit, quem acquisivisset si ex summa superficie ad fundum descendisset; supponiturque vasis altitudo pedum 15 cum pollice 1 & lineis 2, seu lineis 2174 quæ quidem altitudo conficeretur intra unum minutum secundum temporis motu naturaliter accelerato, ut demonstravit Hugenius ex penduli minuta secunda exhibentis longitudine, erit aquæ velocitas talis, ut per eam continuò æquabilem conficeretur spatium pedum 30 cum pollicibus 2 & lineis 4 intra unicum minutum secundum temporis. Moles igitur aquæ, quæ dicto motu æquabili intra 1 secund. è vase indesinenter pleno per foramen rotundum unius pollicis æqualis est cylindro cujus diameter sic pollicis unius, altitudo vero pedum 30 cum pollicibus 2 & lineis 4; proindeque si dictæ quantitatis assumatur sextuplum, provenient 2174 pollices cylindrici pro spatio temporis 6 secund. At juxta basium rationem, quæ est quadrati circumscripti ad circulum, cum 14 pollices cylindrici dent 11 pollices cubicos, 2174 cylindrici dabunt cubicos 1708 $\frac{1}{7}$, seu cubum pedalem fere, qui scilicet continet pollices cubicos 1728. Jam ut quadratum numeri 1708 $\frac{1}{7}$ ad quadratum numeri 1728, ita 15 pedes cum pollice 1 & lineis 2, ad 15 pedes cum pollic. 5, & lineis 4 $\frac{1}{2}$ pro altitudine vasis è quo intra 6 secund. effluerent 1728 pollices cubici, seu quantitas aquæ cubica pedalis; quod erat propositum

Corollarium primum.

HINC patet qua ratione determinari possit tempus intra quod effluet aqua è dato vase prismatico aut cylindrico per foramen datum in fundo factum. Nam ut altitudo pedum 15 cum police 1 & lin. 2 ad altitudinem vasis datam, ita quadratum temporis unius minuti secundi, ad quadratum temporis intra quod grave aliquod decideret ex altitudine vasis. Deinde ut est foramen ad basim totam, ita tempus inventum ad tempus intra quod tota aqua effluet è vase dato semel pleno. Concipiamus enim vas divisum in cylindros ejusdem cum ipso altitudinis, sed quorum bases æquales sint foramini, maneatque vas plenum dum effluet quantitas aquæ istis omnibus cylindris æqualis: constat ex dictis futurum ejusmodi effluxum cylindrorum dimidio tempore ejus quo omnes cylindri successivè effluerent non motu uniformi, sed retardato,

qualis est motus projectorum ascendentium, qui accelerato æqualis fit; quamobrem patet Corollarium.

Corollarium secundum.

CONSTAT item qua ratione ex tempore effluxûs aquæ in vase prismatico aut cylindrico, cognoscatur tempus quo grave decideret ex altitudine vasis. Nam ut basis est ad foramen, ita tempus totale effluxûs aquæ ex vasi semel pleno, est ad tempus quo grave decideret ex altitudine vasis. Demonstratio quidem est pro gutta aquæ decidente ex altitudine vasis: sed experiri poteris an hydrargyrus, seu argentum vivum, celeriùs effluat. Verum in praxi, quia effluxus sub finem non est adeo regularis, ut meliùs observari seu determinari possit tempus quo vas datum evacuari debeat, utere methodo sequenti.



Data totali aquæ altitudine in vase cylindrico aut prismatico, & dato insuper tempore quo pars aquæ per fundum effluit, unà cum reliqua altitudine aquæ; tempus quo tota aqua efflueret, poterit hoc modo determinari.

Sit totalis altitudo aquæ AB; CB reliqua. Altitudinum AB, CB extrahantur radices quadratæ, ac deinde minor radix subtrahatur à majore, ut habeatur differentia; ut enim erit differentia radicum ad majorem, ita tempus observatum ad totale quæsitum; sunt enim omnes altitudines à communi termino B in duplicata ratione temporum.

De mensura aquarum effluentium.

SUPPOSITA constanti aquæ altitudine pollicum 75 $\frac{8}{10}$, seu linearum 909 $\frac{6}{10}$ per foramen horizontale rotundum unius pollicis (sicut & per quadratum æquivalens, cujus nempe latus erit linearum 10 $\frac{614}{1000}$) intervallo temporis 93 secund. effluxerunt pollices cubici aquæ 11412 $\frac{8}{10}$: ergo tempore 10 min. seu 600 secund. effluxissent pollices cubici aquæ 73631 $\frac{1}{3}$.

Jam ut 10 lin. $\frac{614}{1000}$ ad pollices 75 $\frac{8}{10}$, seu ad lineas 909 $\frac{6}{10}$; ita 73631 $\frac{1}{3}$ ad numerum cujus logarithmus 6. 7991887, quot scilicet pollices cubici aquæ effluerent intra 10 min. per foramen horizontale latum 10 lineis $\frac{614}{1000}$, & longum pollicibus 75 $\frac{8}{10}$ quanta est aquæ altitudo. Hinc per ea quæ supra demonstravimus de proportione aquarum effluentium per foramina horizontalia & verticalia, si ex logarithmo 6.7991887 tollatur differentia inter logarithmos numeri 3, nempe 0. 4771212 & numeri 2, nempe 0. 3010300, quæ erit 0. 1760912 quod idem est ac si facta additione logarithmi numeri 2 cum logarithmo 6. 7991887, tolleretur à summa logarithmus numeri 3, restabit logarithmus 6. 6230975 numeri exprimentis pollices cubicos aquæ qui intra 10 min. effluxerunt per foramen verticale altum 75 poll. $\frac{8}{10}$ & latum 10 lineis $\frac{614}{1000}$. Sed si à logarithmo 6. 6230975 auferatur logarithmus 3. 2375437 numeri 1728 pollicum scilicet cubicorum unius pedis cubici, restabit numerus 3. 3855538, qui erit logarithmus numeri 2429 & $\frac{1}{3}$ circiter pedum cubicorum aquæ.

Juxta calculum præcedentis propositionis debuissent effluere pollices cubici aquæ 17125 $\frac{1}{4}$ per foramen rotundum unius pollicis intra tempus 93 secund. supposita aquæ altitudine 909 $\frac{6}{10}$ lin. cum effluxerint tantum 11412 $\frac{8}{10}$, cujus ratio est proximè ut 3 ad 2.

FRAGMENS DE DIOPTRIQUE.

PREMIERE PROPOSITION.

Si un rayon oblique A B tombe sur une surface platte B C, & passe dans un autre diaphane, le rayon rompu B D, & le prolongé B E tous deux bornez d'une mesme perpendiculaire D C, seront entre eux dans la raison du milieu d'où vient le rayon à celuy où il est entré.

COMME parce qu'en fait de réfractions l'air est au verre comme 3 à 2; & au contraire, le verre à l'air comme 2 à 3 : le rayon B D passé de l'air dans le verre, sera à B E comme 3 à 2 dans la premiere figure, & au contraire dans la seconde figure.

1. fig. F A C B E D G

2. fig. F A C B D E G

Démonstration.

L'angle B E C est égal à l'angle d'incidence F B A, & l'angle B D C égal à l'angle rompu G B D ; donc B D est à B E comme le sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle rompu, c'est-à-dire, comme la mesure du diaphane d'où vient le rayon, à celuy où il est entré.

Toutes les propositions suivantes sont generales comme celle-cy; mais pour plus grande facilité nous ne parlerons que du verre à l'égard de l'air.

Corollaire.

Il s'ensuit que pour les rayons de petite incidence, D C est aussi à E C comme 3 à 2, à cause de l'insensible difference.

SECONDE PROPOSITION.

A F C B G E D

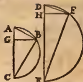
Si un rayon A B tombe obliquement sur la surface spherique d'un verre dont le centre soit G, par lequel soit fait passer l'axe G C parallele à A B : le rayon rompu B D sera à la portion de l'axe D G comme 3 à 2.

Démonstration.

L'ANGLE C G B est égal à l'angle d'incidence A B F, & l'angle G B D est l'angle rompu ; donc B D est à D G, comme le sinus de C G B au sinus de G B D, c'est-à-dire, comme 3 à 2.

Corollaire.

Il s'ensuit que pour les rayons de tres-petite incidence, lors que B D ne differe point de C D, alors D G est égale au diametre ; & partant D C vaut trois demidiametres, & alors D est ce qu'on appelle le foyer absolu que nous marquerons dans la suite de la lettre H.



LEMME.

Aux cercles inégaux ABC, DEF, si les cordes AB, DE sont égales, les sinus verses AG, DH seront en raison réciproque des diametres.

Démonstration.

LA corde AB est moyenne proportionnelle entre le sinus verse AG & le diametre AC; donc le rectangle AG, AC est égal au quarré de AB. Par la mesme raison le quarré de DE ou AB est égal au rectangle DH, DF; donc les rectangles AG, AC, & DH, DF sont égaux; ils ont donc les costez reciproques; ce qu'il falloit prouver.

TROISIE'ME PROPOSITION.

L'incidence sur le verre convexe estant donnée avec le demidiametre, trouver la distance entre le foyer absolu & le concours du rayon rompu.

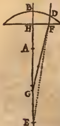
DANS la figure de la proposition précedente soit marqué le foyer absolu H à la distance de trois demidiametres, on demande à connoistre DH. Soit pris CK sinus verse de l'incidence. Je dis que DH est égale à $\frac{4}{3}$ CK.



Démonstration.

Ayant sur le centre D de l'intervalle DB décrit l'arc BL, alors DL sera à DG, & pareillement HC à HG comme 3 à 2; donc GL est le tiers de DL, aussibien que GC de HC. D'où il est clair que CH surpasse DL de 3 CL; & ayant ajousté CL à DL, CH surpassera CD du double de CL. Mais parce que les demidiametres DL, GC peuvent sans erreur sensible estre pris comme 3 à 1, KL est $\frac{1}{3}$ de CK, & par conséquent CL en vaut $\frac{2}{3}$: & puis que DH est égal à 2 CL, il s'ensuit que DH vaut $\frac{4}{3}$ CK.

Vous observerez qu'il ne s'agit icy que des rayons dont l'incidence ne passe pas 5 degrez; autrement DH deviendroit si grand, que DL ne pourroit sans erreur estre supposé triple de GC pour faire KL $\frac{1}{3}$ de CK; joint que la proportion réciproque des diametres suppose les cordes égales, & non pas les sinus droits; mais jusques à 5 degrez c'est la mesme chose.



PREMIE'RE PROPOSITION.

Si la convexité d'un verre plano-convexe reçoit les rayons paralleles à l'axe, le foyer absolu sera à un diamétre plus $\frac{1}{3}$ de l'épaisseur loin du sommet de la convexité du verre.

A est le centre; B le sommet; BH l'épaisseur; E le foyer absolu de la convexité si elle estoit seule; FG rayon rompu par la surface platte, & partant G foyer absolu. Je dis que GB vaut un diametre plus $\frac{1}{3}$ BH.

Démonstration.

Comme 3 est à 2, ainsi EF est à GF, ou EH à GH. Mais EH est égal à 3 demi-

demidiametres moins BH; donc GH est égal à un diametre moins $\frac{2}{3}$ BH, & finalement GB vaut un diametre plus $\frac{1}{3}$ BH.

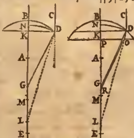
SECONDE PROPOSITION.

Aux plan-convexes, si un rayon parallele à l'axe entre par la convexité, son éloignement du foyer absolu sera égal à $\frac{1}{3}$ du sinus verse de la premiere incidence, soit que ce sinus verse soit égal à l'épaisseur du verre, soit qu'il soit plus petit.

BK est l'épaisseur égale au sinus verse de l'incidence BD; E foyer absolu de la convexité; EL éloignement du foyer absolu de la mesme convexité; M foyer absolu du plan-convexe; G concours du rayon: je dis que G est audessus de M à $\frac{1}{3}$ de BK. I. Cas.

Démonstration.

Soit sur le centre G décrit l'arc DN, lequel à cause que GD est environ double de AB, coupera BK par la moitié en N. LD | LA || 3 | 2, & LD | DG || 3 | 2: donc DG ou GN = AL; mais AL vaut 1 diametre — $\frac{2}{3}$ BK, donc GN = 1 diametre — $\frac{2}{3}$ BK, ajoustant BN qui est $\frac{1}{2}$, alors GB sera = 1 diametre — $\frac{1}{6}$ BK: d'ailleurs BM distance du foyer absolu vaut 1 diametre + $\frac{1}{3}$ BK, la distance GM sera donc $\frac{1}{2}$ BK.

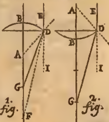


Supposons maintenant que l'épaisseur soit augmentée en PO; alors le foyer absolu M descendera d'un tiers de PK, mais aussi G descendera d'un tiers de PK ou DO, qui sont comme égales, la seconde refraction se faisant en O par une ligne parallele à DG, qui sera OR; puisque LD est environ triple de LG aussibien que LO de LR, il s'ensuit que la difference OD sera triple de RG. II. Cas.

SECONDE PROPOSITION.

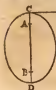
Tout verre plan-convexe ramasse les rayons paralleles à l'axe, à la distance du diametre de la convexité, de quelque costé qu'on la tourne.

SOIT la convexité faite anterieure, comme en la premiere figure; le centre A; le rayon ED incident parallele à l'axe BA & prolongé en I; la premiere refraction IDF ou DFA = $\frac{1}{3}$ DAB ou IDA: donc FDA estant égal à 2, alors DFA sera égal à 1; donc FA est double de AD, c'est-à-dire, par la premiere refraction, le rayon en F est à une distance de trois demidiametres; ce qu'il faut bien retenir pour la suite. Mais par la seconde refraction faite par la surface platte, le concours F est approché du tiers de FB; donc BG distance du foyer G vaut un diametre, & l'angle IDG ou DGB = $\frac{1}{2}$ DAB. I. Cas.



Soit la surface platte anterieure comme en la seconde figure, alors il n'y aura qu'une refraction faite par la seconde surface; mais qui vaudra tout d'un coup la moitié de DAB; donc AD sera à DG ou BG, comme 1 à 2. II. Cas.

Or avant que de passer outre, il sera bon de considerer que dans le premier cas il arrive au cercle la mesme chose qu'à l'ellipse. Car si la seconde surface avoit esté concave d'une circonference décrite sur le point F, les rayons seroient venus en F sans autre réfraction; ce qui est proprement ce qui arrive à l'ellipse. Et pour plus grand éclaircissement, soit une ellipse dont les foyers A, B; le grand axe CD, & le parametre CE; & suivant la mesure des refractions, soit AB = 6, & CD = 9, alors le rectangle DAC sera = 11 1/4; donc le rectangle de la figure DCE = 45; lequel estant divisé par CD, donnera 5 pour le parametre. Donc, puis que CB distance du foyer contient 1 1/2 parametre CE, si sur ce mesme parametre on décrit un cercle, sa convexité sans autre refraction portant aussi son foyer au sesquidiametre, il s'ensuit que le cercle & l'ellipse en ce cas font le mesme effet.



Le second cas répond aussi à ce qui arrive à l'hyperbole; car posé la distance des foyers AB = 6, & que l'axe transverse CD soit = 4; alors le rectangle BCA sera 5; donc le rectangle de la figure DCE sera 20, lequel divisé par 4 donnera 5 pour le parametre CE qui sera égal à CB distance du verre au foyer. Si donc on décrit un cercle sur CE, lequel soit presenté à l'objet de mesme que l'hyperbole, il fera le mesme effet pour la distance du foyer; & d'ailleurs il est démontré que de tous les cercles qui toucheront une section conique par dedans au *vertex*, le plus grand est celuy qui est décrit sur le parametre.



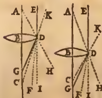
TROISIÉME PROPOSITION.

Estant donné un verre convexe des deux costez, égal ou inégal: comme la somme des diametres est à un des deux, ainsi l'autre diametre est à la distance du foyer.

SOIT AC les centres des convexitez; ED rayon incident parallele à l'axe, & prolongé en I, ADH, CDK perpendiculaires.

Démonstration.

Par la premiere refraction IDF est égal à 1/2 DCA. Par la seconde refraction FDG est égal à 1/2 IDF + 1/2 HDI ou DAC: donc FDG est égal à 1/4 DCA + 1/2 DAC; & IDG ou DGA sera égal à 1/2 DCA + 1/2 DAC; donc 2 DGA est égal à DAC + DCA; par consequent A + C est à C, comme 2 G est à C; c'est à dire, AC est à AD, comme 2 CD est à DG; & A + C est à A, comme 2 G est à A; c'est-à-dire, AC est à CD, comme 2 AD est à DG.



Premier Corollaire.

Il s'ensuit que le foyer G est toûjours plus proche que le grand demidiametre, & plus loin que le petit, & qu'il ne peut tomber au point C, que quand les convexitez sont égales.

Second Corollaire.

Il s'ensuit aussi que quand les convexitez sont égales, le foyer est au centre de part & d'autre.

Troisiéme Corollaire.

Il s'ensuit aussi, que nonobstant l'inégalité des convexitez, le foyer est de part & d'autre à égale distance; c'est à dire, qu'il n'importe de quel costé le verre soit tourné.

Quatriéme Corollaire.

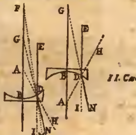
Il s'ensuit encore que la totale refraction I D G ou D G A est toûjours la moitié de l'angle A D K, lequel comprend D A C + D C A.

QUATRIÉME PROPOSITION.

Les verres plan-concaves détournent les rayons paralleles à l'axe comme s'ils venoient de l'extrémité du diametre prise au devant du verre.

Démonstration.

LA premiere refraction I D M ou I D F ou D F A est égale à $\frac{1}{2}$ E D A ou $\frac{1}{2}$ A D F; donc A F est double de A B; c'est-à-dite, que par la premiere refraction s'il n'en arrivoit point d'autre, le rayon seroit détourné en M comme venant de F à la distance de trois demidiamétres; mais à cause de la seconde surface platte, la seconde refraction approche le concours F en G du $\frac{2}{3}$ de B F; donc par la totale refraction I D N, le rayon D N vient comme de G à la distance du diamétre. *I. Co.*



Il n'y a icy qu'une refraction non plus qu'au second cas de la deuxiéme proposition: mais cette refraction est tout d'un coup une moitié de l'incidence, comme estant faite du verre à l'air: donc I D N ou D G A est égal à $\frac{1}{2}$ D A G; donc D G ou G B est égal à 2 A D ou 2 A B. *II. Co.*

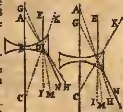
Notez que G est icy une espece de foyer, mais de divergence.

CINQUIÉME PROPOSITION.

Estant donné un verre concave des deux costez égal ou inégal: comme la somme des diamétres est à l'un des deux, ainsi l'autre est à la distance du foyer de divergence.

Démonstration.

LA premiere refraction I D M est égale à $\frac{1}{2}$ D A B. La seconde refraction M D N est égale à $\frac{1}{2}$ D A B + $\frac{1}{2}$ D C A. Donc la totale I D N est égale à $\frac{1}{2}$ D A B + $\frac{1}{2}$ D C A: donc ayant prolongé N D en G, l'angle D G C sera égal à $\frac{1}{2}$ D A B + $\frac{1}{2}$ D C A; & le reste comme en la troisiéme proposition.



Premier Corollaire.

Il s'ensuit qu'un verre également concave fait diverger les rayons comme s'ils venoient du centre.

Deuxiéme Corollaire.

Il s'ensuit aussi qu'il n'importe de quel costé on tourne un verre inégalement convexe.

Troisiéme Corollaire.

Il s'enſuit encore que la totale refraction eſt $\frac{1}{2}$ A D K.

SIXIE'ME PROPOSITION.

Tout verre qu'on appelle Meniſque, c'eſt-à-dire, qui a un coſté convexe & l'autre concave, a ſon foyer de convergence ou de divergence dans la proportion ſuivante.

COMME la difference des diamétres eſt à un des diamétres, ainſi l'autre diamétre eſt à un quatriéme terme, qui ſera le foyer de convergence à la façon des convexes, ſi la convexité prévaut; mais il ſera le foyer de divergence à la façon des concaves, ſi la concavité prévaut: car ſi la concavité eſtoit ſuppoſée égale à la convexité, il n'y a point de difficulté que la deuxiéme refraction détruiſant la premiere, le rayon demeureroit parallele.

Il y a donc deux cas à démontrer; & notez que dans toutes les figures ſuivantes, A eſt centre de la convexité, & C celuy de la concavité.

I. Cas. Quand les meniſques appartiennent aux convexes, c'eſt-à-dire, que le diamétre de la convexité eſt plus petit que celuy de la concavité.

Démonſtration.

Soit premierement la convexité tournée vers l'objet, alors pour la démonſtration il faut conſiderer la proportion des diamétres entre eux.

Premiere figure. Soit B C demidiamétre de la concavité triple de A B; alors par la premiere refraction le rayon ſera porté en C; & comme il ſera devenu perpendiculaire à la concavité, il ne ſortira point de C. Donc C & G concourront; donc D G A qui eſt $\frac{1}{2}$ D A B, ſera $\frac{1}{2}$ A D C.

Deuxiéme figure. Soit B C plus grande que le triple de A B; alors le tiers de D A B ſera plus grand que I D C. Donc par la premiere refraction I D M eſtant $\frac{1}{2}$ D A B, le rayon rompu D M paſſera D C. Or M D A eſt égal à $\frac{1}{2}$ B A D; donc M D C eſt égal à A D C — $\frac{1}{2}$ D A B. Mais M D G eſt égal à $\frac{1}{2}$ M D C; donc M D G eſt égal à $\frac{1}{2}$ A D C — $\frac{1}{2}$ D B A: ajouſtant donc I D M, on aura I D G ou D G A égal à $\frac{1}{2}$ A D C.

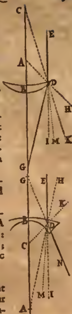
1. fig. 2. fig. 3. fig.

Troiſiéme figure. Soit B C moindre que le triple de A B, alors par la premiere refraction D M ne paſſera pas D C: donc comme M D A eſt toûjours $\frac{1}{2}$ D A B, M D C eſt égal à $\frac{1}{2}$ D A B — A D C. Mais M D G eſt égal à $\frac{1}{2}$ M D C; donc M D G eſt égal à $\frac{1}{2}$ D A B — $\frac{1}{2}$ A D C. Oſtant donc M D G de I D M reſtera $\frac{1}{2}$ A D C.

Voyez la figure ſuivante. Soit enfin la concavité du coſté de l'objet. I D M eſt égal à $\frac{1}{2}$ D C B ou I D K; donc M D K eſt égal à $\frac{1}{2}$ D C B, & M D H ſera égal à $\frac{1}{2}$ D C B + K D H ou A D C. Mais M D G eſt égal à $\frac{1}{2}$ M D H; donc M D G eſt égal à $\frac{1}{2}$ D C B + $\frac{1}{2}$ A D C. Oſtant donc I D M, reſte I D G ou D G A égal à $\frac{1}{2}$ A D C.

Concluſion

Conclusion pour toutes ces figures.



D G A est égal à ÷ A D C; donc dans les trois premiéres figures,

CDA | DAC || 2 DGA | DAG
Ou bien comme C A | CD || 2 AD | DG.

Et dans la 4e figure CDA | DCA || 2DGA | DCA.
Ou bien comme C A | DA || 2CD | DG.

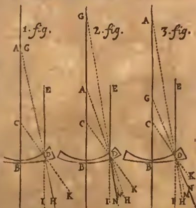
Donc doublant les deux premiers termes de ces proportions on aura géneralement, que comme la différence est à tel qu'on voudra des diamétres, ainsi l'autre est au foyer: ce qui vient de ce que l'angle du foyer n'est icy que moitié de la différence des angles des centres, au lieu qu'à la troisiéme proportion il est moitié de la somme.

Quand les menisques appartiennent aux concaves, c'est-à-dire, quand le diamétre de la convexité est plus grand que celuy de la concavité, laquelle prévaut: *II. Cas.*

Soit premierement la convexité vers l'objet. La premiere refraction I D M est égale à ÷ D A B, donc M D A est égal à ÷ D A B, & M D C égal à ÷ D A B ✢ A D C: mais la deuxiéme refraction M D N est égale à ÷ M D C; donc M D N est égal à ÷ D A B ✢ ÷ A D C: ostant donc I D M, reste I D N ou D G C égal à ÷ A D C.

Soit secondement la concavité vers l'objet.

Dans la premiere figure des trois suivantes, A B estant triple de B C, la premiere refraction portera le rayon sur D H, & il n'y aura point de seconde refraction, & le centre A sera le foyer de divergence; or par la proportion donnée D A C ou D G C est égal à ÷ A D C.



Dans la deuxiéme figure A B est moindre que triple, si-bien que le rayon par la premiere refraction n'est pas porté jusqu'en D H. I D M est égal à ÷ B C D ou I D K, & M D K égal à ÷ B C D; donc M D H est égal à ÷ B C D — H D K ou A D C. Mais M D N est égal à ÷ M D H; donc M D N est égal à ÷ B C D — ÷ A D C. Si donc de I D M on oste M D N, restera I D N, ou D G C égal à ÷ A D C.

Dans la troisiéme figure A B estant plus grand que le triple de B C, le rayon D M par la premiere refraction passe D H. I D M est égal à ÷ B C D ou I D K, & M D K est égal à ÷ B C D; donc M D H est égal à H D K — ÷ B C D. Mais M D N est égal à ÷ M D H; donc M D N est égal à ÷ H D K ou A D C — ÷ B C D;

ajouftant donc I D M, on aura I D N ou D G C égal à ÷ A D C.

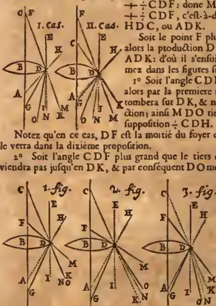
C'eft donc icy la mefme conclufion que deffus, avec cette feule différence, que le quatriéme terme trouvé donne icy le foyer de divergence audevant du verre.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Si un rayon tombant au point D fur un verre convexe, vient d'un point de l'axe F, fa totale refraction M D O fera égale à la moitié de l'angle H D C ou A D K compris entre les lignes tirées des centres des convexitez.

Démonftration.

I. & II. Cas. SOIT le point F le mefme que le centre C, comme dans la premiere figure, ou bien au-delà, comme dans la deuxiéme figure. La premiere refraction M D N eft égale à ÷ H D F; la feconde N D O eft égale à ÷ H D F + ÷ C D F: donc M D O eft égal à ÷ H D F + ÷ C D F, c'eft-à-dire, M D O eft égal à ÷ H D C, ou A D K.



III. Cas. Soit le point F plus prés que le centre C, alors la production D M tombera hors l'angle A D K: d'où il s'enfuit trois autres cas exprimez dans les figures fuivantes.

1° Soit l'angle C D F égal au tiers de F D H, alors par la premiere refraction, le rayon D N tombera fur D K, & ne fera plus d'autre refraction; ainfi M D O tiers de F D H fera par la fuppofition ÷ C D H.

Notez qu'en ce cas, D F eft la moitié du foyer des paralleles, comme on le verra dans la dixiéme propofition.

2° Soit l'angle C D F plus grand que le tiers de F D H, alors D N ne viendra pas jufqu'en D K, & par conféquent D O moins divergeant que F D, tombera entre M D & D N. Cela eftant, la premiere refraction M D N eft égale à ÷ H D C + ÷ C D F; la feconde N D O eft égale à ÷ N D K, c'eft-à-dire, N D O eft égal à ÷ C D F — ÷ M D N, ou bien N D O égal à ÷ C D F — ÷ H D C — ÷ C D F. Mais M D O eft égal à M D N — N D O; donc M D O eft égal à ÷ H D C + ÷ C D F — ÷ C D F + ÷ H D C + ÷ C D F, c'eft-à-dire, M D O eft égal à ÷ H D C.

3° Soit l'angle C D F moindre que le tiers de F D H, alors D N paffera D K, & partant D O fera tout à la gauche. La premiere refraction M D N eft égale à ÷ H D C + ÷ C D F: & la feconde N D O égale à ÷ N D K, c'eft-à-dire, N D O eft égal à ÷ M D N — ÷ C D F, ou bien N D O eft égal à ÷ H D C + ÷ C D F — ÷ C D F. Mais M D O eft égal à M D N + N D O; donc M D O eft égal à ÷ H D C + ÷ C D F + ÷ H D C + ÷ C D F — ÷ C D F, c'eft-à-dire, M D O eft égal à ÷ H D C.

a

Notez que dans tous les cas de cette proposition, quand les convexitez sont inégales, il peut arriver que D O soit ou convergente ou parallele ou encore divergente, suivant que le point F sera plus loin que le foyer, ou dans le foyer mesme ou au deçà; mais cela ne fait rien à la démonstration.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Deux rayons estant posez, l'un parallele E D dont la totale refraction soit I D G, l'autre oblique F D, dont aussi la totale refraction soit M D O; la différence des refractions O D G sera toûjours égale à E D F différence des premieres incidences sur le verre. *Figures de la proposition precedente.*

Démonstration.

PAR la proposition précedente & par le quatriéme corollaire de la troisiéme proposition les angles M D O, I D G sont moitié d'un mesme angle H D C, ou A D K, & par conséquent égaux entre eux; ayant donc osté (dans les premieres figures) ou ajousté (dans les dernieres) l'angle commun I D O, on aura O D G égal à I D M, c'est-à-dire, à E D F.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que l'angle D F B est toûjours égal à l'angle O D G.

Second Corollaire.

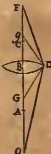
Les mesmes choses se démontreront aussi facilement à l'égard des verres concaves, comme il se peut voir par le troisiéme corollaire de la cinquiéme proposition, & de ce que, supposé un concave égal à un convexe, si les incidences sont égales, les refractions le seront aussi; l'une en écartant, l'autre en réünissant les rayons.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons divergens d'audelà du foyer du verre convexe.

Le foyer d'un verre convexe & la distance d'un point de divergence plus éloigné que le foyer estant connus trouver à quelle distance du verre les rayons seront ramassez.

Régle.



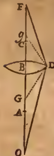
COMME la distance du point de divergence moins le foyer est au foyer, ainsi le mesme foyer est à un quatriéme terme, auquel le foyer estant ajousté vous aurez le requis.

Ou bien, comme la distance du point de divergence moins le foyer est à la distance toute entiere, ainsi le foyer est au requis.

Démonstration.

Soient les foyers G, g, & la distance du point de divergence F B; on demande B O. Par le premier corollaire de la huitiéme proposition l'angle O D G est égal à D F g; mais à cause que les distances des foyers G D, g D sont égales par le troisiéme corollaire de la troisiéme proposition, les angles O G D, D g F sont aussi égaux: donc les triangles F g D, D G O sont semblables; & partant comme F B — g B est à g B ou g D (lesquelles sont sensiblement égales à cause des petites incidences) ainsi G B ou son égale G D

est à G O, à laquelle ajoustant le foyer G B on aura B O que l'on demande.



Ou bien, comme F B — g B est à F B ou F D son égale, ainsi G B ou G D est à O B ou O D que l'on cherche.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que les rayons venant du double du foyer, sont ramassez à la mesme distance.

Deuxiéme Corollaire.

Il s'ensuit comment on peut trouver le juste foyer d'un verre par le moyen de la peinture d'un objet proche dont la distance soit connuë. Car puis que l'angle O D G est égal à F, si on fait D O G commun, les triangles D O G, F O D seront semblables: donc comme F O distance entre l'objet & la peinture, est à F D ou F B distance entre l'objet & le verre; ainsi DOou B O distance entre le mesme verre & la peinture, est à G D ou G B foyer requis.

Notez que le meilleur moyen de trouver le foyer d'un verre par la peinture, est de recevoir celle du soleil sur un papier gris, lors qu'il passe quelques nuages entrecoupez, si c'est un grand verre; car aux petits on le trouve facilement par la peinture des objets un peu éloignez & éclairez, mais il ne faut pas que le verre soit fort découvert.

Un autre moyen pour les grands verres est avec un oculaire un peu fort, en regardant la lune, lors qu'elle n'est pas pleine ou quelque moindre planette, ou mesme les étoiles fixes.

Troisiéme Corollaire.

Il s'ensuit de plus comment connoissant le foyer d'un verre, & sçachant la distance du verre à la peinture, on trouvera la distance de l'objet au verre. Car en renversant la premiere regle, le foyer qui est connu se trouve moyen proportionnel entre deux termes dont le premier est donné; donc comme la distance de la peinture au verre est au foyer, ainsi le foyer est à un quatriéme terme, lequel augmenté du foyer, donnera la distance entre le verre & l'objet.

On peut juger par cette regle que la distance de l'objet ne doit pas estre excessive à comparaison du foyer; car quelle partie le foyer est de la distance F g, telle partie le prolongement G O est du mesme foyer, & partant devient insensible quand la distance de l'objet est trop grande à comparaison du foyer; d'où vient que pour trouver le foyer d'un petit verre, il n'est pas nécessaire de choisir un objet fort éloigné, d'autant que la difference devient bientost insensible.

DIXIE'ME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons divergens d'audeçà du foyer d'un verre convexe.

Le foyer d'un verre convexe, & la distance d'un point de divergence plus proche que le foyer estant connus, trouver à quelle distance le rayon devenu moins divergent iroit concourir avec l'axe s'il estoit prolongé.

IL est clair de ce que dessus, que le verre convexe ramasse les rayons qui viennent d'un point audelà du foyer, & qu'il rend paralleles ceux qui viennent du foyer mesme; mais qu'il laisse encore divergens ceux qui viennent

nent de plus prés, diminuant ſeulement leur divergence, & les diſpoſant comme s'ils venoient d'un point plus éloigné ; & c'eſt ce point que l'on cherche, & que j'appelleray derniere divergence, au lieu que la premiere divergence eſt la diſtance entre le point premierement donné & le verre.

Les figures repreſentent trois cas. Au premier le point F de premiere divergence eſt au milieu de B*g* diſtance du verre au foyer, & alors le point P de derniere divergence tombe en *g*. Au ſecond & troiſiéme F eſt audeſſous du milieu & audeſſus, ſuivant quoy P eſt auſſi audeſſous ou audeſſus de *g* : mais la pratique & la démonſtration ſont toutes ſemblables.

Régle.

Comme le foyer moins la premiere divergence eſt au foyer, ainſi le foyer eſt à un quatriéme terme, duquel le foyer eſtant oſté reſte la ſeconde divergence.

Ou bien, comme le foyer moins la premiere divergence eſt au foyer ; ainſi la premiere divergence eſt à la ſeconde.

Démonſtration.

Soit F D le rayon incident venant du point F, dont la diſtance F B ou F D ſoit connuë, auſſibien que la diſtance des foyers B*g* ou BG, & ſoit D O le rayon rompu prolongé en P. L'angle O D G, qui eſt égal à DFB par le premier corollaire de la huitiéme propoſition, eſt auſſi égal aux deux angles D G P, D P G pris enſemble ; mais l'angle D F B eſt égal à l'angle D*g*F ou D G P + F D*g* ; donc les angles D P G & F D*g* ſont égaux, & ainſi les triangles D P G, F D*g* ſont ſemblables ; donc *g*F | *g*D || GD | GP, c'eſt-à-dire, *g*F | *g*B || GB | GP, qui eſt la premiere régle.

Pour la ſeconde régle, il faut conſiderer les triangles PFD, DF*g*, qui ſont ſemblables, puis que l'angle obtus F eſt commun & que les angles F D*g*, F P D ſont égaux, comme on l'a démontré cy-devant, donc *g*F | *g*D || FD | PD, c'eſt-à-dire, *g*F | *g*B || FB | PB. Ce qu'il faloit démontrer.

ONZIÉME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons convergens ſur un verre convexe.

Sçachant les foyers d'un verre convexe & la premiere convergence d'un rayon incident, trouver ſa derniere convergence, ou ſon concours avec l'axe.

CETTE propoſition n'eſt autre que la précedente renverſée : car poſé O D pour rayon incident avec une convergence qui iroit en P, le concours ſe fera ſuivant la régle qui ſuit. *Voyez la figure précedente.*

Régle.

Comme la premiere convergence augmentée du foyer eſt au foyer ; ainſi la la premiere convergence eſt à la ſeconde.

Démonſtration.

Il s'enſuit des démonſtrations de la propoſition précedente que les trian-

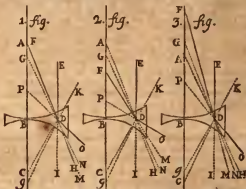
gles G D P, D F P sont semblables, l'un & l'autre estant semblable au triangle D F g; donc P D | D G || P F | F D & en composant P D + D G | D G || P F + F D | F D, c'est-à-dire, P G | D G ou G B || P B | F D ou F B; ce qu'il falloit prouver.

DOUZIÉME PROPOSITION.

Si un rayon venant d'un point de l'axe F tombe sur un verre concave dont les centres soient A, C, sa totale refraction M D O sera toûjours égale à ÷ A D K.

Démonstration.

I. Cas. SOIT le point de divergence F mesme que le centre. Le rayon droit A D M tombant par l'hypothese sur la perpendiculaire A D H, il n'y aura point de refraction à l'entrée du verre, mais seulement à la sortie, laquelle refraction sera M D O égale à ÷ H D C ou A D K.



II. Cas. Soit F plus proche du verre que le centre A. La premiere refraction M D N est égale à ÷ A D F, donc N D H est égal à ÷ A D F: mais la derniere refraction N D O est égale à ÷ N D H + ÷ H D C ou A D K, ou bien N D O est égal à ÷ A D F + ÷ A D K; ostant donc M D N égal à ÷ A D F, il restera M D O égal à ÷ A D K.

III. Cas. Soit F plus loin du verre que le centre A. La premiere refraction M D N est égale à ÷ A D F, mais la derniere refraction N D O est égale à ÷ N D M + ÷ M D C, ou bien N D O est égal à ÷ A D F + ÷ M D C ou F D K: ajoustant donc M D N égal à ÷ A D F, on aura M D O égal à ÷ A D F + ÷ F D K, c'est-à-dire, M D O égal à ÷ A D K.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que posé deux rayons l'un E D parallele à l'axe, & l'autre oblique F D venant d'un point de l'axe, la totale refraction I D N de la parallele E D sera toûjours égale à M D O totale refraction de F D; car l'une & l'autre est toûjours égale à ÷ A D K dans les précedentes figures.

Deuxiéme Corollaire.

Ayant prolongé N D en G qui est le foyer, & O D en P. Puis que l'angle I D N est égal à M D O, l'angle D G B sera toûjours égal à l'angle F D P.

Donc ayant pris Bg égale à la distance du foyer BG & tiré gD, les triangles FDg, FPD, ayant les angles DgF, PDF égaux & l'angle DFg commun, seront semblables; mais aussi à cause de l'angle DPG commun, & des angles PDF, DGP égaux, les triangles PDF, PGD seront semblables; donc les triangles FDg, PDG seront semblables.

TREIZIE'ME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons divergens qui tombent sur un verre concave.

Régle.

COMME la distance entre le verre & le point de divergence augmentée du foyer est au foyer, ainsi le foyer est à un quatriéme terme, lequel estant osté du foyer, il restera la distance entre le verre & le point de plus grande divergence.

Démonstration.

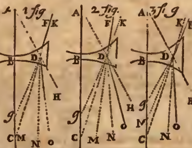
Par le deuxiéme corollaire de la proposition précedente, posé FD rayon divergent, les triangles FDg, PDG sont semblables; donc comme Fg est à gD, ainsi GD est à GP, ou bien comme Fg est à gB, ainsi GB est à GP; donc ayant osté GP du foyer GB, on aura PB distance du point, auquel OD prolongé iroit concourir avec l'axe. *Voyez la figure précedente.*

QUATORZIE'ME PROPOSITION.

Si un rayon convergent tombe sur un verre concave, sa totale refraction sera toûjours égale à l'angle du foyer de mesme que pour les divergens.

SI le rayon convergent tend au foyer, il est clair qu'il deviendra parallele à l'axe. *I. Cas.*

S'il tend à un point plus proche que le foyer, il deviendra moins convergent, & alors pour prouver ce qui est requis, il ne faut que renverser les deux dernieres figures de la douziéme proposition,& prendre ODP pour la premiere convergence & MDF pour la derniere; car il est manifeste que l'angle PDF sera toûjours égal à l'angle DGB, soit que DF tombe au-dessous de G, ce qui arrivera lors que P sera plus proche que la moitié du foyer, comme dans la deuxiéme figure, soit qu'il tombe au-dessus comme dans la troisiéme figure. *II. Cas.* *Voyez la figure précedente.*



Mais enfin, si le rayon tend à un point plus éloigné que le foyer, il deviendra divergent. Soient dans ces trois figures suivantes les centres AC, l'incidence D, la premiere refraction MDN, & la seconde NDO, & le foyer g. *III. Cas.*

Démonstration.

Soit dans la deuxiéme figure FD au dessus de DK. La premiere refraction

MDN est égale à ÷ ADF, la seconde NDO est égale à ÷ CDN, ou bien à ÷ ADF + ÷ FDK : donc MDO est égal à ÷ ADK.

Soit dans la troisiéme figure FD au-dessous de DK. La premiere refraction MDN est égale à ÷ ADF, la seconde NDO est égale à ÷ MDN — ÷ FDK, ou bien à ÷ ADF — ÷ FDK, c'est-à-dire, MDO est égal à ÷ ADK.

Dans la premiere figure FD estant la mesme que KD, l'angle FDK est nul; ainsi il est clair que MDO est égal à ÷ ADK. Or toûjours l'angle du foyer DgB, qui est égal à la totale refraction de la parallele à l'axe, est aussi égal à ÷ ADK, par la cinquiéme proposition : donc MDO est égal à DgB, ce qui estoit à prouver.

QUINZIE'ME PROPOSITION.

Probleme pour les rayons convergens qui tombent sur un verre concave.

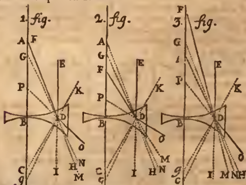
I. Cas. SI le rayon tend à un point de l'axe plus proche du verre que le foyer, on trouvera ainsi sa moindre convergence.

Régle.

Comme la distance entre le point de la premiere convergence & le foyer plus proche, est au foyer ; ainsi le foyer est à un quatriéme terme, duquel le foyer estant osté, il restera la distance entre le verre & le point de moindre convergence.

Démonstration.

Ayant renversé ces figures & posé OD rayon incident avec convergence en P, il sera détourné en F par le deuxiéme cas de la proposition précedente : mais par le deuxiéme corollaire de la douziéme proposition les triangles PDG, FDg sont semblables, donc PG | GD || Dg | gF, dont ayant osté gB, on aura BF que l'on demandoit.



II. Cas. Si le rayon incident tend à un point de l'axe plus éloigné que le foyer, on trouvera de cette maniere le point opposé à sa divergence.

Régle.

Comme la distance entre le point de premiere convergence & le foyer, est au foyer ; ainsi le foyer est à un quatriéme terme, auquel le foyer estant ajousté on aura la distance entre le verre & le point de divergence opposée.

Démonstration.

Démonstration.

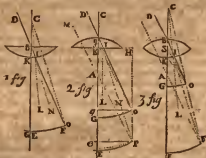


Soit M D rayon incident & tendant en F, lequel par refraction soit détourné en O & devenu divergent, & que O D prolongé tombe en P. L'angle O D F est égal à D F g + D P G, mais O D F est égal à D G B par la quatorziéme proposition, donc D G B est égal à D F g + D P G; mais D G B est égal à G D P + D P G & ainsi D F g est égal à G D P; mais d'ailleurs les angles D g F, P G D sont égaux; donc les triangles D g F, P G D sont semblables & partant F g | g D || D G | G P, auquel ajoustant G B on aura P B que l'on demandoit.

SEIZIÉME PROPOSITION.

Les rayons paralleles entre eux, mais obliques à l'axe ont aussi leurs foyers obliques en mesme distance du verre que le foyer principal, pourveu toutefois que l'obliquité soit petite.

SOit en premier lieu un verre plan-convexe duquel la surface plate soit anterieure, & soit un rayon oblique incident D B, qui entrant dans le verre diminuëra son inclinaison du tiers de l'incidence D B C suivant la ligne B I N, & ainsi feront tous les autres rayons qui luy seront paralleles; si donc I. Cas.



on tire par le centre C un axe oblique C O qui leur soit parallele dans le verre, c'est-à-dire, à B I & qu'on prenne le point O à distance du diamétre hors le verre, il est clair que ce sera leur foyer en mesme distance que le foyer principal G, & tous les autres foyers obliques seront dans la courbure d'une concavité G O décrite sur le centre C.

Soit en second lieu le verre plan-convexe, duquel la convexité reçoive le rayon D B incliné à l'axe, si par le centre A on tire M A parallele à D B, considerant M A comme axe: il est clair que s'il n'arrivoit point d'autre refraction le rayon D B & tout autre qui luy est parallele concourroit avec M A prolongé en F suivant la ligne B I N, que je suppose sesqui-diamétre: mais à cause de la seconde refraction faite en I par la surface plate, le concours F sera approché en O du tiers de la perpendiculaire F H, qui n'est plus courte que E K, sinon du sinus verse de F A E que nous avons supposé petit; donc K G n'est pas plus grande que H O, sinon des deux tiers du sinus verse de l'angle d'inclinaison du rayon oblique, ce qui ne peut pas estre sensible: ou si vous voulez tous II. Cas.

les points E, F & tous autres semblables determinez par la premiere refraction estant dans un arc décrit sur le centre A, aussi les foyers G, O & tous autres sont dans une surface qui est en effet courbe, mais moins que E F, comme si toutes les perpendiculaires à la base d'un segment avoient toutes esté retranchées d'un tiers.

Soit en troisiéme lieu un verre convexe des deux costez B K, duquel soient les centres A, C, le foyer principal G, & D B rayon oblique, auquel par le centre A soit tiré M A parallele. Alors s'il n'arrivoit point d'autre refraction, le rayon D B & tout autre qui luy est parallele concourreroit avec l'axe oblique M A prolongé en F, à la distance du sesqui-diamétre: mais à cause de la seconde refraction ce concours F est approché, & pour le trouver il faut tirer au centre C la ligne C F, qui sera comme un nouvel axe perpendiculaire à la seconde surface, & dans laquelle sera pris le point O en mesme distance que G, lequel point sera le foyer oblique de tous les rayons.

On suppose que l'obliquité soit petite, autrement la refraction devenant trop grande le concours s'approcheroit, & M A qui à l'égard de la premiere refraction tient lieu d'axe se trouvant trop éloignée des rayons obliques, le mesme arriveroit que si aux rayons droits on donnoit une trop grande ouverture.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que les foyers qui sont peu éloignez du principal, sont tous avec luy sensiblement dans un mesme plan perpendiculaire à l'axe: car si d'une courbure on prend une tres-petite partie, elle est sensiblement platte.

Second Corollaire.

De ce qui a esté dit, on peut facilement expliquer comment par le moyen d'un verre convexe se peut faire la peinture des objets dans un lieu où il n'entre point d'autre lumiere que par le verre: & pourquoy le point bruslant des verres convexes est le lieu où se fait la peinture distincte du soleil, qui est plus ou moins grande à mesure que le verre est moins ou plus convexe.

Troisiéme Corollaire.



Si l'épaisseur du verre estoit insensible, l'angle d'incidence sur le verre seroit toûjours égal à l'angle d'émersion. J'appelle icy angle d'incidence celuy qui est compris des deux lignes qui viennent des extrémitez de l'objet au milieu du verre, & angle d'émersion celuy qui est compris des deux lignes qui sont tirées du milieu du verre aux extrémitez de la peinture. Soit l'axe A C, l'objet D A F, le verre B, & la peinture G C E: le rayon oblique D B entrant dans le verre se plie vers B C, mais il est incontinent redressé en sortant, si-bien que les angles opposez demeurent égaux: donc comme la grandeur de l'objet est à la distance entre l'objet & le verre, ainsi la grandeur de la peinture est à sa distance jusqu'au verre.

Quatriéme Corollaire.

Il s'ensuit que les peintures ou foyers ont égale lumiere quand les ouvertures des verres sont comme les foyers, si ce n'est que la confusion qui se trouvera plus grande aux petits en élargira un peu le foyer: mais cela negligé les lumieres se trouvent renfermées dans des espaces qui leur sont proportionnels & également multipliez.

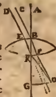
DIX-SEPTIE'ME PROPOSITION.

L'épaisseur d'un verre convexe ou plan convexe dont la convexité est vers l'objet, rend toûjours l'angle d'émersion plus grand que celuy d'incidence. Il n'arrive rien au plan convexe pour l'épaisseur quand le plat est vers l'objet.

SOIT l'épaisseur du verre B K, le demi-angle d'incidence A B C, le foyer principal G, l'oblique O, & l'angle d'émersion G K O.

Préparation.

Le rayon rompu K O vient nécessairement de quelqu'un des paralleles à C B, posons que ce soit D E, qui par la refraction tombe en K, de mesme que C B est détourné en F pour enfin concourir en O.



Démonstration.

C B, D E sont paralleles, donc B F, E K sont convergens vers F, K, & l'angle E K B est plus grand que F B K; considerant donc F B comme rayon incident en B, l'incidence F B K estant moindre que B K E, le rayon B C sera moins éloigné de la perpendiculaire que K O, donc G K O est plus grand que A B C; donc comme A C est à A B, ainsi G O est à quelque chose de plus que G K, ce que nous determinerons dans la suite.

DIX-HUITIE'ME PROPOSITION.

Probleme. Estant connu le diamétre & l'épaisseur d'un verre plan-convexe, trouver la distance du foyer hors le verre.

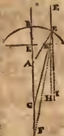
DANS la premiere proposition aussi-bien que dans les régles suivantes on a négligé l'effet de l'épaisseur qui peut néanmoins estre sensible, principalement aux petits verres.

Or il est évident, que si la surface platte est faite anterieure, c'est-à-dire, tournée vers l'objet, l'épaisseur n'apporte aucun changement, & que le foyer est justement à la distance d'un diamétre hors le verre: mais soit la convexité faite anterieure.

Régle.

Ostez du diamétre de la convexité les ÷ de l'épaisseur, & il restera la distance du foyer hors le verre du costé de la surface platte.

A est le centre de la convexité, B K est l'épaisseur du verre, E E est un rayon parallele à l'axe & prolongé en I, I E D est la premiere refraction, en sorte que E D prolongé en F fait F ÷ de B A E premiere incidence; D H est perpendiculaire à la seconde surface au point de la seconde incidence D: H D F est la seconde incidence, & partant F D G est la seconde refraction égale à ÷ H D F ou à un demi angle F.



Démonstration.

F D G | F || 1 | 2: donc F G | G D, ou bien F G | G K || 1 | 2; & en composant F G + G K | G K || 3 | 2; c'est-à-dire 3 demidiamétres + B K sont à K G foyer requis, comme 3 à 2. Donc ostant ÷ du premier & troisiéme terme deux demidiamétres + ÷ B K | K G || 2 | 2. Et à compter depuis B, le foyer G surpassera le diamétre de ÷ de B K.

DIX-NEUVIÉME PROPOSITION.

Les diamétres des convexitez & l'épaisseur du verre estant donnez, trouver la distance du foyer hors le verre convexe des deux costez.

Régle.

COMME la somme des deux sesquidiamétres, moins l'épaisseur du verre, est au sesquidiamétre de la premiere convexité aussi moins l'épaisseur; ainsi le diamétre de la seconde convexité est à la distance du foyer hors le verre.

Soit A le centre de la premiere convexité, C centre de la seconde, BK l'épaisseur du verre, EE rayon incident parallele à l'axe & prolongé en I, IEF ou F premiere refraction, FDG seconde refraction.



Démonstration.

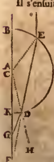
F = $\frac{1}{3}$ BAE, mais HDF = F + C, donc FDG estant $\frac{1}{2}$ HDF, sera = $\frac{1}{6}$ BAE + $\frac{1}{2}$ C; ainsi F + FDG = $\frac{1}{2}$ BAE + $\frac{1}{2}$ C. Mais F + FDG = DGC, donc DGC = $\frac{1}{2}$ BAE + $\frac{1}{2}$ C; donc 2 DGC = BAE + C. Mais BAE = 3 F, donc 2 DGC = 3 F + C: & comme 3 F + C | C || 2 G | C, c'est-à-dire, comme 3 CD + DF | DF || 2 CD | DG; ou comme trois demidiametres de la seconde convexité + trois demidiametres de la premiere — BK est à DF, qui est égal à BF — BK; ainsi 2 CD est à KG.

Premier Corollaire.

L'on verra par le calcul que les verres de convexité inégale ont le foyer plus loin du costé de la surface plus convexe; en sorte que lors que l'inégalité est tres-grande & approche du plan-convexe, alors la différence approche des $\frac{2}{3}$ de l'épaisseur: mais tant que le plus grand diamétre n'excede pas le moindre de plus de $\frac{1}{10}$, la différence des foyers est insensible. Or ce qui fait la différence des foyers du verre inégalement convexe, est que l'accourcissement du foyer vient principalement de l'épaisseur comparée avec la premiere convexité.

Second Corollaire.

Il s'ensuit aussi du calcul, que pour les verres d'égale ou presque égale convexité, si l'épaisseur BK est moindre que la moitié du foyer calculé sans l'épaisseur, alors KG distance du foyer hors le verre, se trouve d'environ $\frac{1}{3}$ de l'épaisseur plus courte que ce que le calcul produiroit par la regle de la troisiéme proposition où l'épaisseur est negligée: pour donc abreger on peut se servir de la regle donnée à la deuxiéme proposition, & oster du produit $\frac{1}{3}$ de l'épaisseur.



Troisiéme Corollaire.

Il s'ensuit aussi qu'une sphere de verre porte son foyer hors de soy à la distance du quart du diamétre; ce qui se peut aussi démontrer en particulier, car BF | FK || BE | KD; si donc BE est 3, KD & partant l'angle KCD sera 1: mais aussi F est 1; donc HDF est 2, & partant GDF est aussi 1; donc DG, GF, ou KG, GF sont parties égales de KF demidiamétre de la sphere.

VINGTIÉME

VINGTIE'ME PROPOSITION.

Les diamétres des convexitez & l'épaisseur du verre estant donnez, trouver la juste longueur du foyer proportionnée aux effets du verre.

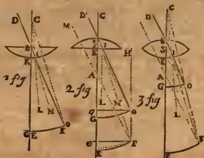
IL est clair par ce qui a esté démontré, qu'il n'arrive rien aux plano-convexes à cause de l'épaisseur, quand le plat est tourné vers l'objet, car les rayons demeurant paralleles dans le verre, l'angle d'émersion est égal à celuy d'incidence & le foyer à la distance du diamétre.

Régle pour les plano-convexes, quand la convexité est tournée vers l'objet, ou est anterieure.

Ajoustez au foyer hors le verre les $\frac{2}{3}$ de l'épaisseur ou prenez le diamétre de la convexité, & vous aurez la longueur du foyer d'un verre, qui sans épaisseur sensible fera le mesme effet que le donné avec son épaisseur.

Démonstration.

Dans la deuxiéme figure soit tirée O S parallele à F A ou D B. E K = 3 semidiamétres — B K; donc son tiers E G = 1 semidiamétre — $\frac{1}{3}$ B K: mais E A = 2 semidiamétres: donc G A = 1 semidiamétre + $\frac{1}{3}$ B K. Mais A S = F O, ou G E, ou 1 semidiamétre — $\frac{1}{3}$ B K; donc G S = 1 diamétre. Et d'ailleurs l'angle G S O pris pour émersion est égal à l'incidence de D B; donc le



verre dans cette situation, nonobstant cette épaisseur, fait la peinture G O de mesme grandeur qu'un verre sans épaisseur qui auroit mesme convexité; c'est-à-dire, que quoy que le foyer hors le verre soit accourci, la peinture demeure néanmoins de grandeur juste.

Régle pour les convexes des deux costez.

Comme le sesquidiamétre de la convexité anterieure, plus le demidiamétre de la seconde, moins l'épaisseur du verre

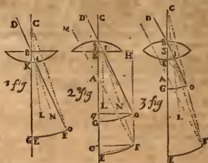
Au mesme demidiamétre de la seconde convexité, plus la distance du foyer hors le verre:

Ainsi la somme des demidiamétres des convexitez, moins l'épaisseur

A un quatriéme terme, lequel osté du second terme, donnera la juste longueur du foyer requise.

Démonstration.

Dans la troisiéme figure soit marquée l'épaisseur B K, tirée O S parallele à F A ou D B, & joints O K pour faire l'angle d'émersion G K O. Prenant O S G pour émersion qui est égal à C B D, si on faisoit un verre également convexe sur G S, qui n'eust aucune épaisseur sensible, il auroit sa peinture égale à G O,



& feroit partant mesme effet à cét égard que le proposé avec son épaisseur B K. Or à cause de la parallele O S à la base F A dans le triangle F C A, comme F C | O C, ou comme E C | G C || A C | S C; appliquant les termes de cette proportion à ceux de la régle, on trouvera qu'ils expriment la mesme chose. J'appelleray donc G S le foyer correct.

Premier Corollaire.

On verra par ce calcul que ce quatriéme terme qui donne le foyer d'équivalence juste, est toûjours plus grand que celuy qui viendroit par la régle generale où l'on néglige l'épaisseur; & qu'ainsi l'épaisseur fait faire aux verres l'effet d'un plus long qui seroit sans épaisseur sensible, & cét excés aux verres d'égale convexité est toûjours d'autant pardessus le demidiamétre, que le foyer hors le verre estoit diminué à cause de l'épaisseur: ainsi aux verres ordinaires où le foyer K G est moindre d'un sixiéme de l'épaisseur, le juste foyer excede le demidiamétre d'un sixiéme de l'épaisseur.

Deuxiéme Corollaire.

Et aux spheres de verre où le foyer hors le verre est moindre que le demidiamétre d'un quart de l'épaisseur qui est le diamétre, aussi le juste foyer ou équivalence surpasse le demidiamétre du mesme quart; c'est-à-dire, que la boule fait le mesme effet qu'un verre sans épaisseur sensible, lequel auroit son foyer à distance des trois quarts du diamétre de la boule.

Troisiéme Corollaire.

Probleme. La largeur de la peinture & sa distance du verre estant données, trouver l'angle d'incidence.

Il faut premierement dans les précedentes figures trouver le foyer correct G S, & dans le triangle rectangle G O S sçachant les costez G O, G S, on aura l'angle G S O égal à l'incidence; & cecy est utile pour trouver la grandeur du

soleil pat sa peinture, c'est-à-dire, trouver sous quel angle il fait son Incidence sur le verre, & ainsi des autres objets. Et c'est dans ces sortes d'operations où la correction du foyer est necessaire pour estre juste à la mesure des angles visuels; mais dans les propositions suivantes elle n'est pas si necessaire, ainsi on la négligera.

VINGT-UNIE'ME PROPOSITION.

Estant joints deux verres convexes ou plano-convexes, ou menisques appartenans aux convexes dont les foyers particuliers soient connus, trouver le foyer commun qui résulte de la jonction des deux verres.

Régle.

COMME la somme des foyers est à un des foyers, ainsi l'autre foyer est au requis.

Démonstration.

Tout verre qui ramasse les rayons paralleles en un point, de quelque figure qu'il soit se réduit à un planconvexe équivalent si on fait le diamétre du planconvexe égal au foyer du verre donné. Or de deux planconvexes ensemble on peut faire un convexe des deux costez, duquel il est vray de dire que comme la somme des diamétres à un des diamétres, ainsi l'autre diamétre est au foyer; les foyers estant donc changez en diamétres, il est vray de dire que comme la somme des foyers, &c.

Corollaire.

La mesme régle est pour les concaves, & il n'y a point de difference pour la démonstration, car ils ont leurs foyers à leur maniere.

VINGT-DEUXIE'ME PROPOSITION.

Deux verres de différente espece, c'est-à-dire, dont l'un appartienne aux convexes & l'autre aux concaves, estant joints, trouver ce qui résulte de cette jonction.

Régle.

Comme la difference des foyers est à un des foyers, ainsi l'autre foyer est à un quatriéme, lequel sera veritable foyer si le verre appartenant aux convexes a prévalu, c'est-à-dire, a esté plus convexe que l'autre n'a esté concave, ou bien si son foyer a esté plus petit que celuy de l'autre. Mais si au contraire le convexe estoit plus foible, le quatriéme terme trouvé donnera la distance du foyer de divergence.

Corollaire.

Il s'ensuit que si un verre est autant convexe que l'autre est concave, ils se détruiront entierement, & feront l'effet d'un verre plat. D'où il suit comment on peut trouver le foyer d'un concave en luy appliquant divers convexes, & cela se peut aussi par reflexion.



VINGT-TROISIÉME PROPOSITION.

Probleme. Deux verres convexes ou appartenans aux convexes connus estant donnez & mis à distance connuë, qui ne soit pas si grande que le foyer du verre qu'on supposera anterieur ou premier, trouver le foyer commun.

CETTE proposition se peut résoudre par la dixiéme. Car il s'agit icy de rayons qui tombent convergens sur le second verre dont le foyer est connu, aussi bien que la distance du point de la premiere convergence, qui n'est autre que le foyer du premier verre.

Premiere Régle.

Comme la distance entre le second verre & le foyer du premier plus le foyer du second, est au foyer du second; ainsi le mesme foyer du second est à un quatriéme terme, qui estant osté de ce mesme foyer donnera la distance entre le foyer commun & le second verre.

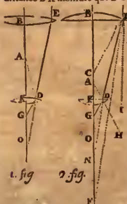
Cela est clair par la susdite proposition en faisant application des termes. Mais il ne sera pas inutile de donner la régle suivante, qui a quelque chose de plus abbregé.

Deuxiéme Régle.

Comme la somme des foyers moins la distance des verres, est au foyer du verre anterieur ou objectif moins aussi la mesme distance; ainsi le foyer du second verre est à la distance qui est entre le second verre & le foyer requis.

Démonstration.

Soient donnez les verres convexes ou appartenans aux convexes B, K, à distance B K moindre que B O longueur du foyer du verre anterieur B, & que le foyer de K soit aussi connu plus petit ou plus grand que B O foyer du premier verre. Je dis que comme le foyer de K + K O, ou comme le foyer de K + le foyer de B — la distance B K est à K O, ainsi le foyer de K est à K G foyer requis.



Les angles marquez par une seule lettre sont aigus.

Soient les verres B, K réduits à deux plano-convexes équivalens & placez comme en la deuxiéme figure à la distance donnée B K, alors le demidiamétre C E sera moitié de B O foyer du convexe anterieur, & A D aussi demi-diamétre du plano-convexe K, sera moitié du foyer du second verre K premierement donné. Puis donc qu'en la seconde figure il se fait en E deux refractions, la premiere I E F $=\frac{\cdot}{\cdot}$C, & la seconde F E D $=\frac{\cdot}{\cdot}$ I E F, & partant $=\frac{\cdot}{\cdot}$C. Il s'ensuit que E D prolongée tomberoit en O foyer de B; mais à cause que E D avant de passer le second verre, souffre deux refractions en D, l'une par la surface platte de K, sçavoir O D N, qui rétablit D N au parallelisme de E F; il est clair qu'à cause de la troisiéme refraction, le rayon E D, au lieu d'aller droit en O foyer de B, est détourné en N, en sorte que l'angle N $=\frac{\cdot}{\cdot}$C, aussi-bien que F. Et enfin ayant prolongé la perpendiculaire A D en H, la derniere refraction N D G $=\frac{\cdot}{\cdot}$H D N, mais

HDN

$HDN = A + N$, donc
$NDG = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} N$; mais
$G = NDG + N$, donc
$G = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} N + N$, ou bien
$G = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} C$: mais à cause des refractions IEO,
$O = \frac{1}{2} C$: donc
$G = O + \frac{1}{2} A$, ou $2G = 2O + A$, ainsi
comme $2O + A \mid A \mid\mid 2G \mid A$, ou
comme $2AD + DO \mid DO \mid\mid 2AD \mid DG$. Or par la construction $2AD$ $= AD$ foyer du second verre donné: donc dans la premiere figure
$AD + DO \mid DO \mid\mid AD \mid DG$, c'est à-dire
$AK + KO \mid KO \mid\mid AK \mid KG$, comme il est exprimé par la régle.

Premier Corollaire.

On verra par le calcul que le foyer commun sera toûjours plus long du costé du verre plus convexe; c'est-à-dire qu'ayant proposé deux verres inégaux, si on prend le moins convexe pour premier & l'autre pour second, le foyer sera plus long que si on prenoit le plus convexe pour premier & qu'on gardast toûjours la mesme distance des verres entre eux.

Notez qu'il n'importe où tombent les centres A, C, & qu'il se peut faire qu'ils soient transposez, & mesme que A soit au-dessus de B, & C au-dessous de K: car la démonstration est toûjours la mesme.

Notez aussi que la distance BK ordinairement comprend $\frac{1}{2}$ de l'épaisseur du verre anterieur & $\frac{1}{2}$ de celle du second, outre l'intervalle entre les verres.

VINGT-QUATRIÉME PROPOSITION.

Un verre concave estant mis entre un verre convexe & son foyer à distance connuë, en sorte qu'il reçoive les rayons paralleles, déterminer ce qui en arrivera.

JE suppose que le convexe soit anterieur, ce qui estant ainsi le probleme se réduit aux régles de la quinziéme proposition, où un verre concave reçoit des rayons convergens.

Si le foyer du convexe diminué de la distance des verres est égal au foyer du concave, c'est-à-dire, si le verre concave se trouve éloigné du foyer du convexe, d'autant justement que son propre foyer est long, ce qui est lors que les foyers concourrent, alors les rayons convergens & tendans au foyer du verre convexe, tendront aussi au foyer du concave, lequel par consequent les rendra paralleles par l'inverse de la cinquiéme proposition. *I. Cas.*

Si le foyer du convexe diminué de la distance des verres est moindre que le foyer du concave, alors parce que les rayons faits convergens par le convexe tendront à un point plus proche du concave que son propre foyer, le cas tombe dans la premiere régle de la quinziéme proposition sur laquelle est établie la suivante proportion, n'y ayant de difference que d'expression. *II. Cas.*

Régle.

Comme la distance des foyers est au foyer du concave, ainsi le foyer du concave est à un quatriéme terme, duquel le foyer du concave estant osté, on aura la distance entre le verre concave & le nouveau foyer requis.

Si le foyer du convexe diminué de la distance des verres est plus grand que le foyer du concave, ce qui arrive quand la distance entre le verre concave & le foyer du convexe est plus grande que le foyer du concave, & que les rayons qui tombent convergens sur le concave, tendent à un point au-delà du foyer du concave, le cas tombe au second de la quinziéme proposition. *III. Cas.*

HHHhh

Régle.

Comme la distance des foyers est au foyer du concave, ainsi le foyer du concave est à un quatriéme terme, auquel le foyer du concave estant ajousté, vous aurez la distance entre le verre concave & le point où les rayons devenus moins divergens iroient concourrir avec l'axe du verre convexe.

La démonstration de l'une & de l'autre régle est toute facile par l'application à celles de la quinziéme proposition.

J'ay toûjours parlé du foyer du concave, & non pas du centre; pour comprendre en un mot toutes sortes de verres appartenans aux concaves, & il en est de mesme des convexes.

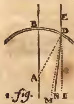
VINGT-CINQUIE'ME PROPOSITION.

La refraction qui se fait de l'air à l'eau au travers d'un verre mince quoy que courbe, est tout de mesme que si elle se faisoit immediatement de l'air à l'eau.

IL s'agit icy de l'effet d'un verre convexe & concave sur un mesme centre, mais avec fort peu d'épaisseur, en sorte que les deux surfaces ne sont presque qu'une, qui se considere d'un costé comme convexe & de l'autre comme concave, & où il n'y a qu'une mesme perpendiculaire pour l'incidence & pour l'émersion.

On suppose que l'on sçait par l'experience que la mesure de la refraction de l'air à l'eau est comme 4 à 3, ou comme 3 à $2\frac{1}{4}$, mais celle de l'air au verre est comme 3 à 2; donc celle de l'eau au verre est comme $2\frac{1}{4}$ à 2 ou comme 9 à 8.

Soit donc dans la premiere figure B D une bouteille de verre pleine d'eau; A le centre de B D, E D rayon oblique incident prolongé en I; I D M premiere refraction & M D N seconde refraction. Passant de l'air au verre, la refraction IDM $= \frac{1}{3}$ I D A; donc M D A $= \frac{2}{3}$ I D A: mais du verre à l'eau M D N $= \frac{1}{8}$ M D A ou $\frac{1}{4}$ I D M; donc si l'on oste M D N de I D M, c'est-à-dire, si du tiers I D A on oste la moitié du mesme angle I D A, il restera $\frac{1}{4}$ pour I D M, comme si la refraction avoit esté faite immediatement de l'air à l'eau.



1. fig.



2. fig

Mais de peur qu'il ne reste quelque scrupule au sujet de l'épaisseur du verre, posons dans la deuxiéme figure que la sortie du verre se fasse en G un peu distant de D & soit tirée la seconde perpendiculaire A G; alors la seconde incidence sera M G A plus grande que n'auroit esté M D A de la quantité de l'angle D A G, lequel dépend de l'épaisseur G D: donc la seconde refraction M G N estant $\frac{1}{8}$ de M G A sera $= \frac{1}{8}$ M D A $+ \frac{1}{8}$ G A D, ou $\frac{1}{4}$ I D M $+ \frac{1}{8}$ G A D: vous voyez donc que l'excés n'est que de $\frac{1}{8}$ de D A G, par lequel la convergence de G N sera un peu moindre que D N dans la premiere figure, mais insensiblement à moins que l'épaisseur ne soit fort grande.

Corollaire.

En appliquant les précedentes démonstrations à ce qui se fait dans l'air des deux costez, on verra qu'au premier cas les rayons demeureront paralleles comme si le verre avoit les deux costez plats & paralleles: mais qu'au second cas où l'épaisseur est sensible, la seconde refraction estant $\frac{1}{2}$ M G A, M D N seroit $= \frac{1}{2}$ M D A $+ \frac{1}{2}$ G A D, c'est-à-dire I D M $+ \frac{1}{2}$ G A D, & ainsi G N deviendroit divergent, ce qui n'arrive pas dans l'eau à cause du peu de refraction du verre à l'eau.

VINGT-SIXIE'ME PROPOSITION.

Probleme. Les convexitez de l'eau estant connuës trouver le foyer.

Régle.

COMME la somme des diamétres est à un diamétre, ainsi l'autre sesquidiamétre est au foyer.

Démonstration.

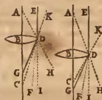
Soit B de l'eau en forme de verre convexe des deux costez, duquel on neglige l'épaisseur; & le reste comme à la troisiéme proposition.

$IDF = \frac{1}{4} C$

$FDG = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} IDF$, ou $\frac{1}{3} A + \frac{1}{12} C$.

Donc IDG ou $DGA = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} C$.

Donc $3 DGA = A + C$.



Donc en appliquant la démonstration de la troisiéme proposition,

Comme la somme des diamétres est à un diamétre, ainsi le triple de l'autre demi-diamétre est à D G, &c. Il n'importe que l'eau soit enfermée dans du verre par la precedente proposition, mais on neglige icy l'épaisseur de l'eau.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que si les convexitez sont égales, le foyer sera au $\frac{3}{4}$ du diamétre.

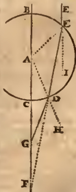
Second Corollaire.

De la démonstration de cette proposition aussi-bien que de la troisiéme, il est facile de voir que pour toutes sortes de convexes plus denses à l'égard d'un plus rare; la régle suivante est génerale.

Comme la somme des diamétres est à un diamétre, ou comme la somme des demi-diamétres à un demi-diamétre, ainsi l'autre demi-diamétre multiplié par le dénominateur de la refraction du dense au rare, est au foyer. Car les deux premiers termes demeurant toûjours les mesmes, on prend le double de l'autre demi-diamétre pour les verres convexes dans l'air; à cause que la refraction du verre à l'air est $\frac{1}{2}$, & pour l'eau dans l'air on prend le triple à cause que la refraction de l'eau à l'air est $\frac{1}{3}$ & ainsi du reste.

VINGT-SEPTIE'ME PROPOSITION.

Le foyer d'une boulle d'eau est à distance du demi-diamétre.



SOIT une boule d'eau B D dont le centre A, le rayon incident E E. Premiere refraction I E D. F point de l'axe où E D produit le rencontreroit. F D G derniere refraction, & G le foyer.

I E F ou $F = \frac{1}{4} BAE$, donc $BF =$ aux deux diametres & B E est double de C D. Donc $F = \frac{1}{2} DAC$, mais $HDF = DAC + F$ & $FDG = \frac{1}{3} HDF$, donc $FDG = \frac{1}{3} F + \frac{1}{3} DAC$, ou $FDG = \frac{1}{6} DAC + \frac{1}{3} DAC$, ou $\frac{1}{2} DAC$. Donc $F = FDG$: & ainsi DG ou $GC = GF$. Comme donc C F est diametre, C G sera demi-diametre.

Corollaire.

Il n'a point esté parlé des plans convexes, mais il est facile à démontrer que leurs foyers seront à trois demi-diamétres, à cause que la refraction de l'eau à l'air est $\frac{4}{3}$, &c. d'où il suit que les rayons divergens du sesquidiamétre sont paralleles dans la boulle.

VINGT-HUITIE'ME PROPOSITION.

Tout verre plano-convexe ou convexe estant entierement dans l'eau, a son foyer quadruple de celuy qu'il auroit dans l'air.

SOIT premierement un plano-convexe. Alors de mesme que la refraction du verre à l'air qui est $\frac{3}{2}$ a produit deux demi-diamétres de distance pour le foyer dans l'air, ainsi la refraction du verre à l'eau qui est $\frac{9}{8}$ produira huit demi-diamétres pour le foyer dans l'eau, & la démonstration est toute facile.

Soit secondement un verre convexe dans l'eau, alors par le corollaire de la penultiéme proposition, comme la somme des demi-diamétres à un demi-diamétre, ainsi l'octuple de l'autre est au foyer: or la proportion du double à l'octuple est quadruple, donc &c.

VINGT-NEUVIE'ME PROPOSITION.

Une boulle de verre estant dans l'eau fait son foyer à un diamétre & $\frac{1}{2}$ hors la boulle.

SOIENT repetées toutes les lettres de la vingt-septiéme proposition. F = $\frac{1}{8}$ B A E, donc B F = neuf semidiamétres: donc l'arc B E est à l'arc C D, ou l'angle B A E est à l'angle C A D comme neuf à sept, mais H D F = D A C + F, donc H D F = $\frac{8}{9}$ B A E, mais F D G = $\frac{1}{9}$ H D F, donc F D G = $\frac{1}{9}$ B A E, & ainsi F D G = F, c'est pourquoy C F qui vaut sept demi-diamétres, est divisée en deux également en G, donc C G vaut un diamétre & $\frac{1}{2}$.

Premier Corollaire.

Pour trouver le foyer d'une boulle de verre ou d'eau dans l'air, ou de verre dans l'eau, & generalement, il faut du nombre de semidiamétres que dénote le dénominateur de la premiere refraction, oster deux, & diviser le reste par la moitié: car, par exemple, à cause que la premiere refraction est $\frac{1}{9}$ il s'est trouvé que B F valoit neuf demi-diamétres, donc C F = sept, ce qui estant divisé par la moitié donne C G; & toûjours de mesme à proportion.

Second Corollaire.

Il s'ensuit comment on peut sçavoir la refraction d'une liqueur enfermée dans une boulle de verre de tres-petite épaisseur; car ayant doublé le foyer C G on trouve C F, auquel ayant ajousté B C, la somme B F divisée par A D dénotera la proportion de la refraction de l'air à ladite liqueur.

TRENTIE'ME PROPOSITION.

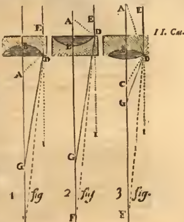
Si un verre plano-convexe a la convexité dans l'eau & le costé plat dans l'air, le foyer sera à trois diamétres de la convexité.

JE suppose que la surface de l'eau soit plate & parallele à celle du verre.

Que les paralleles tombent du costé de l'eau comme en la premiere figure, &c. F ═ ÷ B A D, mais F D G ═ ÷ F ou ÷ B A D, donc D G A ═ ÷ B A D, donc A D | D G || 1 | 5 ou G B ═ 6 A D. *I. Cas.*

Que les paralleles tombent sur le verre. F ═ ÷ D A B de mesme F D G ÷ F ou ÷ D A B, donc G comme dessus est ═ ÷ D A B, &c. *II. Cas.*

Je suppose toûjours que l'épaisseur est negligée.



Corollaire.

De-là il s'ensuit un moyen tres-facile de prolonger le foyer d'un plano-convexe donné en y appliquant quelque liqueur enfermée entre le plano-convexe & un autre verre tout plat, qu'on aura examiné avant que d'infuser la liqueur pour voir s'il ne varie point le foyer du plano-convexe donné & suivant que cette liqueur aura plus de refraction que l'eau (comme l'eau forte, l'esprit de therebentine, &c.) aussi le prolongement sera-t-il plus grand.

TRENTE-UNIE'ME PROPOSITION.

Un verre convexe des deux costez, estant d'un costé dans l'air & de l'autre dans l'eau trouver le foyer dans l'eau.

SOIT le verre B dont les centres A C, comme en la troisiéme figure, & que l'air soit dessus & l'eau dessous, &c. on demande B G foyer dans l'eau.

Régle.

Comme la somme des demi-diametres A B, B C, plus le double de A D duquel la convexité est dans l'eau, est à B C semi-diametre de la convexité anterieure qui est dans l'air, ainsi l'octuple de A D est à B G.

F ═ ÷ C de mesme F D G ═ ÷ C + ÷ A. Donc G ═ ÷ C + ÷ A, donc 8 G ═ 3 C + A, & comme 3 C + A | A || 8 G | A, ou comme 3 A D — C D | C D || 8 A D | D G.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que le verre de convexité égale auroit icy le foyer dans l'eau à un diamétre de la convexité. Mais si on demande le foyer dans l'air, il sera suivant cette proportion, Comme la somme des demi-diamétres augmentée du double de celuy dont la convexité est dans l'eau, est au mesme, ainsi le sextuple de l'autre est au foyer dans l'air. Car alors F ═ ÷ C, de mesme F D G ═ ÷ C + ÷ A, donc G ═ ÷ C + ÷ A, donc 6 G ═ C + 3 A, donc A D + 3 D C | D C || 6 A D | D G.

Deuxiéme Corollaire.

De cette maniere le foyer d'un verre également convexe seroit dans l'air à $\frac{1}{2}$ du diamétre.

TRENTE-DEUXIE'ME PROPOSITION.

Trouver la refraction d'une liqueur Diaphane à l'égard de l'air.

Premier Moyen.

AYEZ un petit verre également convexe des deux costez dont vous sçachiez parfaitement le foyer dans l'air, puis prenez la longueur exacte de son foyer dans la liqueur donnée : doublez le foyer trouvé dans la liqueur, & divisez le produit par le foyer dans l'air, le quotient donnera la refraction du verre à ladite liqueur. Par exemple, ayant doublé le foyer d'un verre dans l'eau, je trouve que ce produit contient huit fois le foyer du verre dans l'air, d'où je conclus que la refraction du verre à l'eau est $\frac{8}{9}$ de l'incidence & la mesure est comme 8 à 9; ce qui est fondé sur la regle generale, que comme un demi-diamétre est à la somme des demi-diamétres, ainsi le foyer est à l'autre demi-diamétre multiplié par le dénominateur de la refraction du dense au rare, & pour faciliter j'ay supposé les demi-diamétres égaux.

Deuxiéme Moyen.

Le moyen précedent est fort simple, mais à moins d'avoir une liqueur en grande quantité on ne se peut servir que de petits verres, autrement le foyer iroit trop loin & ne seroit pas terminé dans la liqueur.

Soit dans un plano-convexe disposé comme à la premiere figure de la trentiéme proposition & que la liqueur donnée soit mise entre deux verres, comme il a esté dit au corollaire. Observez à quelle distance le verre portera son foyer G. Augmentez cette distance de la moitié, pour avoir BF que vous diviserez par le demi-diamétre, & vous aurez le terme de la refraction de ladite liqueur au verre. Puis divisez BG par AD semi-diamétre de la convexité pour avoir la proportion de AB à BG qui s'exprimera par une fraction, laquelle fraction vous diviserez par trois, & le double du produit donnera l'angle F qui est la refraction de ladite liqueur au verre. Exemple. J'ay trouvé qu'ayant mis de l'eau entre les verres, le foyer estoit sextuple du demi-diamétre : je prens donc le tiers d'un sixiéme, ce qui fait $\frac{1}{18}$ dont le double est $\frac{1}{9}$ pour la refraction de l'eau au verre.



Si vous tourniez le verre comme en la seconde figure, il faudroit pour agir démonstrativement considerer la chose d'une autre maniere, & l'on trouveroit la refraction du verre à la liqueur donnée. Mais la premiere pratique est plus facile, & d'ailleurs, puis que G est à distance égale de part & d'autre, il n'importe comme le verre soit tourné, &

mesme l'épaisseur sera toûjours moins considerable dans la maniere de la premiere figure.

Ayant donc la refraction ou plûtost la mesure des refractions de ladite liqueur au verre, ou au contraire, il sera facile de la trouver à l'égard de l'air, suivant ce qui a esté dit avant la premiere proposition.

Par cette mesme maniere on peut trouver la refraction du vuide à l'air ou plûtost la proportion des refractions de l'atmosphere, faisant que l'espace entre deux verres soit vuide, ce qui sera facile si cét espace estant bien fermé de tous costez a communication seulement avec le haut d'un tuyau où se fera le vuide, & mesme il ne seroit pas difficile d'en tirer la hauteur de l'atmosphere, aprés avoit fait une table des refractions à l'égard des incidences dans l'air ou dans le vuide.

TRENTE-TROISIE'ME PROPOSITION.

Estant donné le point de divergence d'un rayon qui tombe sur un verre dans l'eau, trouver la convergence ou divergence dans l'eau.

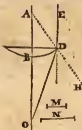
IL faut suivre les mesmes regles que pour le verre dans l'air, car le foyer du verre dans l'eau sera toûjours moyen proportionnel, & cela vient de ce que l'angle F est icy égal à l'angle G D O aussi-bien que dans l'air, car de mesme qu'un tiers plus un demi tiers font un demi pour les refractions du verre dans l'air, ainsi $\frac{1}{9}$ plus $\frac{1}{8}$ d'un neuviéme ou $\frac{8}{72} + \frac{1}{72}$ font $\frac{1}{8}$. Pareillement pour l'eau dans l'air $\frac{1}{4}$ plus $\frac{1}{3}$ de quart ou $\frac{1}{12}$ font $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, que les deux refractions qui se font, par exemple, de l'air au verre convexe des deux costez & du mesme verre en l'air, ne valent pas plus que si le rayon parallele sortoit immediatement du verre & de mesme des autres.

Je néglige de démontrer toutes ces choses en particulier d'autant que l'application aux précedentes démonstrations en est tres-facile.

TRENTE-QUATRIE'ME PROPOSITION.

Si d'un plano-convexe plus dense dans un milieu plus rare, le costé plat est tourné vers l'objet, le rayon rompu est à la partie de l'axe depuis le centre de la convexité jusque au concours dudit rayon en raison donnée de la refraction du dense au rare, c'est-à-dire, comme 2 à 3 pour le verre dans l'air, de 8 à 9 pour le verre dans l'eau, de 3 à 4 pour l'eau dans l'air, & ainsi generalement.

SOIT le plano-convexe B D tel que dessus & sur lequel le rayon E D tombant soit rompu en O en l'écartant de la perpendiculaire A D H, & soit la mesure de la refraction du dense au rare exprimée par les lignes M, N. Je dis que comme M moindre terme est à N, ainsi D O est à A O.



Démonstration.

B A D = à l'incidence A D E, H D O est l'inclinaison du rayon rompu, donc par la nature des refractions comme M est à N, ainsi le sinus de l'angle D A O est au sinus de l'angle H D O ou A D O, & partant comme M est à N, ainsi les costez opposez D O | A O.

Corollaire.

Il s'ensuit que pour le verre dans l'air D O est à A O comme 2 à 3, & pour le verre dans l'eau comme 8 à 9, & pour l'eau dans l'air comme 3 à 4, & ainsi des autres.

Lemme. Des extrémitez d'une ligne A D, tirer deux lignes qui concourant en un point soient en raison d'inégalité donnée.

Soit A D divisée en C suivant la raison donnée M | N, en sorte que le plus grand costé soit A C duquel soit retranchée A F égale à la difference des parties A C, C D, c'est-à-dite, que CD = CF. Puis comme A F | F C | C D || D H; & du centre H & de l'intervalle H C soit décrit le cercle C G, je dis que tous les points de ce cercle, par exemple O, satisferont à la question, c'est-à-dire, que D O | A O || M moindre terme est à N plus grand, car soit tirée H O.

Démonstration.

A F | F C || C D | D H & en composant A C | F C ou C D || C H | D H & en permutant A C | C H || C D | D H & en composant A H | C H ou H O || C H ou H O | D H: donc les triangles A H O, O H D ayant l'angle H commun & les costez contenant cét angle proportionels, les autres costez A O, D O seront aussi proportionels, donc O H ou C H | D H, ou bien A C | C D || A O | D O.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que A G est à D G en raison donnée & que le point G est le plus éloigné terme exclusif de tous ceux qui satisfont à la question, car A H | H G || H G | D H, donc en composant & permutant A G | D G || H G | D H ou A C | C D.

Second Corollaire.

Il s'ensuit aussi qu'ayant tiré à A D au point D la perpendiculaire D P, qui coupe le cercle en P, la ligne P A touchera le cercle C P G; car ayant tiré P H, les triangles A P H, P D H seront semblables, & partant comme P D H est droit en D, A P H sera aussi droit en P; donc A P touchera le cercle en P.

TRENTE-CINQUIE'ME PROPOSITION.

Probleme. Estant donné un rayon incident parallele à l'axe trouver geometriquement le concours de ce rayon avec l'axe, supposé qu'il puisse passer.

SOIT E D rayon incident parallele à l'axe A B indéfiniment prolongé, & par le précedent lemme soit décrit le cercle C G qui coupe ou du moins touche en O au-dessous de B l'axe A B prolongé, je dis que O est le concours suivant la mesure de la refraction qui aura esté donnée, ce qui est clair par le lemme précedent.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que plus A D sera proche de A B, c'est-à dite, plus l'incidence sera petite & plus le concours O sera proche de G, & partant plus éloigné de B. Et si on prend B H = D G, le point H sera le terme exclusif de tous les foyers, ce qui est clair en faisant tant approcher A D de A B que D G, B H concourent.

Second

Second Corollaire.

Il s'ensuit au contraire que le point O monte vers B à mesure que l'incidence croist jusques à ce que le demi cercle C G touche l'axe; car alors on aura la plus grande refraction correspondante à la plus grande incidence, suivant la mesure donnée.

Il faut remarquer que dans la figure précedente la ligne G L doit representer un arc de cercle décrit du centre A, & que dans le corollaire précedent il faut une L où il y a une H.

Troisiéme Corollaire.

Il s'ensuit aussi qu'il y a beaucoup de rayons qui concourrent fort proche du point L, à cause que le cercle C G & l'arc L G décrit sur le centre A se touchent en G; c'est pourquoy L est pris pour le foyer, quoy qu'en rigueur geometrique aucun rayon n'y vienne que de l'axe.

Quatriéme Corollaire.

Il s'ensuit que pour le foyer il faut prendre la difference des termes de la mesure de la refraction, & dire comme la difference est au moindre des termes, ainsi le demi-diametre A D est à D G ou B L, car par le corollaire premier du lemme précedent A G est à D G comme le plus grand terme au moindre: donc en divisant, comme la difference est au moindre terme, ainsi A D est à D G ou B L.

Ainsi le foyer d'un verre plano-convexe dans l'air est à deux demi-diamétres, à cause que la mesure est de 2 à 3, car la difference des termes est au moindre, comme 1 à 2. Or ce qui est démontré du plano-convexe se peut étendre au convexe des deux costez, en réduisant une convexité en deux qui fassent le même effet: mais la démonstration n'est pas si géometrique, quoy qu'en effet il n'y ait dans l'expérience aucune difference.

TRENTE-SIXIE'ME PROPOSITION.

Pour la proportion des ouvertures des objectifs & de leurs oculaires.

LA proportion de l'objectif à l'oculaire donne la multiplication de la lunette; car l'angle visuel se trouve autant de fois multiplié, que le foyer de l'oculaire est contenu dans celuy de l'objectif. Ce qui se doit néanmoins entendre dans les petits angles. C'est-à-dire lorsque les angles sont entre eux comme leurs tangentes: car pour déterminer la chose plus exactement, il faut dire que comme le foyer de l'oculaire est à celuy de l'objectif, ainsi la tangente de la moitié de l'angle de premiere incidence est à la tangente de la moitié de l'angle visuel multiplié par la lunette. Cela même aussi suppose que la pointe de l'angle visuel, ou le lieu de la prunelle, se rencontre justement au foyer de l'oculaire: ce qui n'est pas: Car comme le foyer de l'objectif est au foyer de l'oculaire, ainsi le même foyer de l'oculaire est à ce qu'il y a de plus que le foyer de l'oculaire. Mais c'est si peu qu'on le peut négliger sans erreur.

Premier Corollaire.

Il s'ensuit que la multiplication d'une lunette s'exprime par le quotient de la division de l'objectif par l'oculaire.

Second Corollaire.

Il s'ensuit aussi que deux lunettes sont entre elles comme les susdits quotients qui donnent la proportion des angles visuels à l'égard d'un même objet.



Premier Lemme.

Si deux quantitez D, E ſont diviſées par une même A, les quotiens B, C ſeront entre eux comme les quantitez diviſées D, E. Car puiſque le rectangle ſur le quotient & le diviſeur eſt égal au diviſé, le rectange A B | rect. A C || D | E, c'eſt-à-dire B | C || D | E.

D	E
B	C
A	A

Second Lemme.

Si une même quantité A eſt diviſée par deux differentes D, E, les quotiens B, C ſeront en raiſon reciproque des diviſeurs. Car les rectangles D B, E C eſtant égaux, B ſera à C comme E à D.

Troiſiéme Lemme.

Si les diviſeurs A, B, ſont comme les diviſez D, E, les quotiens C, D ſeront égaux. Car ils exprimeront une même proportion, & les deux rectangles A C, D B eſtant comme D, E, c'eſt-à-dire comme les baſes A, B, il faut que les hauteurs C, D ſoient égales.

D	E
C	D
A	B

Quatriéme Lemme.

Si les diviſeurs A B ſont en raiſon ſous-doublée des diviſez D E, les quotients C D ſeront entre eux comme les diviſeurs.

Soit F troiſiéme proportionnelle aux diviſeurs A B, & partant comme D à E, & ſoit G le quotient de E par F. Par le troiſiéme lemme, les quotients C G ſeront égaux, & par le ſecond lemme le quotient G eſt à D comme B à F. Donc C qui eſt égal à G ſera à D, comme B à F, c'eſt-à-dire comme A à B.

D		E
C	D	G
A	B	F

Cinquiéme Lemme.

Si les diviſeurs A B ſont en raiſon ſous-triplée des diviſez D E, les quotiens C D ſeront en raiſon doublée des diviſeurs A B.

Soit D | E | A F | c'eſt-à-dire, que B ſoit à F en raiſon doublée de A à B, & que le quotient de la diviſion de E par F ſoit G, comme deſſus: les quotiens C G ſeront égaux; & d'ailleurs G ſera à D, comme B à F: donc C, qui eſt égal à G, ſera à D, comme B à F, c'eſt-à-dire en raiſon doublée de A à B.

D			E
C	D		G
A	B	*	F

Sixiéme Lemme.

Si les diviſeurs ſont en raiſon ſous-quadruplée, les quotiens ſeront en raiſon triplée des diviſeurs.

TRENTE-SEPTIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires ſont proportionnels aux objectifs, les multiplications ou approches ſeront égales. Cela ſuit du premier & du ſecond corollaire de la trente-ſixiéme Propoſition & du troiſiéme lemme.

TRENTE-HUITIE'ME PROPOSITION.

SI deux objectifs inégaux ont des oculaires égaux, les multiplications ſeront en proportion des objectifs. Cela ſuit des Corollaires de la trente-ſixiéme Propoſition & du premier lemme. J'entens que les angles viſuels, & partant les diametres des peintures dans l'œil ſeront comme les foyers des objectifs: mais les grandeurs ſuperficielles des mêmes images en ſeront en raiſon doublée.

TRENTE-NEUVIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires estant proportionnels aux objectifs, les ouvertures des objectifs sont égales, les clartez seront égales. Car par la trente-septiéme Proposition les multiplications, c'est-à-dire les angles visuels, & partant les peintures dans l'œil, seront égales: & d'ailleurs, à-cause de l'égalité des ouvertures, les images auront pareille quantité de lumiere ramassée en espaces égaux, &c.

QUARANTIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires estant égaux, les diametres des ouvertures des objectifs sont proportionnels aux mêmes objectifs, les clartez seront égales. Car par la trente-huitiéme Proposition les angles visuels seront comme les objectifs. Si donc les ouvertures sont comme les mêmes objectifs, les images dans l'œil recevront des rayons à proportion de leur grandeur; c'est-à-dire que les espaces éclairez seront proportionnels aux lumieres, & partant également éclairez.

QUARANTE-UNIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires & les ouvertures diametrales des objectifs sont en proportion des objectifs, les clartez seront en raison doublée des mêmes objectifs. Car par la trente-septiéme Proposition, les peintures dans l'œil seront égales en grandeur, & par-consequent éclairées en proportion de la quantité de lumiere qu'ils contiendront, c'est-à-dire en proportion de la grandeur superficielle des objectifs, laquelle est doublée de la diametrale.

QUARANTE-DEUXIE'ME PROPOSITION.

SI des objectifs inégaux ayant des oculaires égaux, ont aussi des ouvertures égales, les clartez seront reciproquement en raison doublée des objectifs. Car par la trente-huitiéme les images dans l'œil prises comme surfaces, seront en raison doublée. Mais d'ailleurs elles ne recevront qu'une égale quantité de rayons qui se trouvera plus unie & plus forte dans le petit espace que dans le grand, & ce en raison reciproque des espaces.

QUARANTE-TROISIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires, & aussi les diametres des ouvertures des objectifs sont en raison sous-doublée des objectifs, les multiplications ou angles visuels seront en raison aussi sous-doublée, & ces clartez seront égales. La premiere partie suit du quatriéme lemme & des corollaires de la trente-sixiéme Proposition. Or les angles visuels estant en raison sous-doublée des objectifs, & les ouvertures de-même, les espaces seront éclairez à-proportion de leur grandeur, &c.

Notez que suivant cette proportion, l'augmentation superficielle des peintures dans l'œil sera en raison des objectifs, de-même aussi que la grandeur superficielle des ouvertures des objectifs.

QUARANTE-QUATRIE'ME PROPOSITION.

SI les oculaires sont en raison sous-triplée des objectifs, & les ouvertures diametrales en raison doublée des oculaires, les angles visuels ou approches seront aussi en raison doublée des oculaires, & les clartez seront égales. La premiere partie suit du cinquiéme Lemme: Car les oculaires sont les diviseurs & les quotients répondent aux angles visuels. Puis donc que les

oculaires sont en raison sous-triplée, les angles visuels seront en raison doublée des oculaires. Et enfin, puisque par l'hypothese les ouvertures sont aussi en raison doublée des oculaires, elles seront comme les angles visuels. Partant les clartez égales : car les peintures dans l'œil estant en raison des ouvertures des objectifs, les quantitez de lumiere seront proportionnelles aux espaces où elles seront contenuës.

Des foyers qui se font par reflexion & par refraction tout ensemble.

UN verre exposé au soleil ne laisse pas passer tous les rayons, mais il en reflêchit une partie non-seulement par sa surface anterieure, mais encore par la posterieure, quoy qu'elle ne soit point terminée.

Les rayons ainsi reflêchis s'unissent ou se séparent, suivant la qualité des surfaces.

La reflexion faite par la surface anterieure est simple ; mais celle qui se fait par la posterieure est diversement modifiée par les refractions causées par la surface anterieure.

Il est facile de connoistre si un foyer de reflexion vient de la surface anterieure ou de la posterieure: car aux verres qui ne sont point menisques, tout foyer de reflexion vient de la surface posterieure. Il en est de même aux menisques, lors que les convexitez sont tournées vers le Soleil. Mais si les cavitez sont tournées vers le Soleil, il se fait alors deux foyers d'un même costé, dont le plus éloigné & par consequent le plus large & le plus foible, vient de la cavité anterieure, se faisant à distance du quart du diametre de la même cavité. Ce qui donne une facilité à connoistre ces sortes de verres. Mais lors que nous parlerons cy-aprés des foyers de reflexion, nous entendrons toûjours parler des foyers qui se font par la surface posterieure, qui sont faciles à connoistre.

Régles generales.

1. Si un verre ne fait foyer de reflexion que d'un seul costé, il sera menisque. La converse n'est pas veritable.

2. Si un verre fait deux foyers, l'un d'un costé & l'autre de l'autre, & que l'un soit justement à distance triple de l'autre, ce verre sera plano-convexe, le plat sera vers le plus court foyer.

Ce plus court foyer se fera au tiers de la distance du centre de la convexité : la longueur du verre sera sextuple de ce petit foyer, ou bien sera double de l'autre.

3. Si un verre fait deux foyers opposez, dont l'un soit moindre que triple de l'autre, le verre sera convexe des deux costez. Et si le quart de la somme des foyers est osté de chaque foyer, on aura deux termes qui exprimeront la raison des diametres des deux convexitez.

Mais pour trouver le foyer de refraction, il faut faire

Comme la somme des foyers de reflexion est à l'un des foyers, ainsi le double de l'autre est à $\frac{1}{2}$ du foyer de refraction requis.

Le petit foyer est toûjours vers le costé moins convexe.

Notez que si les deux foyers sont égaux, la longueur du verre est quadruple de chacun.

4. Si le grand foyer excede le triple de l'autre, le verre sera menisque. Le petit foyer sera vers la partie cave.

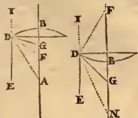


QUARANTE-

QUARANTE-CINQUIE'ME PROPOSITION.

Si la surface platte d'un plano-convexe est tournée vers le Soleil, la reflexion du fond portera son foyer à $\frac{1}{2}$ du demi-diametre.

SOIT A le centre de la convexité, ED rayon incident; F moitié de BA, ED viendra jusques au fond sans refraction, & de-là par la reflexion devroit estre porté en F: mais à-cause de la surface platte, le concours est approché du tiers de BF en G: donc $BG = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ c'est-à-dire $\frac{1}{6}$ AB. Et alors la reflexion de la premiere surface qui est platte sera égale à ladite surface, ou seulement plus grande de ce que donne la base de 30' prise à distance de GB.



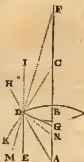
Si la convexité est vers le Soleil, la reflexion du fond aura son foyer à la distance du centre: car la premiere refraction à l'entrée de la convexité porteroit le rayon au sesquidiametre F: donc la reflexion du fond, s'il ne suivoit point de refraction, le porteroit en N à mesme distance: donc ayant prolongé ED en I, vous voyez qu'il arrivera le mesme à DN, que si venant de ID, il avoit passé à-travers un verre également convexe des deux costez, c'est-à-dire qu'il sera porté au centre G. Et alors la reflexion de la convexité sera élargie comme venant de derriere le verre à distance du quart du diametre.

Dans l'un & dans l'autre cas la reflexion du fond se trouvera toûjours au milieu de celle du dessus, si le plus épais est bien au milieu, c'est-à-dire si le centre répond à-plomb au milieu: autrement il faudra rogner le verre du costé le plus mince pour faire trouver le centre au milieu; & on se pourra regler par le moyen d'un cercle de carton appliqué sur le verre, & poussé plus ou moins de costé & d'autre, jusques à ce que la reflexion soit juste.

QUARANTE-SIXIE'ME PROPOSITION.

Le fond d'un verre également convexe porte sa reflexion à $\frac{1}{4}$ du demi-diametre.

SOIENT les centres A, C, le rayon incident ED prolongé en I, & les perpendiculaires prolongées ADH, CDK. Soit la premiere refraction IDF, à laquelle soit EDM égale: puis soit la reflexion ADN = ADM, & enfin la derniere refraction NDG = $\frac{1}{3}$ KDN.



MDA = A + $\frac{1}{2}$ C, & MDN = 2 A + $\frac{1}{2}$ C: mais KDM = $\frac{1}{2}$ C: donc KDN = 2 A + C + $\frac{1}{2}$ C. Mais NDG = $\frac{1}{3}$ KDN: donc NDG = A + $\frac{1}{2}$ C, donc KDG = 3 A + 2 C, & ayant osté KDE ou C, il restera 3 A + C = DGC: donc

Comme 3 A + C | C | DGC | C, ou bien
Comme 3 DC + AD | AD | DC | DG ou GB.

Si donc les convexitez sont égales, AB sera quadruple de BG. Et ainsi generalement, comme le sesquidiametre de la convexité anterieure qui fait les refractions, augmenté du demi-diametre de la convexité qui fait la reflexion, est à ce demi-diametre, ainsi le demi-diametre de la convexité anterieure est au foyer.

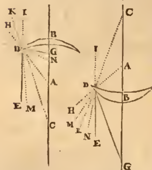
QUARANTE-SEPTIÉME PROPOSITION.

Pour les Menisques qui appartiennent aux convexes.

I. Cas. LORSQUE les cavitez sont tournées vers le soleil.

Soient les centres A, C, le rayon incident E D, les perpendiculaires A D H, C D K.

MDC = ½C, & MDA = CDA + ½C.
MDN = 2CDA + C + ½C.
CDN = 2CDA + ½C.
NDG = CDA + ½C: donc
CDG = 3CDA + C: donc
EDG ou DGB = 3CDA + 2C, & partant
Comme 3 CDA + 2C | C || DGB | C. Ou bien
Comme 3CA + 2 DA | DA | DC | DG ou BG, donc comme la sesquidifference des demi-diametres augmentée du demi-diametre de la convexité qui fait la reflexion, est au demi-diametre de la mesme convexité; ainsi le demi-diametre de la convexité qui fait les reflexions, est au foyer.



II. Cas. Lorsque les convexitez sont tournées vers le Soleil.

Le rayon E D de premiere incidence estant rompu par la premiere convexité, tombe sur la seconde, comme s'il estoit dans la position de M D; & si B C est triple de B A, alors M D tombera sur K D & le rayon resortira sur D E comme il estoit venu. Mais si B C est plus grand que triple, alors M D tombera entre K D & D H & se voudra reflechir selon K D N égal à K D M; mais par la derniere refraction, il sera detourné en G, en sorte que N D G sera moitié des angles N D K & K D H ou A D C.

MDH = ½A, donc KDM = ADC — ½A: mais
KDM = KDN, donc KDN = ADC — ½A; donc
NDH = 2ADC — ½A, donc NDG = ADC — ½A & adjoûtant NDK on aura KDG = 2 ADC — A: mais
G = KDG — C; donc G = ADC — 2C. Donc
Comme ADC — 2C | C || G | C: c'est-à-dire
Comme CA — 2AD | AD || CD | DG. Donc

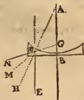
Comme la difference des demi-diametres diminuée du double dn petit demi-diametre est au petit demi-diamette, ainsi le grand demi-diametre est au rayon.

Où il est clair, que si un demi-diametre est justement triple de l'autte, le double du petit estant osté de la difference, le reste sera rien; & ainsi la distance du foyer sera infinie. Mais si le grand demi-diametre C D estoit moindre que triple du petit A D, alors le rayon E D par la premiere refraction prendroit la position de N D & se reflechitoit au dessus de D K, & quelquefois aussi selon D K, ce qui arriveroit quand A D seroit double de C A, c'est-à-dire, quand les demi-diamettes seroient comme 3 à 2, & alors il n'y auroit point de seconde refraction, car le rayon sortiroit selon la divergence H A. Que si C A estoit égale à A D, la reflexion s'estant faite entre H D &

DK, le rayon sortiroit enfin selon CD, & ainsi du reste à proportion, c'est-à-dire, qu'en augmentant CA un peu plus que la moitié de CB, le rayon sortira comme divergeant d'un point de l'axe plus éloigné que C.

QUARANTE-HUITIÉME PROPOSITION.

Les verres planoconcaves dont la cavité regarde le soleil font foyer au quart du diametre de ladite cavité; mais le fond fait une reflexion divergente, comme de la distance du centre de la cavité pris derriere. Si le plat est vers le soleil, le fond fait reflexion divergente comme du tiers du demi-diametre. Car le rayon entre sans refraction & la reflexion MDH = A & EDM = 2 A, donc à la sortie la refraction MDN = A: donc DGB = 3 A, donc ADB = 2 A. Et ainsi AG | GB || 2 | 1.



Notez que de tous verres qui ramassent les rayons, la plus forte reflexion vient toujours du fond, & au contraire de ceux qui les écartent.

Notez aussi que l'on peut facilement connoistre si une reflexion vient du fond en appliquant le verre sur de l'eau, car dans l'attouchement de l'eau la reflexion du fond s'affoiblit fort sensiblement, & cela se peut faire à la chandelle ou au Soleil.

QUARANTE-NEUFIÉME PROPOSITION.

Les deux foyers de reflexion de part & d'autre estant donnez, trouver les diametres des convexitez.

Cette proposition est la converse de la 46e. Soient les deux foyers reduits à une mesure commune assez petite pour avoir des nombres entiers. De leur somme soit pris le quart, lequel soit separément osté de chaque foyer & les restes vous donneront deux termes pour la proportion des diametres. Maintenant avec ces deux termes, comme si c'estoient de veritables diametres, cherchez un nouveau foyer de reflexion, suivant la regle de la 46e proposition, lequel vous voudrez; & la proportion de ce nouveau foyer de reflexion trouvée, avec celuy des donnez qui luy est semblable, vous donnera les diametres. Car comme ce nouveau foyer trouvé est au donné, ainsi lequel vous voudrez des termes de la proportion des diametres, donnera le diametre correspondant audit terme.

Démonstration.

Soient les demi-diametres A, G, & les foyers M, N.

3 A + G | G || A | M

3 G + A | A || G | N, donc le rectangle de

M sur 3 A + G = au rectangle de N sur 3 G + A.

Donc M | N || 3 G + A | 3 A + G, donc *componendo*

M + N | N || 4 G + 4 A | 3 A + G, &

$\frac{1}{4}$ M + $\frac{1}{4}$ N | N || G + A | 3 A + G, & *invertendo*

{ N | $\frac{1}{4}$ M + $\frac{1}{4}$ N || 3 A + G | G + A, & de mesme
{ M | $\frac{1}{4}$ M + $\frac{1}{4}$ N || 3 G + A | A + G, & *dividendo*

{ N — $\frac{1}{4}$ M — $\frac{1}{4}$ N | $\frac{1}{4}$ M + $\frac{1}{4}$ N || 2 A | G + A, & de mesme
{ M — $\frac{1}{4}$ M — $\frac{1}{4}$ N | $\frac{1}{4}$ M + $\frac{1}{4}$ N || 2 G | A + G, & *permutando*

$\{$ N — $\frac{1}{4}$ M — $\frac{1}{4}$ N | 2 A || $\frac{1}{4}$ M + $\frac{1}{4}$ N | G + A, & de mesme
M — $\frac{1}{4}$ M — $\frac{1}{4}$ N | 2 G || $\frac{1}{4}$ M + $\frac{1}{4}$ N | A + G, donc
N — $\frac{1}{4}$ M — $\frac{1}{4}$ N | 2 A || M — $\frac{1}{4}$ M — $\frac{1}{4}$ N | 2 G, *& permutando*
N — $\frac{1}{4}$ M — $\frac{1}{4}$ N | M — $\frac{1}{4}$ M — ″N || 2 A | 2 G.

Donc si l'on oste de chaque foyer le quart de la somme des foyers, vous aurez la proportion des diametres. Et pour discerner à quelle convexité appartient chaque diametre, il faut sçavoir que le plus grand diametre appartient à la convexité qui est du costé du petit foyer : car si M est plus grand que N, 3 A + G seront plus petits que 3 G + A.

DU MICROMETRE.

AVERTISSEMENT.

IL y a long-temps que l'on avoit donné cet écrit pour estre imprimé ; mais quelques embarras qui sont survenus ont empesché de l'achever plûtost. On n'a pas expliqué icy au long les usages que l'on peut tirer de la difference des diametres de la Lune, suivant ses differentes hauteurs sur l'horison, parce qu'on reserve cela pour une autre occasion. Il y a neuf ou dix mois que M. Auzout fit cette reflexion, & en avertit icy les Astronomes qui n'y avoient pas songé. Ce fut à l'occasion des Observations que M. Picard & luy faisoient presque tous les jours des diametres du Soleil & de la Lune : car les conferant toutes les fois qu'ils se rencontroient, il remarqua qu'ils estoient presque toûjours d'accord pour le Soleil à une ou deux secondes prés, & que s'ils estoient quelquefois conformes pour la Lune, ils differoient d'autres fois de 8. 10. ou 12. secondes, dont cherchant la cause, il s'apperceut aussitost (& il n'y avoit rien de si facile) que cela venoit de la differente distance entre la surface de la Terre, & la Lune, suivant qu'elle estoit plus ou moins haute sur l'horison, laquelle devenoit sensible par leur maniere d'observer les diametres, & que ne faisant pas toûjours leurs Observations à la mesme heure, & par consequent la Lune n'ayant pas la mesme hauteur, ils ne devoient point trouver le mesme diametre. Il conclud ensuite la maniere de connoistre la distance de la Lune par la difference de ses diametres observez en differentes hauteurs, & ayant eu occasion d'écrire vers la fin de l'année derniere à Monsieur Oldembourg Secretaire de la société Royale d'Angleterre, il luy fit part en passant de cette invention, puis ayant appris quelques jours aprés par une lettre de M. Oldembourg que M. Hevelius avoit remarqué dans l'Eclipse de Soleil du mois de Juillet 1666. que le diametre de la Lune luy avoit paru plus grand vers la fin de l'Eclipse que vers le commencement de 8. ou 9. secondes, sans qu'il mandast que M. Hevelius en eust trouvé la raison ; il luy envoya un billet pour l'avertir que ce qu'il luy avoit mandé la semaine d'auparavant luy feroit facilement connoistre que cela avoit dû arriver ainsi. L'extrait de cette lettre & le billet ont esté imprimez dans le Journal d'Angleterre du mois de Janvier dernier, & l'on a jugé à propos de les donner icy comme ils sont dans le Journal d'Angleterre, en attendant que l'on explique plus au long ce qui y est contenu.

Cét écrit de M. Auzout a esté imprimé à Paris en 1667.

L'on a trouvé depuis tout cecy, que Kepler un des plus ingenieux des Astronomes, avoit autrefois fait cette mesme reflexion dans son Astronomie Optique, pag. 360.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. AUZOUT du 28. Decembre 1666. à M. Oldembourg Secretaire de la Societé Royale d'Angleterre, touchant la maniere de prendre les diametres des Planétes, & de sçavoir la parallaxe ou la distance de la Lune : comme aussi touchant la raison pourquoy dans la derniere Eclipse de Soleil le diametre de la Lune parut plus grand vers la fin de l'Eclipse qu'au commencement.

JE me suis appliqué cet été à prendre les diamétres du Soleil, & de la Lune & des autres Planetes par une methode que M. Picard & moy croyons la meilleure de toutes celles qui ont esté pratiquées jusques à present, puisque nous pouvons prendre les diamétres jusques aux secondes, & nous divisons

un pied en 24000. ou 30000. parties, sans qu'à peine on puisse se tromper d'une seule partie, en sorte que nous sommes presque assurez de ne pouvoir pas nous tromper de trois ou de quatre secondes. Je ne puis maintenant vous envoyer mes Observations, mais je croy pouvoir vous assurer que le diamétre du Soleil n'a esté gueres plus petit dans son apogée que 31. minutes 37. ou 38. secondes, & que certainement il n'a pas esté moindre de 35. & qu'à present dans son perigée il ne passe pas 32'. 45". & je le croy plus petit d'une seconde ou deux. Ce qui donne presentement de l'embarras, vient de ce que le diamétre vertical qui est le plus facile à prendre, est quelquefois diminué, mesme à midy de 7. ou 8. secondes par les refractions qui sont beaucoup plus grandes en hyver qu'en été, à la mesme hauteur, & plus grandes mesme un jour que l'autre, & que le diamétre horisontal est difficile à prendre à cause de la vitesse du mouvement journalier.

Pour la Lune je n'ay point encore trouvé son diametre moindre que 29'. 40" ou du moins 35" secondes, & je ne l'ay pas beaucoup vû passer 33. minutes, ou ç'a esté de peu de secondes: il est vray que je ne l'ay pas encore pris dans toutes les sortes de situations de ses apogées & de ses perigées, quand ils se rencontrent avec les conjonctions & les quadratures.

Je ne marqueray pas tout ce qui peut estre déduit de cecy, mais si vous avez à Londres quelques-uns qui observent ces diametres, nous nous pourrons entretenir une autrefois plus amplement de cette matiere. Je vous diray seulement que j'ay trouvé le moyen de sçavoir la distance de la Lune par l'Observation de son diametre vers l'horison, & ensuite vers le midy, avec les hauteurs qu'elle a sur l'horison au temps des Observations, en quelque jour qu'elle est dans son apogée, ou dans son perigée, dans les signes les plus boreaux, car si l'Observation des diametres est exacte, comme en ces rencontres, la Lune ne change point sensiblement en six ou sept heures sa distance du centre de la terre, la difference des diametres fera connoistre la raison de sa distance avec le semidiametre de la terre. Je ne m'explique pas davantage, car si-tost que l'on a cette idée tout le reste est facile. On peut faire encore mieux la mesme chose dans les lieux où la Lune passe vers le zenith, qu'en ces païs-cy; car d'autant plus que la difference des hauteurs est grande, d'autant plus celle des diametres est grande. Je ne m'arresteray pas à remarquer, parce que cela est evident, que si on estoit en deux differens lieux sous le mesme meridien, ou sous le mesme azimuth, & qu'on prist en mesme temps le diametre de la Lune avec une hauteur, on peut faire la mesme chose, &c.

Billet du quatriéme Janvier mil six cens soixante & sept.

DE ce que je vous manday la derniere fois, on peut tirer la raison de l'Observation que M. Hevelius a faite dans la derniere Eclipse de Soleil touchant l'augmentation du diametre de la Lune vers la fin de l'Eclipse. Je suis ravy qu'une personne, qui apparemment n'en sçavoit point la cause, ait fait cette Observation. Cependant il est assez étrange que jusques à present aucun Astronome ancien ny nouveau n'ait prévû que cela devoit arriver, ny donné des preceptes pour le changement des diametres de la Lune dans les Eclipses de Soleil, suivant les lieux où elles se doivent faire, & suivant l'heure, & la hauteur que la Lune doit avoir sur les horisons; car ce qui est arrivé à cette Eclipse touchant l'augmentation, seroit arrivé au contraire, si elle avoit esté vers le soir; car la Lune a du paroistre plus grande dans cette Eclipse qui commença le matin, parce qu'elle devint plus haute vers la fin de l'Eclipse qu'au commencement, & que par consequent elle estoit plus proche de nous: mais si l'Eclipse fust arrivée vers le soir, comme elle eust esté plus

basse vers la fin qu'au commencement, elle eust esté plus éloignée de nous, & eust par consequent paru plus petite. Par la mesme raison en deux differens lieux où l'un doit avoir l'Eclipse le matin & l'autre à midy, la Lune doit paroistre plus grande à celuy qui l'a à midy; elle doit de mesme paroistre plus grande à ceux qui ont une moindre élevation de Pole sous le mesme meridien, parce que la Lune est plus prés d'eux, & generalement à ceux sur l'horison desquels la Lune est plus élevée au temps de l'Observation, &c.

MANIERE EXACTE POUR PRENDRE le diametre des Planetes, la distance entre les petites Etoiles, la distance des lieux, &c.

Il y a diverses manieres de prendre le diametre des Planetes, que l'on peut voir chez les Astronomes. On se contentera d'en décrire icy une qui paroist plus exacte que toutes les autres que l'on a pratiquées jusques à present. Et quoy qu'on puisse penser d'abord que d'autres s'en sont déja servi, on verra pourtant qu'ils n'ont point mis en usage tout ce qui en fait l'exactitude: cependant c'est en ces rencontres où l'on a besoin d'une grande précision, en quoy consiste tout le secret.

Il y a déja quelque temps que l'on se sert de chassis ou de rezeaux mis dans le foyer de la lunette, lesquels étant divisez par des filets en petits quarrez, dont on sçait la mesure, servent à determiner quel angle font les corps, que l'on veut mesurer par leur moyen. Mais il y avoit cela d'incommode à ces chassis, que les quarrez ne pouvant pas estre si petits que l'image de l'objet fust toûjours justement comprise entre quelques-uns des filets, le reste dépendoit de l'estime par laquelle on prenoit le tiers & le quart par exemple de l'intervalle entre deux filets: ce qui ne pouvant pas estre juste, particulierement quand il faut estimer une chose qui est en l'air & qui se meut, il manquoit pour une parfaite exactitude, que les objets fussent toûjours parfaitement compris entre deux filets, deux cheveux ou deux petites lames, dont on pût ensuite sçavoir exactement la distance jusques à des divisions si petites qu'elles pussent aller jusques aux secondes.

Car par exemple une ligne faisant dans une lunette de 12. pieds environ deux minutes, si les petits quarrez avoient une ligne, & que l'on se trompât de la cinquiéme ou sixiéme partie d'un intervalle, c'étoit 24 ou 25. secondes de méconte, & la dixiéme partie du même intervalle faisoit 12″. Ce qui étoit bien éloigné de la precision à laquelle on prétend estre parvenu.

Pour remedier à l'un & à l'autre de ces defauts, M. Auzout a fait faire depuis long-tems une petite machine qui fait avancer par le moyen d'une vis tres-égale un ou plusieurs cheveux ou lames parallelement à d'autres qui sont arrêtez, de telle sorte que l'on peut toûjours comprendre exactement l'image de l'objet entre deux cheveux, quelque petit qu'il soit, à-cause que la vis les fait avancer presqu'insensiblement: & pour mesurer la distance entre les filets jusques à des divisions tres-petites, cette vis faisant par exemple trois tours pour faire avancer une ligne, on voit par le moyen d'une aiguille qui tient à l'écrou, la partie du tour dont elle a avancé par-de-là les tours entiers, sur un cercle divisé en 60 ou 80 parties, tellement qu'une ligne se trouve ainsi divisée en 180 ou en 240 parties, & un pied en 25920 ou 34560: & si on vouloit diviser le cercle en 100 parties, la ligne seroit divisée en 300 parties, & le pied entier en 43200.

Et parce qu'on veut quelquefois prendre des diametres fort differens, ou des differentes distances d'étoilles l'une aprés l'autre, & qu'il auroit esté incom-

mode de faire tant de tours de vis pour prendre par exemple le diametre de Jupiter ou de Venus aprés que l'on auroit pris celuy de la Lune, il y a de quatre lignes en quatre lignes, ou si l'on veut de deux ou trois lignes en trois lignes des cheveux ou des filets arrestez, dont on connoist la distance, & desquels on peut commencer à prendre la mesure jusques au filet, ou à un des filets mobiles selon que l'objet est grand ou petit, en sorte qu'il n'est presque jamais necessaire d'avancer plus d'une ou deux lignes, ce qui est bien-tost fait; & l'on n'use pas tant l'écrou, que s'il falloit faire avancer les filets depuis un bout jusques à l'autre. On peut voir dans le dessein que l'on a donné la description de toute la machine, & peut-estre que cela donnera sujet aux curieux d'en inventer d'autres, ou de perfectionner celle-cy.

Mais parce que cette maniere de mesurer la distance des filets par des tours de vis demande une tres-grande exactitude dans la machine, & qu'il peut arriver, quelque exacte qu'elle ait esté faite, qu'elle perdra sa justesse avec le tems à force de la remuer; M. Picard s'est avisé le premier de mesurer la distance des cheveux par le moyen du microscope: & cette methode peut estre si exacte, que si l'on y prend bien garde, quoy qu'on divise le pied en 24000 ou 30000 particules, à-peine pourra-t-on se tromper d'une de ces particules.

Pour cet effet il faut avoir une regle platte divisée en petites parties fort justes, par exemple en telles que 400 fassent un pied: puis ayant un bon microscope, il faut le tirer jusques à ce qu'il grossisse 60 ou 80 ou 100 fois, si l'on veut tant multiplier les objets: ce qui est aisé à determiner en prenant avec un compas sur la petite regle l'intervalle de 60 parties, si l'on veut qu'il ne grossisse que 60 fois, comme l'on fait d'ordinaire à-cause de la conformité de cette subdivision avec celle des degrez & des minutes, & de la facilité que cela donne à la table, dont on parlera dans la suite. Car si on regarde d'un œil dans le microscope, & qu'avec l'autre on compare l'ouverture du compas que l'on a prise de 60 parties avec la grandeur d'une des parties, comme elle paroist par le microscope à la même distance où est la regle, & qu'on alonge ou qu'on accourcisse le microscope jusques à ce que ces deux grandeurs paroissent égales on posées l'une sur l'autre; l'on sera asseuré que le microscope restant dans cette longueur, & dans cette disposition de verres, grossira 60 fois tous les objets que l'on regardera à travers, pourveu qu'on les compare à la même distance que sera l'objet que l'on voudra mesurer.

Cela estant fait, quand on aura pris bien exactement avec la lunette la grandeur d'un objet, & qu'on aura jugé qu'il est precisément entre deux filets, pour mesurer la distance entre ces filets il faudra porter son chassis sur la regle, & mettre, en regardant avec le microscope, le costé d'un des cheveux dont on s'est servi, exactement sur le milieu d'une division; (ce qui est facile à juger à-cause que les divisions se font d'ordinaire par des petits trous, dont on estime exactement la moitié) puis laissant le chassis ainsi posé sur la regle sans qu'il remuë, il faut porter le microscope vis-à-vis de l'autre cheveu, & voir à quelle division son bord répond: & arrivant rarement qu'il réponde au milieu d'une autre division, il faut prendre avec un compas qui ait les pointes tres-fines, par le moyen de l'œil gauche, si l'on regarde dans le microscope avec le droit, la grandeur de l'intervalle qui paroist depuis le milieu d'une des divisions prochaines jusques au bord du filet: puis ayant porté cette ouverture de compas sur la regle, on verra combien de particules elle contient, qui seront autant de soixantiémes parties d'une des divisions de la regle: & si 400 font un pied, ces particules prises avec le microscope seront autant de deux milliémes parties d'un pouce, ou de vingt-quatre milliémes parties d'un pied.

Maintenant pour sçavoir quel angle cette distance trouvée comprend, il n'est

n'est pont necessaire, comme d'autres pratiquent, de l'aller mesurer dans le ciel ni sur la terre : il suffit de sçavoit la proportion du foyer de la lunette (c'est-à-dire de la distance qui est entre l'objectif & le chassis, puis qu'il est dans le foyer) avec la distance qui est entre les filets : car ayant reduit ces distances jusques aux petites particules, & considerant le foyer comme le rayon, & la distance des filets comme la tangente, on sçaura quel angle font toutes les distances des filets, & l'on en doit faire une table tres-exacte de laquelle on pourra se soulager, au lieu de faire une operation d'Arithmetique à toutes les distances que l'on prendra.

Car l'on démontre dans la Dioptrique, qu'il y a même proportion de la distance qui est entre l'objet & la lunette, à la grandeur de l'objet, que du foyer de l'objectif qui est l'endroit où sont les filets, à la grandeur de l'image, à-cause qu'il se fait deux triangles qui ont l'angle au sommet égal. Et quoy que le sommet du triangle vers l'œil ne soit pas précisément au bord de l'objectif, si ce n'est dans les plano-convexes quand le plat est tourné vers l'objet, ou dans le milieu, si ce n'est dans un convexe des deux côtez, dont la convexité anterieure est le tiers de la posterieure, & que dans une lunette d'égale convexité, il soit au tiers de l'épaisseur vers l'œil, & à proportion dans les autres dont on sçait la regle; d'ordinaire les verres sont si minces, que dans une lunette de dix ou douze pieds, cela ne peut pas alterer sensiblement la proportion, quoy que si l'on cherche les choses dans la derniere exactitude, il soit necessaire d'y avoir égard.

La maniere de M. Picard quoy qu'excellente ne satisfait qu'au second inconvenient, & ne sert que pour la division exacte; tellement qu'une machine pour faire avancer ou reculer insensiblement & parallelement les filets, est encore necessaire : car quand il faut pousser les filets avec la main, quoy que l'œil dans de petites distances, comme de trois ou de quatre lignes, juge assez exactement du parallelisme, la main ne peut pas faire avancer le peu qu'il s'en faudra quelquefois que les filets ne comprennent l'objet : & quoy qu'on recommence plusieurs fois, il arrive souvent qu'on ne peut pas y venir justement : & si l'on vouloit toûjours recommencer, le tems de l'Observation passeroit. Aussi sans un remede qu'on y a trouvé, on ne pourroit jamais se passer de cette machine; tellement que pour bien faire, il faut avoir la machine pour faire avancer les filets, & se servir du microscope pour prendre les divisions plus exactement.

Ce n'est pas que si l'on pouvoit avoir une machine si bien-faite qu'elle marquât toûjours les divisions justes sur le cercle, on ne fust soulagé de beaucoup de peine, & que l'on ne fist beaucoup plus d'Observations dans un tems égal, puis qu'il n'y auroit qu'à écrire chaque distance, au-lieu qu'il faut la mesurer avec le microscope; ce qui demande du tems, & n'est pas si facile la nuit, à-cause que la lumiere, dont on peut éclairer le chassis, vient de costé, & est d'ordinaire foible, quoy qu'on se serve d'un verre convexe pour la ramasser : & dans le tems qu'il paroistroit une Comete, on auroit de la peine à faire plusieurs Observations en peu de tems, à moins que d'avoir autant de chassis ou d'anneaux que l'on voudra faire d'Observations.

Aprés avoir expliqué cette maniere, il faut encore remarquer plusieurs choses pour prendre exactement le diametre des Planetes, & faire les autres Observations.

1. Il faut avoir précisément le foyer de la lunette, dont on se servira pour mettre les filets dans ce foyer. On peut le trouver en regardant la Lune, Jupiter ou les Etoiles, & remarquant quand on les distingue le mieux; car il n'y a qu'à rabatre le foyer de l'oculaire de la longueur de la lunette, & mettre le chassis en ce lieu-là; ou en distinguant sur terre un petit objet, comme de

l'écriture, qui soit à une distance connuë ; car ayant le foyer correspondant d'un objet, dont la distance est donnée, on montre dans la Dioptrique à trouver le foyer absolu. On peut encore le trouver en recevant l'espece du Soleil dans un lieu obscur, & remarquant le lieu où l'espece du Soleil est la plus distincte & la plus vive.

2. Il faut que la lunette soit parfaitement ferme & arrêtée ; car si elle branle le moins du monde, on pourra facilement se tromper de plusieurs secondes ; mais si elle est bien arrestée, & que l'on y prenne bien garde, il est presqu'impossible de se tromper de l'épaisseur d'un cheveu, dont on ne sera pas surpris, si l'on considere que l'oculaire grossit plusieurs fois le cheveu : ce qui fait qu'il paroist beaucoup plus gros qu'à la vuë simple : & quand on se tromperoit d'un cheveu, ce ne seroit que 4 ou 5 secondes dans une lunette de 12 pieds, & 2" dans une de 24.

3. Il faut, pour avoir l'image plus distincte, donner le moins d'ouverture que l'on pourra à la lunette. Cette précaution est à-propos en tout temps ; mais particulierement lors que l'on n'a pas de machine pour faire avancer les cheveux, & qu'il faut les pousser avec la main ; étant quelquefois presqu'impossible, quoy qu'on recommence plusieurs fois, de les mettre parfaitement justes. En ce cas il ne faut qu'alonger ou acourcir un peu la lunette ; car l'image étant distincte dans un espace assez considerable, à cause de la petite ouverture de la lunette, on sçaura quel angle fait l'objet, si l'on ajoute au foyer ou qu'on en soustraye ce dont on a approché ou reculé le chassis.

4. Il faut tascher de prendre toûjours les objets le plus qu'il se pourra vers le milieu du chassis, & par-consequent de l'oculaire, particulierement les petits, comme les Planetes, qui ne sont pas si nets ni si distincts vers les bords.

5. Pour éviter la parallaxe de la vuë, il faut qu'il y ait un petit trou auprés de l'œil : car sans cela si l'œil changeoit de situation, il se pourroit faire quelque petite difference à-cause de la distance de l'œil aux filets.

6. Il faut bien remarquer si la lunette est toûjours tirée de la même longueur, & pour cet effet il seroit à-propos que le tuyau fust tout d'une piece, à la reserve d'un petit tuyau qui porte le chassis & l'oculaire ; car s'il est de plusieurs tuyaux, on peut quelquefois manquer à les mettre justement sur leur marque, où quelqu'un peut glisser sans qu'on s'en apperçoive. S'ils sont de bois ou de carton, il faut bien prendre garde qu'ils ne soient pas sujets à s'alonger ou à s'acourcir, selon que le tems sera sec ou humide : & mesme quand ils sont de fer blanc, on n'est pas assuré qu'ils demeurent dans leur même longueur en Hyver & en Eté, aprés la remarque que M. Auzout a faite cet Hyver, que tous les metaux s'acourcissent à la gelée ; jusques-là qu'un tuyau de fer blanc de 12 pieds peut bien se racourcir de prés de 2 lignes. C'est pourquoy il sera bon de les remesurer souvent avec quelque mesure qui soit toûjours dans un air le plus temperé qu'il se pourra, ou contre quelque muraille.

7. Il est presque toûjours necessaire de se servir d'un verre coloré ou enfumé pour regarder le Soleil, & quelquefois pour Venus & pour Mercure.

8. Il est plus commode pour le Soleil & pour la Lune, de se servir de lunettes mediocres, comme de 6, 8, 10, ou 12 pieds, que de plus grandes, tant à-cause que l'on a de la peine à trouver des oculaires assez larges, qu'à cause que si l'on observe dans le tems que le grand diametre ne suit pas le mouvement diurne, comme il arrive presque toûjours à la Lune, l'œil ne pouvant pas comprendre tout-d'un-coup un espace aussi grand qu'est l'image de ces objets dans les grandes lunettes, on ne peut examiner qu'en deux tems si l'image & les filets conviennent : & quoy que ce temps soit tres-petit, le mouvement est si rapide, que l'on peut se tromper aisément de plusieurs secondes, & estimer les objets plus grands qu'ils ne sont, puisque pendant une demie

seconde de temps, le mouvement diurne en fait sept & demie; & pendant un quart de seconde qui ne fait qu'environ un clin d'œil, il fait prés de quatre secondes : mais pour les autres planetes dont l'image est tres-petite, les plus grandes lunettes sont les meilleures, pourveu qu'on ait d'assez grands lieux à couvert pour s'en servir, & qu'on trouve le moyen de les arrester tres-fermes. Il est vray que si l'on prend le Soleil à midy où il y a presque 2 minutes de temps, qu'il va sensiblement parallele à l'horison, on a le temps de voir si son diametre marche exactement entre les filets : & c'est le temps que l'on doit choisir autant que l'on peut, quoy que si l'on est obligé de le prendre en d'autres temps, on puisse encore le faire avec les grandes lunettes, pourveu qu'on mette les filets paralleles au mouvement diurne; en sorte que l'image marche entre-deux assez de temps pour estimer si son image est parfaitement comprise entre les filets.

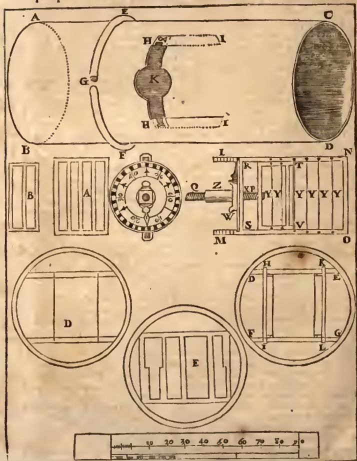
9. Aprés diverses épreuves les cheveux ont esté trouvez meilleurs que tous les autres filets, soit de metal, de soye, de fil, de boyau, &c. pourveu que l'objet soit assez illuminé pour les faire distinguer, comme il arrive au Soleil, & presque toûjours à la Lune quelque petite qu'elle soit, comme aussi à Venus, & quelquefois à Jupiter: mais pour les autres, à-moins qu'on ne les observe dans le crepuscule, ou quand il fait clair de Lune, on ne distingue pas les cheveux, s'ils ne passent sur l'objet illuminé, ce qui ne sert de rien. C'est pourquoy pour y remedier, on a ajoûté des petites lames qui se mettent pardessus les cheveux, & qui se distinguent presque toûjours quand le temps est serein, & propre pour observer: & s'il arrive qu'on ne les distingue pas assez, il y a deux manieres de les éclairer; l'une en faisant un petit trou au costé du tuyau, où est le chassis par lequel on envoye la lumiere d'une chandelle, sans qu'elle donne dans les yeux, & l'autre en tenant un flambeau un peu loin de la lunette: car la lumiere se reflechissant contre les parois du tuyau éclaire assez les lamines, & même les filets, particulierement quand il n'y a point de separations dans le tuyau. Pour les lamines, on les peut faire si larges que l'on veut, puisque c'est par leur bord qu'on mesure, & non-pas par leur largeur; mais il ne les faut gueres moins larges qu'une ligne, & il faut prendre garde qu'elles soient en bizeau, pour éviter la reflexion qui feroit un mauvais effet. Faisant un biseau, leur épaisseur est indifferente aussi-bien que leur largeur.

10. Il faut avoir grand égard aux refractions: car si les Astres y sont sujets selon le diametre qu'on est obligé de prendre, ce diametre sera diminué; & ainsi si l'on ne sçait pas leur mesure, on estimera le diametre trop petit: c'est pourquoy il faut tâcher autant que l'on peut de les prendre hors des refractions, ou d'y avoir égard, aprés que par plusieurs Observations on aura fait des tables de la diminution des diametres, selon les hauteurs & les saisons, les lieux & la constitution du temps, puisque la refraction a paru bien plus grande en Hyver à la mesme hauteur, qu'en Eté; qu'elle paroist certains jours plus grande que d'autres, & qu'elle est plus grande en certains lieux qu'en d'autres. L'on doit même bien s'asseurer si la difference constitution de l'air n'altere point tout le corps des astres, comme la refraction ordinaire altere le diametre vertical: car certaines Observations extravagantes semblent en donner le soupçon, dont il faut tâcher de s'asseurer davantage, de-peur que cela ne vienne de quelque defaut dans les Observations. Et je croy qu'il n'y a que cette methode qui nous puisse éclaircir de toutes ces choses.

11. Il faut avoir fait une table de ce que valent pour chaque lunette les parties de la regle en minutes & en secondes; & si l'on veut plus de précision, on pourra aller jusques aux tierces & aux quartes. On la calculera jusques à 60 si le microscope grossit 60 fois, & la mesme table servira pour les parties de la regle & pour les soixantiémes, en prenant des secondes pour les soixantié-

mes si les parties de la regle valent des minutes, ou des tierces si elles ne valent que des secondes, comme l'on a de coustume de faire dans les tables sexagenaires.

L'on ne déduit point icy tous les usages de cette methode, ce sera pou une autre occasion, & l'on pourra donner ensuite les Observations que MM. Picard & Auzout ont faites depuis long-temps des diametres du Soleil, de la Lune & des autres Planettes, où l'on verra la grande utilité que l'Astronomie en peut tirer pour l'éclaircissement de la plusgart des choses les plus souhaitées dans cette science, soit pour les Eclipses, soit pour la distance de la Lune, les parallaxes & les excentricités des Planetes, &c. aussi-bien que la Geographie pour la mesure de la distance des lieux, la mesure de la Terre, &c.



Explication des Figures.

ABCD est un tuyau de fer blanc ou de cuivre, qui entre dans le tuyau de la lunette, & qui y est retenu par le moyen de l'anneau EF, dans lequel entre un crochet par l'espace G, comme dans plusieurs sortes de boistes, afin que la pesanteur de la machine ne la fasse pas tomber, & qu'on la puisse tourner pour mettre les filets dans la situation requise, sans qu'elle change de distance.

HH sont deux barres paralleles qui traversent le tuyau, & qui y sont soudées, où il y a des renures ∝ ∝, dans lesquels on fait couler le chassis par l'ouverture K.

LMNO est le chassis où il y a des cheveux YY arrestez tant au grand chassis LMNO qu'au petit RSTV, auquel tient la vis PQ qui le fait avancer par deux renures qui sont dans le grand chassis, parallelement depuis X jusques à ce que les cheveux se touchent, par le moyen de l'écrou Z, auquel tient une aiguille qui marque sur un cercle ʬ divisé en 60 parties, quelle partie de tour la vis a fait. Ce cercle ʬ est rivé sur la platine X; mais on le voit à costé tout entier avec l'écrou & l'aiguille qui y est attachée, divisé en 60 parties. Les deux avances RLSM sont divisées en autant de parties que la vis fait de tours.

AB sont deux petits chassis de lames destinez particulierement pour observer les Etoilles qui se mettent sur le premier chassis, sçavoir A sur la partie TVON, & B sur le chassis RVTS, à queuë d'aronde, ou avec des petites vis, ou de quelqu'autre maniere, pour les pouvoir oster quand on veut se servir des cheveux.

Dans la partie DC du tuyau il doit en entrer un autre de fer blanc ou de cuivre, qui porte l'oculaire ou les oculaires dont on se servira, pour les approcher ou les éloigner du chassis selon qu'il sera necessaire: mais on ne l'a point dépeint, parce que cela est aisé.

DEFG est un chassis plus simple, dont on peut se servir si l'on n'a pas le premier. C'est un cercle de laton ou d'argent avec deux petites barres paralleles DE, FG, dans lesquelles en coulent deux autres fort justes, de la figure qui est representée, lesquels portent chacun un filet que l'on peut faire avancer ou reculer avec les doigts autant qu'il en est besoin. On peut arrester d'un costé plusieurs cheveux comme au grand chassis, & n'avoir qu'une barre au lieu de deux, qui s'approche ou s'éloigne des cheveux arrestez. Et cela est aisé à entendre.

D est un autre chassis encore plus simple, où l'on met seulement sur deux petites barres, deux ou plusieurs cheveux que l'on y nouë, ou que l'on y attache avec de la cire, du mastic, de la cole, &c. & que l'on fait avancer avec les doigts le plus parallelement qu'on peut.

E est encore un autre chassis qui peut servir pour prendre assez juste les distances des petites Etoiles: il est composé de plusieurs lames toutes de largeur connuë & à distance connuë, qui sont differentes & même subdivisées par la moitié, pour pouvoir par les unes ou par les autres prendre presque toutes les sortes de distances jusques à un quart de ligne: & cela sert pour faire beaucoup d'Observations en peu de temps.

Si l'on n'a pas de ces chassis ou anneaux de cuivre, on pourra en faire sur le champ avec du carton, pourveu qu'il soit assez ferme pour ne pas perdre sa figure, & on y attachera des cheveux ou sur des barres, ou sur le limbe avec de la cire, ou bien on y coupera des lames comme dans la figure E.

C'est par ce moyen qu'on pourra faire pour le jour d'une Eclipse un chassis

diviſé en 12. doigts ſuivant le diametre que le Soleil ou la Lune devront avoir au temps de l'Eclipſe, afin d'en obſerver toutes les phaſes: & cette methode ſera peut-eſtre la plus juſte de toutes; car ayant coupé deux cercles de carte, il n'y a qu'à diviſer ſur le limbe l'eſpace que doit contenir l'image du Soleil ou de la Lune en 12 parties paralleles avec des traverſantes perpendiculaires, & arreſter avec de la cire ou de la colle, des cheveux ſur les diviſions; puis coler l'autre carton pardeſſus le premier, afin que le tout demeure plus ferme. On n'en a point donné la figure, parce que cela eſt aiſé à concevoir.



DES QUARREZ OU TABLES MAGIQUES.

PAR M. FRENICLE.

ON appelle quarré magique celuy qui eſtant diviſé par cellules en quantité repreſentée par un nombre quarré, & les cellules eſtant remplies de nombres conſecutifs, ou qui ſoient en même progreſſion arithmetique, contient pareille ſomme en chacune de ſes lignes, de quelque façon qu'on les puiſſe prendre. Exemple:

Le quarré A, B, C, D, 16, eſt diviſé en 16 cellules, & ces cellules ſont remplies des nombres conſecutifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. juſques à 16: & ces nombres ſont diſpoſez d'un tel ordre dans les cellules, que les nombres de chaque ligne eſtant aſſemblez, font une ſomme égale; ſoit qu'on prenne les lignes en long, comme 1, 15, 14. 4,| 12, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 5, & 13, 3, 2, 16,| ou qu'on les prenne de haut en bas, pour avoir 1, 12, 8, 13,| 15, 6, 10 3,| 14, 7, 11, 2,| 4, 9, 5, 16,| ou enfin ſi on conſidere les deux diagonales ou lignes tranſverſales, 1, 6, 11, 16, & 4, 7, 10, 13, & a ſomme de chacune de ces lignes eſt 34.

A B

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

C D

La ſomme des nombres qui ſont en chaque ligne ne ſe peut pas prendre à diſcretion; mais elle eſt neceſſaire à chaque figure: & voicy le moyen de ſçavoir quelle elle eſt.

La ſomme du plus grand & du moindre nombre de ceux qu'on veut employer dans les cellules du quarré magique eſtant multipliée par la moitié du coſté du quarré, donne la ſomme de chaque ligne. Ainſi au quarré qui a 16 cellules, ſi le moindre nombre eſt 1, & le plus grand 16, & qu'on multiplie leur ſomme 17 par 2, qui eſt la moitié de 4, coſté de 16, on aura 34 pour le nombre requis.

Que ſi le quarré magique eſt impair, on multipliera la moitié de la ſomme des deux nombres extrêmes par le coſté du quarré. Ainſi quand on aura rempli le quarré qui a 25 cellules, ſi le moindre des nombres eſt 1, & le plus grand 25, chaque ligne contiendra 65; qui ſe trouve adjouſtant les termes extrêmes 25 & 1; & prenant la moitié de 26, qui eſt leur ſomme, & on aura 13, qui eſtant multiplié par 5, coſté du quarré 25, donnera 65.

Si les nombres dont on ſe ſert pour remplir les cellules ne commençoient pas par l'unité, ou qu'ils euſſent autre difference entr'eux que l'unité, on ne laiſſeroit pas de ſe ſervir des regles cy-deſſus pour trouver la ſomme des nombres de chaque ligne. Exemple: Que les nombres dont on veut remplir les cellules du quarré de 4, qui eſt 16, ſoient 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33. J'aſſemble les extrêmes 3, & 33, pour avoir 36. qui multiplié par 2.

moitié de 4, costé du quarré 16, donnera 72 pour la somme des nombres de chaque ligne.

Si les extrêmes des nombres qu'on employe au quarré 16, estoient 1, & 31, je prendrois de-même la somme qui est 321 qui estant multipliée par le même 2, donneroit 64 pour la somme des nombres de chaque ligne.

De même si pour remplir les cellules du quarré 9, qui a 3 de costé, on se servoit de 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, je prendrois la somme des extrêmes 4 & 28, qui est 32, (laquelle somme est toûjours un nombre pair, lors qu'il s'agit des quarrez impairs) la moitié de 32 est 16, qui multiplié par le costé 3, donne 48 pour la somme des nombres qui sont en chaque ligne.

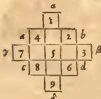
Il faut maintenant voir la maniere dont on se sert pour disposer les nombres en telle sorte que chaque ligne fasse une somme égale.

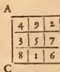
Il y a entre autres deux methodes qui servent à cet effet. L'une est pour les seuls impairs, & l'autre peut servir tant aux quarrez pairs qu'aux impairs.

On donnera icy premierement celle qui appartient aux seuls impairs, puis on parlera de la generale.

Ausquelles methodes on supposera toûjours pour plus grande facilité, que les nombres dont les cellules doivent estre remplies commencent par l'unité, & qu'elles s'entresuivent avec la difference de la même unité, comme sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Car en ce qui dépend de placer & ranger les nombres dans les cellules, il n'importe pas quel soit le moindre nombre, ni quelle difference ils ayent entre eux. Il suffit qu'ils soient en progression arithmetique, & qu'ils se surmontent l'un l'autre d'un excés toûjours égal, comme 2, 5, 8, 11, 14, 17, &c. ou 4, 9, 14, 19, 24, 29, &c.

Pour remplir les cellules d'un quarré impair, par exemple du quarré A B C D qui a 9 cellules, je décris un autre quarré *a b c d* qui a pareillement 9 cellules, comme on voit icy : & sur chacune des faces du quarré, j'étens une autre cellule vis-à-vis de la cellule qui est au milieu de chaque costé : lesquelles cellules sont marquées α β γ δ.





Cela fait, j'écris les nombres de suite, commençant par une des cellules qui sont hors du quarré & par la plus éloignée du milieu.

On écrira donc 1, 2, 3, dans les cellules α, *b*, β, puis revenant à la cellule *a*, tirant vers *d*, on écrira 4, 5, 6, & enfin aux cellules γ, *c*, δ, on mettra 7, 8, 9.

Ces nombres estant ainsi disposez, je considere ceux qui se rencontrent dans le quarré *a*, *b*, *c*, *d*, qui sont 4, 2, 5, 8, 6, lesquels je mets aux mesmes places dans le quarré A B C D, appresté pour cét effet.

Il reste donc à remplir les autres places vuides du quarré, ce qui se fera mettant le nombre qui est en δ, en la cellule qui est au dessous de α, sçavoir entre 4, & 2 ; & en échange, le nombre qui est en α, en celle qui est au dessus de δ, entre 8, & 6.

Et semblablement on mettra 7, qui est en γ, vers β, entre 2, & 6, & 3, qui est en β : on le mettra prés de γ, entre 4, & 8 ; comme on peut voir en la figure. On aura donc la figure complette A B C D qui a 15, pour la somme des nombres de chacune de ses lignes, & diagonales.

Mais parce que le quarré de 3, pour estre trop petit ne donnera pas peut-estre une entiere connoissance de la façon dont on fabrique ces quarrez impairs, on en apportera

apportera un plus grand pour l'exemple, ſçavoir celuy de 49, qui a 7 de coſté.

A B

4		12		20		28
	11		19		27	
10		18		26		34
	17		25		33	
16		24		32		40
	23		31		39	
22		30		38		46

C D

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

						α	7							
					g	6		14	h					
				e	5		13		21	f				
			a	4		12		20		28	b			
			3		11		19		27		35			
		2		10		18		26		34		42		
γ	1		9		17		25		33		41		49	
		8		16		24		32		40		48		
			15		23		31		39		47			
			c	22		30		38		46	d			
					29		37		45					
						36		44						
							43							

Ayant fait le quarré *a b c d*, qui a ſept cellules à chacun de ſes coſtez, j'éleve ſur le coſté *a b*, les cinq cellules *e f*, ſçavoir deux moins que celles du quarré ; puis ſur ces cinq je mets les trois marquées *g h* ; puis ſur ces trois j'en poſe une marquée *α* : car leur nombre doit toûjours diminuer de deux.

Semblablement ſur chacun des autres coſtez, comme ſur *a c*, ſur *c d*, & ſur *d b*, je place cinq cellules, puis trois & une. J'écris aprés les nombres de ſuite dans ces cellules, commençant par laquelle on voudra des quatre, qui ſont comme la pointe, & qui ſont les plus éloignées du quarré *a b c d*, comme par *γ* ; & de là tournant vers quelque coſté qu'on voudra, ainſi qu'on voit en cette figure, (car il n'importe point par où on commence) en laquelle les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, vont de *γ* vers *α*. Puis on revient à la cellule exterieure voiſine de *γ*, & tirant vers le meſme coſté, on écrit les nombres ſuivants 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & les autres nombres enſuite, comme la figure le pourra mieux repreſenter que le diſcours.

Les nombres eſtant ainſi placez, je conſidere ceux qui ſe rencontrent dans les cellules du quarré *a b c d*, & les écris en la meſme diſpoſition & ſituation dans les cellules du quarré A B C D, appreſté pour cet effet, ainſi qu'on peut voir icy.

Cela fait, on remplira les places vuides avec les nombres des cellules qui sont hors du quarré *a b c d*, en prenant tout ce qui est dehors, sçavoir *e*, *g*, *α*, *h*, *f*, dans lesquelles cellules sont les nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7; & les plaçant, ainsi disposez & tournez comme ils sont, sur le costé opposé *c d*, sçavoir les trois cellules de la ligne *e f*, où sont les nombres 5, 13, 21, sur les trois cellules vuides du costé *c d*, marquées *l*, *m*, *n*.

α

							7							
						g 6		14 h						
					e 5		13		21 f					
				a 4		12		20		28 b				
			3		11		19		27		35			
		2		10		18		26		34		42		
γ	1		9		17		25		33		41		49	β
t		8		16		24	q	32		40		48		v
r			15		23	o	31	p	39		47			ſ
c				22	l	30	m	38	n	46				d
					29		37		45					
						36		44						
							43							

δ

A B

4		12		20		28
	11		19		27	
10		18		26		34
	17		25		33	
16		24		32		40
	23		31		39	
22		30		38		46

C D

Puis on mettra les deux cellules de *g*, *h*, où sont 6, 14, sur les deux vuides de *r*, *ſ*, marquées *o*, *p*, &c.

A B

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	17	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

C D

Enfin on mettra 7, qui est en la cellule *α*, en la cellule vuide, qui est au milieu de *t v*, marquée *q*, & ainsi les six nombres 5, 13, 21, 6, 14, 7, se trouveront dans le quarré en la mesme disposition, & tournez du mesme costé, qu'ils estoient hors du quarré. Les autres costez se rempliront de la mesme sorte; car on mettra les six nombres qui sont hors du quarré aux cellules *b*, *β*, *d*, sur le costé opposé *a c*, & sur les deux costez prochains, tirant vers *β*, en sorte que 49, qui est en *β*, soit plus prés du *β* que tous les autres, quand il sera placé.

De mesme les nombres de *d*, *δ*, *c*, seront placez du costé de *a b*, tournans leur pointe en bas vers *δ*, comme ils sont hors du quarré; & pareillement les nombres de *a*, *γ*, *c*, seront placez en la mesme façon sur *b*, *β*, *d*, & on aura le quarré magique parfait, ainsi qu'on peut voir icy.

On pourra user d'un autre moyen si on a peur de se méprendre, en voulant remplir les cellules vuides du quarré avec celles qui sont hors du quarré, qui sera comme s'ensuit.

Depuis chaque cellule remplie qui est hors du quarré, on comptera en tirant

vers le quarré autant de cellules tant pleines que vuides, que le quarré a de cellules à chaque costé, sçavoir 7 au quarré que nous avons pris pour exemple : ainsi comptant sept cellules depuis *e* où 5 est écrit, sans l'y comprendre, on rencontrera la cellule marquée *l* : & comptant de mesme sept cellules depuis celle où est le nombre 13, on rencontrera *m*, & comptant depuis *f*, on trouvera *n*. Il faudra donc remplir les trois cellules *l*, *m*, *n*, des nombres 5, 13, 21. Par la mesme raison le nombre de la cellule *g* viendra en *o*, & celuy de *h*, en *p*, & enfin celuy de *a*, en *q*.

Les autres costez se feront de mesme, car depuis chacune des cellules remplies de la figure *b β d*, qui sont hors du quarré, comptant sept cellules vers le quarré, & le costé *a c*, opposé au costé *b d*, on trouvera une cellule vuide, qu'on remplira du nombre qui est dans la cellule depuis laquelle on a compté 7, & on fera le mesme des cellules qui sont aux deux autres costez du quarré.

Variation des quarrez impairs, & particulierement du quarré qui a 5 de costé.

LES Tables des quarrez impairs se peuvent varier en diverses manieres selon qu'on disposera les rangs des nombres. Par exemple en la figure de 5, au lieu de ranger les nombres, ainsi qu'on peut voir en A, on les pourra aussi ranger comme on voit en B, & en C, & les autres, desquels on peut voir les quarrez achevez, qui sont placez à costé.

A

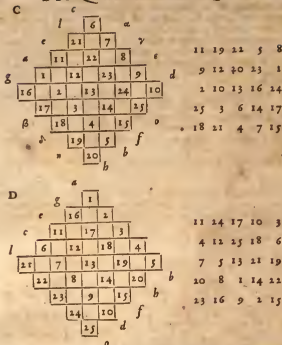
a
c | 1 | α
e | 6 | | 2 | γ
g | 11 | | 7 | | 3 | ε
l | 16 | | 12 | | 8 | | 4 |
| 21 | | 17 | | 13 | | 9 | | 5 |
| 22 | | 18 | | 14 | | 10 | b
β | 23 | | 19 | | 15 | d
δ | 24 | | 20 | f
n | 25 | h
o

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

B

c
a | 6 | α
e | 1 | 7 | γ
l | 11 | 2 | 8 | ε
g | 21 | 12 | 3 | 9 |
| 16 | 22 | 13 | 4 | 10 |
| 17 | 23 | 14 | 5 | d
β | 18 | 24 | 15 | b
δ | 19 | 25 | f
n | 20 | o
h

11	19	2	25	8
9	12	20	3	21
22	10	13	16	4
5	23	6	14	17
18	1	24	7	15



11	19	22	5	8
9	12	20	23	1
2	10	13	16	24
25	3	6	14	17
18	21	4	7	15

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

Le changement de ces figures est facile à comprendre par l'inspection de celles qui sont icy representées, ausquelles on voit qu'on peut transporter les lignes des nombres ainsi qu'on veut, pourvû qu'on change en mesme sorte la ligne correspondante ou relative. Or les lignes relatives sont celles qui sont également éloignées de celles du milieu; ainsi la relative de *a b*, en la figure A, est *l o*, & celle de *c d*, est *g h*: de mesme celle de *a l*, est *b o*, & celle de *α β*, est *ε n*.

Par exemple, la ligne correspondante de *a b*, est *l o*: & la correspondante de *c d*, est *g h*. Mais *e f* n'a point de correspondante, & ainsi elle ne peut estre ostée de sa place.

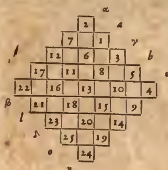
On voit en la figure B, que la ligne *c d* tient le premier lieu, & par consequent sa relative *g h* sera au dernier lieu; & *a b* estant au second lieu, sa relative *l o* sera au quatriéme.

En C, on a transposé la derniere ligne de A, sçavoir *l o*, & on l'a mise au second lieu, & sa relative *a b* au quatriéme lieu; le reste demeurant comme en B.

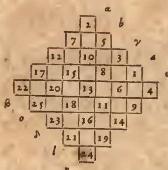
En D on a placé *g h* au second lieu, & sa relative *c d* au quatriéme, le reste demeurant comme en A.

On pourra ensuite transporter les lignes *α ζ*, *ε n*, *a l*, *b o*; & ainsi on auroit les figures suivantes par la transposition des lignes de la figure A; ausquelles transpositions on voit comme cy-devant, que la ligne *γ δ*, qui est au milieu, ne se change point, parce qu'elle n'a point de relative.

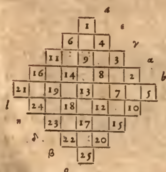
2



12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

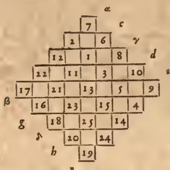


12	21	10	19	3
1	15	24	8	17
20	4	13	22	6
9	18	2	11	25
23	7	16	5	14

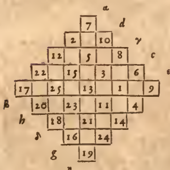


11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

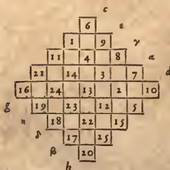
S'ensuivent les transpositions des lignes ε g, α β, &c. de la figure B. page 427.



12	20	1	24	8
10	11	19	3	22
21	9	13	17	5
4	23	7	15	16
18	2	25	6	14

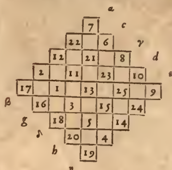


12	16	5	24	8
6	15	19	3	22
25	9	13	17	1
4	23	7	11	20
18	2	21	10	14

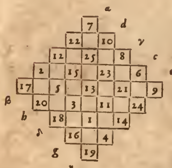


11	17	4	25	8
7	14	20	3	21
24	10	13	16	2
5	23	6	12	19
18	1	22	9	15

Voicy ensuite les transpositions de la figure C, page 428.



12	20	21	4	8
10	11	19	23	2
1	9	13	17	25
24	3	7	15	16
18	22	5	6	14

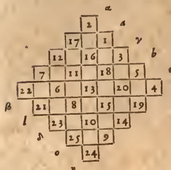


12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14

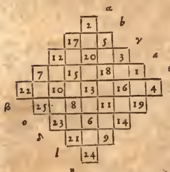


11	17	24	5	8
7	14	20	23	1
4	10	13	16	22
25	3	6	12	19
18	21	2	9	15

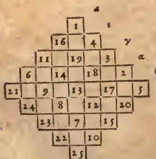
Enfin voicy les changemens de la figure D, page 428.



12	25	16	9	3
5	11	24	18	7
6	4	13	22	20
19	8	2	15	21
23	17	10	1	14



12	21	20	9	3
1	15	24	18	7
10	4	13	22	16
19	8	2	11	25
23	17	6	5	14



11	22	19	10	3
2	14	25	18	6
9	5	13	21	17
20	8	1	12	24
23	16	7	4	15

On

On peut encore varier ces tables d'une autre maniere, par exemple la premiere table de 5, qui est

A

a		*b*	*c*	*d*		*e*
	11	24	7	20	3	
α	4	12	25	8	16	*β*
γ	17	5	13	21	9	*δ*
ε	10	18	1	14	22	*η*
	23	6	19	2	15	
f		*g*	*h*	*l*		*p*

B

	11	20	7	24	3	
α	4	8	25	12	16	*β*
	17	21	13	5	9	
ε	10	14	1	18	22	*η*
	23	2	19	6	15	

C

11	24	7	20	3
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15

D

11	20	7	24	3
10	14	1	18	22
17	21	13	5	9
4	8	25	12	16
23	2	19	6	15

Considerant que les nombres des diagonales également distans du milieu 13, & pris deux à deux, font toûjours un mesme nombre, sçavoir le double de 13 : car de là s'ensuit que mettant la ligne *b g*, à la place de *d l*, on aura la table suivante qui est encore selon les regles, veu que la ligne *b g* estant égale à *d l*, la transposition ne leur apporte aucun changement, non plus qu'aux lignes, *a e*, *α β*, *γ δ*, &c. desquelles on n'oste aucun nombre. *Voyez la figure B.*

Toute la difficulté se pourroit rencontrer aux diagonales, mais les nombres également distans du milieu 13, faisant tous une mesme somme (ce qui arrive en toutes les tables faites comme il a esté montré cy-devant) on n'oste rien à l'une des diagonales, qu'on n'en remette autant en nombres equivalans ; ainsi en la diagonale *e f*, de la table A, au lieu de 8, 18, qui font 26, on remettra 12, 14, qui font pareillement 26.

On pourra encore changer la figure A, en transposant la ligne *α β*, & la mettant en la place de *ε η*, comme on voit cy-dessus en la figure C.

Aprés on changera tout ensemble les lignes *b g*, & *α β*, de la figure A, mettant *b g* à la place de *d l*, & *α β*, à la place de *ε η* : ou ce qui est la mesme chose, mettant seulement *α β*, de la figure B, en la place de *ε η*, on aura la figure D.

On changera encore d'une autre sorte la figure A, en mettant *e p*, à la place de *d l*, & *a f*, à la place de *b f*.

Comme aussi on pourra mettre *a e*, à la place de *α β*, & *f p*, à la place de *ε η*.

Enfin on fera tous ces changemens ensemble, ce qui donnera les trois figures suivantes ; en la premiere desquelles est le premier changement, en la seconde le second ; & en la troisiéme les deux ensemble.

Premiere.					Seconde.					Troisiéme.				
24	11	7	3	20	4	12	25	8	16	12	4	25	16	8
12	4	25	16	8	11	24	7	20	3	24	11	7	3	20
5	17	13	9	21	17	5	13	21	9	5	17	13	9	21
18	10	1	22	14	23	6	19	2	15	6	23	19	15	2
6	23	19	15	2	10	18	1	14	22	18	10	1	22	14

Si on donne à la figure B, les trois changemens, on aura aussi pareillement trois autres figures, qui sont les suivantes.

20	11	7	3	24	4	8	25	12	16	8	4	25	16	12
8	4	25	16	12	11	20	7	24	3	20	11	7	3	24
21	17	13	9	5	17	21	13	5	9	21	17	13	9	5
14	10	1	22	18	23	2	19	6	15	2	23	19	15	6
2	23	19	15	6	10	14	1	18	22	14	10	1	22	18

Pareils changements estant observez en C, donneront

24	11	7	3	20	10	18	1	14	22	18	10	1	22	14
18	10	1	22	14	11	24	7	20	3	24	11	7	3	20
5	17	13	9	21	17	5	13	21	9	5	17	13	9	21
12	4	25	16	8	23	6	19	2	15	6	23	19	15	2
6	23	19	15	2	4	12	25	8	16	12	4	25	16	8

De la figure D, on aura aussi les deux suivantes.

20	11	7	3	24	10	14	1	18	22
14	10	1	22	18	11	20	7	24	3
21	17	13	9	5	17	21	13	5	9
8	4	25	16	12	23	2	19	6	15
2	23	19	15	6	4	8	25	12	16

La troisieme est semblable à une figure qui est cy-devant au milieu de la page 431, & dont la premiere ligne est 12, 16, 25, 4, 8.

On aura donc par ce moyen quatorze transpositions de la figure marquée A, en la page 427, qui avec la figure A, font quinze figures, & parce qu'ensuite de la figure A, il y a encore 15 autres figures ; qui se font par le

rombe ou chassis; comme on peut voir aux pages 427, 428, 429, 430, 431 432, si chacune d'elles donne autant de figures differentes, on auroit en tout 240. figures: mais il faut prendre garde s'il n'y aura point de figures semblables parmi ce nombre.

Voicy des exemples de la figure B, de la page 427, que nous avons remise icy, afin de la comparer avec celles qui en proviennent.

11	19	2	25	8	
9	12	20	3	21	
22	10	13	16	4	B
5	23	6	14	17	
18	1	24	7	15	

11	25	2	19	8	11	19	2	25	8	11	25	2	19	8
9	3	20	12	21	5	23	6	14	17	5	14	6	23	17
22	16	13	10	4	22	10	13	16	4	22	16	13	10	4
5	14	6	23	17	9	12	20	3	21	9	3	20	12	21
18	7	24	1	15	18	1	24	7	15	18	7	24	1	15

Ce sont là les premiers changemens, chacun desquels souffre encore d'autres transpositions, ainsi que l'on a peû remarquer en la figure A, & qui donnent les figures suivantes.

9	12	20	3	21	19	11	2	8	25	1	18	24	15	7
11	19	2	25	8	12	9	20	21	3	12	9	20	21	3
22	10	13	16	4	10	22	13	4	16	10	22	13	4	16
18	1	24	7	15	23	5	6	17	14	23	5	6	17	14
5	23	6	14	17	1	18	24	15	7	19	11	2	8	25

9	3	20	12	21	25	11	2	8	19	3	9	20	21	12
11	25	2	19	8	3	9	20	21	12	25	11	2	8	19
22	16	13	10	4	16	22	13	4	10	16	22	13	4	10
18	7	24	1	15	14	5	6	17	23	7	18	24	15	1
5	14	6	23	17	7	18	24	15	1	14	5	6	17	23

5	23	6	14	17		23	5	6	17	14
11	19	2	25	8		19	11	2	8	25
22	10	13	16	4		10	22	13	4	16
18	1	24	7	15		1	18	24	15	7
2	12	20	3	21		12	9	20	21	3

5	14	6	23	17		25	11	2	8	19
11	25	2	19	8		14	5	6	17	23
22	16	13	10	4		16	22	13	4	10
18	7	24	1	15		3	9	20	21	12
9	3	20	12	21		7	18	24	15	1

Les deux places vuides montrent que les figures qui y devroient estre sont semblables à quelques-unes des tables précedentes, & elles ont esté obmises pour éviter la repetition.

On peut donc voir, que la table B, se varie en 14 façons elle comprise; mais la précedente table A, se varie en 15 sortes, d'où s'ensuit qu'on n'aura pas 240. variations en tout, car il faudroit que chacune des tables eust autant de variations que la premiere, ce qui n'est pas à cause que les mesmes reviennent.

On pourra faire les variations des autres tables ainsi qu'on a fait aux deux premiers A, & B, de la page 427.

Il se trouve encore d'autres variations, qui ne sont pas si faciles que les precedentes; sçavoir celles ausquelles le nombre 13, qui tient le milieu à toutes les tables précedentes se trouve changé, & hors de cette place.

Mais toutes les tables précedentes ne peuvent pas souffrir cette variation, car entre les premieres qui se font par les rombes ou chassis, il n'y a que la premiere marquée A, & la premiere de la page 431, & cette façon de changement, sçavoir de la figure A, ne fait pas que toutes sortes de nombres puissent occuper le milieu; mais on n'y pourra placer par cette voye que 7, 9, 17, 19.

Les autres figures qui sont ensuitte des premieres, donnent bien aussi quelques variations, qui neantmoins se peuvent faire sans elles en consequence des changements des deux premieres marquées A, A.

Voicy donc de qu'elle façon on changera la figure A.

a			c			e
	11	24	7	20	3	
	4	12	25	8	16	
A γ	17	5	13	21	9	δ
	10	18	1	14	22	
f	23	6	19	2	15	p
			b			

Cette

Cette figure se changera en quatre façons.

La premiere, mettant la ligne *ae*, à la place de *γδ*.

La seconde, mettant la ligne *ep*, à la place de *cb*.

La troisiéme, mettant la ligne *fp*, au lieu de *γδ*.

Et la quatriéme, mettant la ligne *af*, au lieu de *cb*. Et on aura les quatre figures suivantes, la premiere desquelles a 7 au milieu, au lieu de 13, la seconde a 9 au milieu, la troisiéme a 19, & la quatriéme 17.

	17	5	13	21	9		11	24	3	20	7		11	24	7	20	3
	4	12	25	8	16		4	12	16	8	25		4	12	25	8	16
H	11	24	7	20	3		17	5	9	21	13		23	6	19	2	15
	10	18	1	14	22		10	18	22	14	1		10	18	1	14	22
	23	6	19	2	15		23	6	15	2	19		17	5	13	21	9

7	24	11	20	3
25	12	4	8	16
13	5	17	21	9
1	18	10	14	22
19	6	23	2	15

On fera les mesmes changemens à cette autre figure marquée L, qui suit, comme on le peut voir: mais il faut montrer que ce changement-cy ne peut apporter aucune inegalité aux lignes, & parconséquent que les figures mêlées demeureront bonnes.

Parce qu'on transporte la ligne toute entiere de sa place, il ne peut pas arriver d'inégalité aux lignes; & toute l'inegalité qui pourroit survenir par ce changement, seroit aux diagonales. Mais le tout est bien récompensé; car au premier changement on met 7 à la place de 13, d'où il arriveroit que chacune des diagonales auroit faute de 6, mais ce 6 est mis en chacune d'elles en changeant les lignes, car mettant la ligne *γδ*, de la table A, à la place de *ae*, 17 occupera la place de 11, d'où vient que la diagonale *ap*, est augmentée de 6, ce qui récompense la diminution précedente de 7, au lieu de 13.

Pareillement 9 viendra à la place de 3, ce qui corrigera le défaut de la diagonale *ef*.

On verifiera de la mesme sorte, que les autres changemens n'ostent point les égalitez qui sont requises aux tables.

La figure L, sera variée en la mesme maniere; mais il faudra prendre une des lignes du milieu, au lieu qu'on changeoit les extrémes à la table precedente, comme on peut voir icy,

		α	*c*	*6*			
	12	16	25	4	8		
a	6	15	19	23	2	*e*	
γ	5	9	13	17	21	*δ*	L
f	24	3	7	11	20	*p*	
	18	22	1	10	14		
		β	*h*	*n*			

où on changera *α β*, en *c b*, pour avoir la premiere figure *ε η*, en *c h* pour la ſeconde, *a e* en *γ δ*, pour la troiſiéme, & enfin *f p*, en *γ δ*, pour la derniere, & on aura les figures ſuivantes.

12	25	16	4	8
6	19	15	23	2
5	13	9	17	21
24	7	3	11	20
18	1	22	10	14

12	16	4	25	8
6	15	23	19	2
5	9	17	13	21
24	3	11	7	20
18	22	10	1	14

12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14

12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
24	3	7	11	20
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14

Chacune de ces figures, & des quatre autres precedentes qui ſont en l'autre page, ſouffrent encore pluſieurs ſortes de changemens, dont on donnera icy quelques exemples.

Premierement on leur peut attribuer les meſmes changemens qu'à la figure dont elles proviennent : ainſi la premiere figure de celles qui viennent de A, ſçavoir celle qui eſt icy marquée H, ſouffre les meſmes variations que A, car on pourra tranſpoſer *a f*, & *e p*, en *c b*, & pareillement *a e*, & *f p*, en

	a			c		e	
		17	5	13	21	9	
		4	12	25	8	16	
H	γ	11	24	7	20	3	δ
	ε	10	18	1	14	22	η
		23	6	19	2	15	
	f			b		p	

γ δ, mais entre ces tables il y en auroit une ſemblable à la table A : on mettra ſeulement icy celles qui ont un nouveau nombre au milieu ; car il

n'y a aucun nombre impair, qui ne puiſſe tenir le milieu de la figure, comme l'on voit par les ſuivantes.

13	5	17	21	9		17	5	9	21	13
25	12	4	8	16		4	12	16	8	25
7	24	11	20	3		11	24	3	20	7
1	18	10	14	22		10	18	22	14	1
19	6	23	2	15		23	6	15	2	19

De ces deux on pourra auſſi faire les ſuivantes.

13	5	17	21	9		17	5	9	21	13
25	12	4	8	16		4	12	16	8	25
19	6	23	2	15		23	6	15	2	19
1	18	10	14	22		10	18	22	14	1
7	24	11	20	3		11	24	3	20	7

Il y a encore une autre tranſpoſition de la figure H cy-devant, ſçavoir en mettant ε η, à la place de γ δ, comme on voit icy.

17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
23	6	19	2	15

Et changeant en cette meſme ſorte les trois autres figures de la page 437. on aura les ſuivantes.

11	3	24	20	7		11	24	7	20	3		7	24	20	11	3
4	16	12	8	25		23	6	19	2	15		25	12	8	4	16
17	9	5	21	13		4	12	25	8	16		13	5	21	17	9
10	22	18	14	1		10	18	1	14	22		1	18	14	10	22
23	15	6	2	19		17	5	13	21	9		19	6	2	23	15

On a donc icy des exemples de tous les nombres impairs qui tiennent le mi-

lieu des figures; pour ce qui est des nombres pairs, il y auroit plus de difficulté à leur faire tenir le milieu de la figure, & peut-estre il est impossible.

Ces figures se varient encore d'une autre sorte, dont il a esté fait mention cy-devant: par exemple, la figure H se variera, mettant *a b*, en la pla-

a						*b*	
	17	5	13	21	9		
	4	12	25	8	16		
	11	24	7	20	3		H
f	10	18	1	14	22	*g*	
	23	6	19	2	15		
c						*d*	

ce de *c d*, comme aussi *a c*, en la place de *b d*: & enfin, assemblant ces deux variations; sçavoir, transposant tout ensemble *a b*, en *c d*, & *a c*, en *b d*, on aura les trois tables suivantes.

	9	5	13	21	17	23	6	19	2	15	15	6	19	2	23
	16	12	25	8	4	4	12	25	8	16	16	12	25	8	4
F	3	24	7	20	11	11	24	7	20	3	3	24	7	20	11
	22	18	1	14	10	10	18	1	14	22	22	18	1	14	10
	15	6	19	2	23	17	5	13	21	9	9	5	13	21	17

Les autres tables peuvent souffrir les mesmes variations, qui seroient trop longues à deduire, & cela fera une fort grande quantité de tables differentes: & celles-cy suffiront pour faire voir de quelle façon elles se pourront trouver.

On pourra encore faire d'autres sortes de transpositions; par exemple, de la figure F, mettant la ligne 9, 5, 13, 21, 17, à la place de 16, 12, 25, 8, 4, parce que 17, & 8, qui sont dans la diagonale, sont égaux à 21, & 4. Et pareillement de l'autre costé 16, & 5, sont égaux à 9 & 12, & pareillement on pourra mettre la ligne 3, 24, 7, 20, 11, à la place de 22, 18, 1, 14, 10, parce que 14, & 7, en la diagonale sont égaux à 20, & 1; & pareillement 7, & 18, sont égaux à 24, & 1.

Comme aussi en la figure H, on pourroit transporter la ligne 17, 5, 13, 21, 9, à la place de 10, 18, 1, 14, 22, parce que les nombres de la diagonale 9, & 18, sont égaux à 5, 22, & les deux 17, 14, à 21, & 10. On peut voir ces deux tables transposées à la page suivante, & cette transposition se peut faire toutesfois & quantes qu'on peut choisir un quarré dans la figure qui ait deux de ses angles dans la diagonale de la figure, & auquel les nombres des angles opposez soient égaux à ceux des deux autres angles, & que la mesme chose arrive au quarré pris dans les mesmes lignes qui bornent le quarré dans l'autre costé de la figure.

Ainsi

Ainsi en la figure H je choisis un quarré dont les angles sont 5, 9, 22, 18, dont deux, sçavoir 18 & 9, sont dans la diagonale, & les angles opposez, comme 18 & 9, sont ensemble égaux aux deux autres 22 & 5 ; & si on prend le quarré qui est de l'autre costé de la figure entre les mesmes lignes *a b*, & *f g*, dont les angles sont 17, 21, 14, 10, on trouvera de mesme que les angles opposez 17, 14, sont égaux aux deux autres 10, 21.

16	12	25	8	4	9	5	13	21	17	10	18	1	14	22
9	5	13	21	17	16	12	25	8	4	4	12	25	8	16
3	24	7	20	11	22	18	1	14	10	11	24	7	20	3
22	18	1	14	10	3	24	7	20	11	17	5	13	21	9
15	6	19	2	23	15	6	19	2	23	23	6	19	2	15

Les tables, dont le costé est pair, se trouveront d'une autre façon, laquelle est aussi commune avec les impairs ; mais premierement nous donnerons celle de 16, qui a 4 de costé.

Il faut disposer les 16 nombres selon leur ordre naturel, comme on voit icy.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Puis on marque les diagonales avec des points, afin de remarquer les nombres qui s'y trouvent, car les mesmes seront aussi dans les diagonales de la table, en mesme situation qu'ils sont icy. Je mets donc à part les nombres qui composent les diagonales en la mesme disposition, comme il est icy marqué.

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Et pour achever la table on met les nombres qui sont hors des diagona-

les, vers leurs opposez en croix; sçavoit 14 à la place de 3, 15 à la place de 2, 12 à la place de 5, & 8 à la place 9, & on aura la figure suivante.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

METODE GENERALE pour faire les Tables Magiques.

PAR la methode suivante on pourra faire toutes sortes de tables tant paites qu'impaires, mais il faut remarquer une proprieté particuliere des tables faites par cette methode, qui est que si on oste l'enceinte de quelqu'une de ces tables, celle qui restera ne laissera pas d'avoir encore toutes ses lignes égales; & si de ce reste on oste encore une enceinte, le reste aura encore ses lignes égales, & ainsi jusqu'à ce que la derniere table qui reste n'ait plus que 4 de costé, si elle est paire, & 3 de costé si elle est impaire : car il n'y a point de table de 4 de costé, dont ostant une enceinte, le reste ait ses lignes égales.

Exemple. Que la table ait 12 de chaque costé, si on oste la premiere enceinte, il restera une table qui aura 10 à chacun de ses costez, & qui aura encore ses lignes égales. Et ostant une enceinte de cette table de 10, on aura une table de 8 qui aura encore toutes ses lignes égales.

Et si de cette table de 8 on oste encore une enceinte, il restera une table de 6.

Enfin si on oste une enceinte de cette table de 6, il restera une table de 4, qui aura encore les conditions requises.

Et ainsi ayant une table de 12, on en aura aussi une de 10, une de 8, une de 6, & de 4.

On trouve ensuite des moyens pour faire qu'il n'y ait qu'une seule table qui soit bonne, & qu'ostant les enceintes, celle qui reste ne soit plus selon les regles; ou si l'on veut, telle table qu'on voudra sera bonne, & les autres ne vaudront rien. Ainsi ayant une table de 12, on pourra faire qu'ostant quelques enceintes qu'on voudra, le reste ne soit pas bon; ou bien que les tables de 8 & de 4 qui y sont contenuës, seront bonnes, & les autres non; & cela se peut faire en toutes les manieres qu'on voudra.

Mais parce que les exemples apprendront mieux la maniere de faire ces tables, que tous les preceptes qu'on en pourroit donner, il sera plus à propos de faire connoistre ceux-cy par le moyen de ceux-là.

Exemple premier d'une table de 6.

IL faut en premier lieu disposer les nombres dont on doit remplir les 36 cellules de la table, selon leur ordre naturel, & en faire deux lignes, qui seront l'une dessus l'autre, en telle sorte que les nombres des deux lignes qui sont l'un sur l'autre fassent 37, sçavoir 1, plus que le plus grand nom-

bre, qui est 36, comme on les voit icy; & les nombres de ces deux lignes se nommeront relatifs: ainsi 35 est relatif de 2, 34 de 3, & ainsi des autres: de mesme 6 sera relatif de 31, 7 de 30, &c.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Et cela se doit observer en toutes tables, afin de pouvoir avec plus de facilité choisir les nombres dont on a besoin.

Aprés on prendra seize nombres, sçavoir huit de la premiere ligne, & les huit correspondans ou relatifs dans la seconde. Il sera bon que les huit nombres soient de suitte, ou qu'ils ayent entre eux une difference égale, quoy-qu'il suffise que quatre de ces nombres ayent une mesme difference, & les quatre autres aussi, & ensuite on prendra leur relatifs; car en cette façon de construire les tables, il faut estre soigneux de ne prendre jamais un nombre, qu'on ne se serve aussi de son relatif, autrement on ne pourroit pas faire une table par cette methode.

Je prens donc les huit premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, & leurs relatifs 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, qui sont seize nombres, dont je fais une table de 4, ainsi qu'il a esté enseigné à la page 441 du Traité précedent; sçavoir écrivant les seize nombres, comme on voit icy.

1	2	3	4
5	6	7	8
29	30	31	32
33	34	35	36

Puis retenant les diagonales, comme l'on voit dans la figure suivante.

1			4
	6	7	
	30	31	
33			36

Et enfin remplissant les espaces vuides, en y mettant les nombres opposez en croix; sçavoir 35 à la place de 2, & 2 à la place de 35, puis 34 à la place de 3, & ainsi des autres, on aura la figure disposée comme il suit.

1	35	34	4
32	6	7	29
8	30	31	5
33	3	2	36

Ces nombres étant employez, je les marque par quelque signe, comme on peut voir en la page 443, où tous les trente-six nombres sont de suite en deux lignes, afin qu'on puisse connoistre ceux qui ont déja servi à faire la table interieure, & qu'on ne prenne point deux fois un mesme nombre.

Cela fait, je choisis deux nombres de ceux qui restent, pour mettre prés des angles de la figure de quatre, sçavoir en continuation de sa diagonale, qui serviront d'angles à l'autre enceinte exterieure.

On prendra par exemple 9 & 10 pour les deux angles, ou extrémitez d'une qui mesme ligne.

Ayant mis les nombres 9 & 10 aux angles prochains, & non pas opposez, je mets leurs complémens aux angles opposez, comme on voit icy, sçavoir 28 à l'opposite de 9, & 27 à l'opposite de 10.

9					10
	1	35	34	4	
	32	6	7	29	
	8	30	31	5	
	33	3	2	36	
27					28

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Cela fait, je considere ce qu'il faut dans deux lignes prochaines de la derniere enceinte pour les achever; car lors qu'on a deux lignes prochaines, les complémens des nombres donnent les opposez. Je trouve que dans la ligne 9, 10, il faut 92 pour parfaire la ligne; car chaque ligne doit estre de 111; ce qui se trouve multipliant la somme des deux nombres extrémes de la figure, qui sont 1, & 36, dont la somme est 37, par la moitié des nombres qui sont en chaque ligne, sçavoir par 3.

Et de ce produit 111, ostant 19, qui est la somme de 9 & 10, il restera 92 pour la somme des quatre nombres qui doivent estre mis entre 9 & 10.

De mesme, si de 111 j'oste 38, qui est la somme de 28 & 10, qui sont aux angles qui bornent la ligne 10, 28, il restera 73 pour les quatre nombres qui manquent à ligne 10, 28.

Il faut donc chercher dans les nombres qui restent, quatre nombres, dont la somme soit 92, & quatre autres dont la somme soit 73, à telle condition toutefois, qu'aprés avoir pris un nombre, on ne se serve plus de son complément dans ces deux premieres lignes, parce que ce complément doit estre mis dans la ligne opposée; ce qui doit toujours estre exactement observé.

Pour venir plus facilement à bout de cela, l'on écrira les nombres qui restent de suite, & leurs complémens au dessous, comme il suit.

11	12	13	14	15	16	17	18
26	25	24	23	22	21	20	19
|	|		|				|

Cela fait, je cherche quatre nombres dans ces deux lignes qui fassent 92: je trouve 26, 25, 23, 18: je les marque au dessous avec de petites lignes, afin de ne les plus reprendre, ny leur complémens aussi. Aprés, je choisis quatre nombres dans les huit qui restent, qui fassent 73; mais en choisissant les

les deux premiers, il faut faire en sorte qu'il ne reste pas 37 pour les deux autres, ainsi les deux nombres ne pourront pas estre 16, & 20, qui font 36, parce qu'il resteroit 37 pour les deux autres nombres, ce qui ne se peut faire que par deux relatifs, comme par 15, 22, & 13, 24, ce qui est contre les regles; c'est pourquoy il faudra prendre deux nombres qui fassent plus ou moins de 36, comme 21, & 17, qui font 38, & reste 35. Pour achever 73, on fera 35 avec 13, & 22: on aura donc les quatre nombres 21, 17, 13, 22, qu'on mettra entre 10, & 28, & il n'importe pas en quel ordre, pourveu que vis-à-vis d'eux en la mesme ligne de la colomne opposée; sçavoir entre 9, & 27, on mette leurs complémens selon le mesme ordre, comme on voit en la figure qui est achevée en la page precedente.

De mesme, je mets entre 9 & 10 les quatre nombres qui ont esté premierement trouvez, sçavoir 26, 25, 23, 18; & vis-à-vis en la ligne opposée, & entre 27, 28, je mets leurs complémens 11, 12, 14, 19. Et ainsi on aura la figure parfaite.

Second exemple de la table de 6.

IL y a une chose à observer quand les nombres de la table interieure de quatre sont tout de suite, & que les vingt de l'enceinte exterieure sont les dix premiers, & leurs complémens; sçavoir,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27

En ce cas il ne faudra pas prendre pour les angles prochains, deux nombres qui soient en quotité pairs ou impairs, sçavoir en cet éxemple deux pairs ou deux impairs, comme 2, 4, ou 3, 5, ou 5, 9, & autres semblables, autrement on ne pourroit pas achever la table, parce qu'il arrive toûjours en faisant la seconde ligne, que la somme des nombres est paire quand elle doit estre impaire; & au contraire, la raison est qu'en la seconde ligne il faut toûjours prendre deux des grands nombres, & deux des moindres, à cause qu'ils sont beaucoup differens l'un de l'autre.

Voicy une table qui a ces nombres à son enceinte exterieure;

1	8	31	32	35	4
27	11	25	24	14	10
34	22	16	17	19	3
9	18	20	21	15	28
7	23	13	12	26	30
33	29	6	5	2	36

1] 2 3 5 6 7 8 9 10 [4 | 106 / 71

35 34 32 31 30 29 28 27

Il arrive assez souvent en ces petites figures, à cause du peu de nombres

qu'il y a en chaque ligne; qu'ayant choisi les quatre pour la premiere ligne, ceux de la seconde ne peuvent pas faire la somme qui seroit necessaire; comme en cet exemple, si entre 1 & 4 on mettoit 35, 32, 30, 9, qui ensemble font 106, ainsi qu'il est requis, il resteroit 3, 6, 8, 10, & leurs complémens 34, 31, 29, 27, qu'on ne peut pas employer pour faire 71, qui est la somme que doivent avoir les quatre nombres qu'on doit mettre entre 4 & 36, c'est pourquoy on changera les quatre de la premiere ligne qui sont entre les angles, & au lieu de 35, 32, 30, 9, on en prendra d'autres équivalens; par exemple, 35, 32, 29, 10. Mais parce que les nombres qui restent pour l'autre ligne ne peuvent pas encore faire 71, il les faudra encore changer, & prendre 35, 31, 30, 10, & ceux qui resteront pourront faire 71, comme l'on voit assemblant les quatre nombres, 3, 8, 28, 32.

Que si aprés avoir changé les lignes en diverses manieres, on ne pouvoit trouver son compte, il faudroit avoir recours aux angles & les changer, ou du moins l'un d'eux, & son complément, tant que la difficulté cesse.

Enfin cela dépend plus de l'industrie de celuy qui cherche, que non pas de certaine regle infaillible qu'on pourroit donner pour cet effet, laquelle se peut bien trouver pour les impairs, comme il a esté montré cy-devant, mais la mesme chose ne succede pas aux tables paires. Voicy pourtant une methode qui facilitera beaucoup cette recherche.

Ayant écrit les huit nombres entre les deux qui sont aux angles, comme on voit au bas de la page 445, on mettra en suite la valeur des quatre nombres qui doivent estre entre 1 & 4, qui est 106, parce qu'ostant 5, sçavoir la somme de de 4 & 1, de 111, qui est la valeur de chaque ligne, il reste 106; on mettra aussi la valeur des quatre nombres qui doivent estre entre 4 & 36, qui est 71; je cherche aprés quatre nombres dans les seize des deux lignes, qui vallent 106, à telle condition qu'aprés avoir pris un des nombres, on ne prenne pas aussi son complément, & commençant par les deux plus grands 35 & 34, qui ensemble vallent 69, il faut oster cette somme de 106, reste 37; qui estant la somme des deux relatifs, ne peut pas estre employée dans ces tables. Il faut donc prendre deux autres nombres, sçavoir 35 & 32, la somme est 67, qui ostée de 106, reste 39, on fera 39 avec 31, 8: on aura donc les quatre nombres 35, 32, 31, 8, qu'il faudra mettre entre 1 & 4 de la table A. Il faut aprés remplir la ligne 4, 36 avec quatre des nombres qui restent, qui sont 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27.

Voicy comme on y procedera. Il faut assembler les quatre moindres nombres, sçavoir 3, 7, 9, 10: la somme est 29, qui ostée de 71 qui est la valeur de quatre nombres, qui doivent estre mis entre 4 & 36 de la table A, reste 42. Il faut

A

1					4
	11	25	24	14	
	22	16	17	19	
	18	20	21	15	
	23	13	12	26	
33					36

voir si on pourra faire 42 avec la difference qui est entre les quatre nombres 3, 7, 9, 10, & leurs complémens 34, 30, 28, 27; comme on peut voir en cette figure,

3 7 9 10

21 23 19 17

34 30 28 27

& leur difference entre deux ; on trouve 23 & 19 differences entre 7, 30, & 9, 28, qui font 42. On prendra donc 3, 30, 28, 10, pour les quatre nombres qui doivent estre mis entre 4, 36, qui sont aux extrémitez de la derniere colomne, car puisque les quatre nombres 3, 7, 9, 10, manquent de 42 pour faire 71, qui est la valeur de quatre nombres qui doivent estre entre 4 & 36, & que 30 & 28 surpassent 7 & 9 de 42, il faudra prendre 30 & 28, au lieu de 7 & 9 ; on aura donc la table accomplie, comme on la voit icy, mettant les quatre

1	35	32	31	8	4
34	11	25	24	14	3
7	22	16	17	19	30
9	18	20	21	15	28
27	23	13	12	26	10
33	2	5	6	29	36

nombres cy-devant trouvez, sçavoir 35, 32, 31, 8, entre 1 & 4, & les complémens de ces nombres 2, 5, 6, 29, en la mesme colomne, & vis à vis des precedens en la ligne opposée, avec les deux nombres 33, complément de 4 & 36, complément de 1, qu'il faut mettre aux angles en mesme diagonale : puis entre 4 & 36 on mettra les quatre autres nombres 3, 30, 28, 10, & leurs relatifs 34, 7, 9, 27, vis à vis des precedens dans la colomne opposée, & à l'autre extremité de la mesme ligne.

Si on avoit pris 1, 3, pour les nombres qui doivent estre aux angles, ou aux extremitez d'une mesme ligne, on ne pourroit pas parfaire cette ligne, comme il a esté remarqué cy-devant. La raison est, qu'on est obligé pour

1] 2 4 5 6 7 8 9 10 [3 | 107 / 72

35 33 32 31 30 29 28 27

| | | |

faire 107, de prendre trois nombres de la ligne inferieure, où sont les plus grands nombres, & un de la superieure, parce que les quatre moindres de la ligne inferieure, sçavoir 27, 28, 29, 30, font plus de 107, encore que 107 soit le plus grand nombre que puissent avoir les quatre nombres, en prenant des nombres semblables pour les angles, sçavoir tous deux pairs ou impairs, & si on n'en prenoit que deux dans la ligne inferieure, & deux dans la superieure, ils ne seroient pas assez grands ; car encore que l'on mit aux angles les plus grands nombres de la ligne superieure, sçavoir 8 & 10 qui sont semblables en parité ou imparité, estant tous deux pairs, il resteroit 93 pour la somme des quatre nombres qui devroient estre entre deux. Or prenant les deux plus grands nombres de la ligne inferieure, & les deux plus grands de la su-

perieure, ſçavoir 35, 33, 7, 9, ils feront moins de 93. Il faut donc prendre trois nombres de la ligne inferieure, & un de la ſuperieure.

Or aprés avoir pris ces quatre nombres qui faſſent 107, ou autre nombre requis: Par exemple, aprés avoir pris 35, 33, 32, 7, qui font 107, on ne pourra jamais faire 72, qui eſt la ſomme des nombres qui doivent faire l'autre ligne, avec quatre des nombres qui reſtent; car prenant deux de ces nombres dans la ligne inferieure, & deux dans la ſuperieure, comme il eſt neceſſaire pour faire 72, ſçavoir la ſomme des quatre nombres qui doivent achever

1]	2	4	5	6	7	8	9	10	[3	107
	35	33	32	31	30	29	28	27		72
	|	|	|		|					

l'autre ligne; en ſorte que dans ces quatre nombres il n'y en ait point deux qui ſoient relatifs, c'eſt à dire dont la ſomme faſſe 37, car il arrivera toûjours que la ſomme de ces quatre nombres ſera un nombre impair, au lieu que 72 eſt pair. Ainſi prenant 31, 29, qui enſemble font un nombre pair, il reſtera 9, 10, qui enſemble font un impair, & ainſi la ſomme des quatre ſera impaire.

De meſme, ſi on prenoit 31, 28, dont la ſomme eſt impaire, les deux autres qui reſtent ſeroient 10, 8, dont la ſomme eſt paire, qui jointe à la ſomme precedente qui eſt impaire, la ſomme ſera encore impaire; & cela arrivera toûjours de la meſme façon, ſi ce n'eſt que les nombres ſoient tels, qu'on puiſſe prendre pour la ſeconde ligne trois nombres dans une des lignes, & un dans l'autre; ou bien que pour la premiere ligne, on puiſſe prendre tous les quatre nombres dans une meſme ligne.

Pour les tables impaires, ſi on les veut faire en la meſme maniere que les paires; ſçavoir, faiſant que les relatifs ſoient oppoſez, il faut prendre garde qu'entre les nombres qui doivent ſervir à remplir les deux coſtez prochains, c'eſt-à-dire, qui aboutiſſent à un meſme angle, aprés que ceux des angles ſeront placez, s'il ſe trouve des impairs ils doivent eſtre en multitude paire, comme 2, 4, ou 6, &c. ce qui ſe doit entendre prenant le nombre & ſon complément pour un ſeul nombre, car s'il n'y avoit qu'un impair, ou 3, ou 5, ou autre multitude impaire pour les deux lignes qu'il faut remplir, cela ne ſe pourroit; la raiſon eſt, que ſi les deux nombres des angles ſont tous deux pairs, ou tous deux impairs, la ſomme des nombres qui reſtent à mettre en chaque ligne doit eſtre impaire; à cauſe que la ſomme des nombres de la ligne doit eſtre impaire, ſuppoſant que les nombres commencent par 1, & ſoient de ſuite. Si donc on avoit trois impairs, ou autre multitude impaire, il faudroit les mettre tous trois dans une meſme ligne pour la faire impaire, ou ſi l'on n'en mettoit qu'un, il en reſteroit deux pour l'autre ligne, ce qui fera que cette portion de ligne ſera impaire, ſçavoir autrement qu'elle ne doit eſtre, à cauſe des nombres qui ſont aux angles, dont la ſomme eſt impaire, & joignant cette impaire à l'autre portion de ligne qui ſeroit auſſi impaire; ſçavoir, la portion qui eſt entre les deux angles, feroit toute la ligne paire; mais elle doit eſtre impaire.

Que ſi le nombre de l'un des angles eſt pair, & l'autre impair, la ſomme des nombres qui reſtent à mettre à chaque ligne ſera paire; & ainſi eſtant contraint de mettre à une des lignes un ou trois impairs, cela fera que la portion de la ligne qui eſt entre deux angles ſera impaire, ſçavoir autrement qu'elle ne doit eſtre.

Ainſi

Ainsi aprés avoir fait la table de trois, qui est cy-dessous, pour faire l'enceinte exterieure de cinq, on a de reste les nombres 1, 3, 4, 6, &c. & leurs complémens, comme on voit en suite. Si on met donc 1 à l'un des angles, & son complément 25 à l'angle opposé, & qu'à l'autre angle on mette le nombre suivant 3, il resteroit trois impairs dans la ligne superieure pour remplir les deux lignes, sçavoir 7, 9, 11, c'est pourquoy on ne pourra pas mettre 3 à cet angle, ny aucun autre impair, mais un pair comme 4, parce que mettant 4, il restera 4 impairs; sçavoir 3, 7, 9, 11, & on pourra achever la table de 5, comme on la voit en suite.

1	3	4	6	7	9	11	12
25	23	22	20	19	17	15.	14

1				4
	10	24	5	
	8	13	18	
	21	2	16	
22				25

1	23	20	17	4
19	10	24	5	7
11	8	13	18	15
12	21	2	16	14
22	3	6	9	25

Troisiéme exemple de 6.

ON n'est pas obligé de prendre huit nombres de suite, & leurs complémens, pour faire la table interieure qui a quatre de costé; mais il suffit que quatre de ces nombres ayent mesme difference, & les quatre autres pareillement. Ainsi on pourra prendre 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, & leurs complémens 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, pour la table de quatre qui sera

1	35	34	4
29	9	10	26
11	27	28	8
33	3	2	36

13	22	20	30	12	14
5	1	35	34	4	32
31	29	9	10	26	6
21	11	27	28	8	16
18	33	3	2	36	19
23	15	17	7.	25	24

Et prenant pour les angles 13 & 14, & leurs complémens 24 & 23, on aura la figure de 6 cy-dessus.

Quatriéme exemple de 6.

ON peut aussi commencer les huit, & leurs complémens, de la table interieure de quatre, par un autre nombre que 1, & aussi ne les point prendre de suite, comme on voit en la table suivante, en laquelle on a pour

la table interieure de 4, les nombres 2, 4, 6, 8, 13, 15, 17, 19, & leurs complémens 18, 20, 22, 24, 29, 31, 33, 35. Laquelle table de 4 sera,

2	33	31	8
24	15	17	18
19	20	22	13
29	6	4	35

A … B

1	34	27	26	16	7
9	2	33	31	8	28
14	24	15	17	18	23
25	19	20	22	13	12
32	29	6	4	35	5
30	3	10	11	21	36

D … C

Et prenant pour les angles 1 & 7, & leurs complémens 36, 30, on fera la derniere enceinte qui est l'exterieure des nombres qu'on voit à la figure cy-dessus.

Cette derniere façon se trouve assez souvent difficile, car il peut arriver qu'on prendra pour les angles de tels nombres, que les lignes de l'enceintre exterieure ne pourront pas estre remplies, ou ce ne sera qu'aprés une recherche ennuieuse. Par exemple, si on prenoit 10 & 16, & leurs complémens 27 & 21 pour les angles de l'enceinte exterieure, au lieu de 1, 7, 36, 30, on ne pourroit parfaire la figure, & on seroit contraint de prendre d'autres nombres pour les angles.

Pour voir maintenant de quels nombres il faut remplir les lignes, je considere combien il faut de reste à chaque ligne, ou plûtost à deux, sçavoir à deux lignes qui ne soient point opposées l'une à l'autre : Par exemple, je cherche combien il faut pour achever la ligne A, B, & la ligne B, C, ausquelles on suppose déja les coins 1 7, & 7 36.

Or parce que chaque ligne doit contenir 111 en ses six nombres, il faut pour la ligne A, B, prendre la somme de 1 & 7, qui est 8, & l'oster de 111, restera 103 que doivent faire les quatre nombres qui restent à trouver pour la ligne A, B.

De mesme je prens la somme de 7 & 36, qui est 43, que j'oste de 111, reste 68 pour les quatre nombres qu'il faut mettre à la ligne B C.

Pour les deux autres lignes C D, & A D, il ne s'en faut pas mettre en peine ; car elles s'ensuivent necessairement de leurs opposées A B, BC, puisque l'une des lignes doit avoir les complémens de la ligne qui luy est opposée.

Je prens aprés, les huit nombres qui restent, & les complémens au dessous, comme on voit icy.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103	
34	3
28	9
27	10
14	23

Puis j'écris à part la somme que doivent faire ensemble les quatre nombres de chacune des deux lignes, sçavoir 103 & 68, & je cherche quatre nombres qui fassent l'un de ces nombres, par exemple 103 ; mais afin de voir si on peut trouver quatre nombres qui fassent 103, & quatre autres qui fassent 68, il faut faire toutes les combinaisons possibles. Premierement, je prendray 34 & 32, qui ensemble font 66, & pour aller jusques à 103, il faut encore 37 pour deux nombres. Mais on ne peut trouver deux nombres qui

fassent 37, s'ils ne sont complémens l'un de l'autre. Or il ne faut jamais mettre en une mesme ligne deux nombres qui soient les complémens l'un de l'autre, parce que le complément de chaque nombre se doit mettre en la ligne opposée, ce qu'il faut entendre pour cette methode seulement; car il y a diverses voyes par lesquelles on pourra bien faire, que deux nombres qui soient les complémens l'un de l'autre, se trouvent en mesme ligne.

Puis donc que 32 ne peut estre avec 34, je prens le nombre suivant 28, qui avec 34 fait 62; & parce que la ligne doit avoir 103, les deux autres nombres doivent faire ensemble 41. Je prens donc le nombre qui suit 28, sçavoir 27 qui avec 14 fait 41. Voilà pour la ligne A B.

Je viens maintenant à la ligne B, C, qui doit avoir 68 en ses quatre nombres, qui doivent estre mis entre les coins B & C, & les quatre nombres qui restent sont,

restent sont,	32	26	25	21
& leurs complémens qui sont au dessous,	5	11	12	16

Je prens premierement 32, lequel étant joint à 26 donnera 58, & parce que la ligne doit avoir 68, il ne reste plus que 10 qu'il faudroit faire avec deux nombres, ce qui ne se peut avec les quatre nombres restans, 25, 21, 16, 12.

Si on joint 32 à 25, ou mesme à 21, on tombera en mesme inconvenient, car 32 & 21 font 53, qui ostez de 68 reste 15, qu'il faut faire en deux nombres; mais il ne reste plus que 12 & 11 qui font plus de 15.

Si on joint 32 à 16, on aura 48, qui ostez de 68 restera 20, qui ne se peuvent faire par 11 & 12.

On ne sçauroit passer plus outre, parce que si on joignoit 12 à 32, on seroit contraint de mettre aussi en mesme ligne que 32 quelqu'un des nombres precedens, ce que neantmoins on a reconnu estre impossible.

Il faut donc prendre un autre nombre que 32, puisqu'il ne peut estre en la ligne B C, & ce sera le nombre suivant 26, qui estant joint à 25 fait 51, qui ostez de 68, reste 17, qu'il faut faire avec deux nombres pris dans les trois qui restent, qui sont 21, 16, 5, car 32 en a déja esté exclus. Mais 17 ne se peut faire avec ces nombres.

On joindra aprés 26 à 21: la somme est 47, qui estans ostée de 68, reste 21, qu'il faudroit faire avec les deux nombres qui restent 12 & 5; mais parce qu'ils sont trop petits pour cet effet, il ne faut point passer outre, car ce seroit encore pis, si on joignoit 26 à 16, ou 25 à 21.

Puis donc que cette seconde ligne B C ne se peut faire, il faut changer la premiere ligne A B.

Mais afin de n'omettre aucune façon par laquelle on la puisse faire, (car si on en laissoit quelqu'une ce pourroit estre celle dont on auroit besoin) il faut continuer par le mesme ordre qu'on a commencé.

On avoit pris 34 & 28 pour les deux premiers nombres, & il restoit 41 à faire en deux nombres pour aller jusques à 103.

Pour faire ces 41 on avoit pris 27 & 14, lesquels n'ayans pas bien réussi, je cherche si on peut faire les mesmes 41 avec deux autres nombres, & je trouve 25 & 16.

Il restera donc pour la seconde ligne les quatre nombres,	32	27	26	23
& leurs complémens	5	10	11	14

Si on examine ces nombres comme cy-devant, on trouvera qu'on ne peut en choisir quatre d'entr'eux, qui ensemble fassent 68, pourveû qu'il n'y en ait point deux qui soient complémens l'un de l'autre, car on pourroit bien prendre 27, 26, 10, 5, qui ensemble font 68; mais parce que 27 & 10 sont com-

plémens l'un de l'autre, on ne pourroit avec eux parfaire la figure, comme il a esté dit.

								103	
3	5	9	10	11	12	14	16	34	3
34	32	28	27	26	25	23	21	28	9
								25	12
								16	21

On ne peut donc pas faire la premiere ligne avec les quatre nombres 34, 28, 25, 16; & parce qu'on ne peut plus faire 41 avec deux autres nombres, (puisque 23 & 21 qui restent à considerer font plus de 41) il faut changer 28, & mettre avec 34 le suivant 27.

On aura donc 34 & 27, dont la somme est 61, qui ostée de 103, reste 42, qu'il faut trouver en deux nombres, tous deux moindres que 27; car si l'un des deux nombres estoit plus grand que 27, & si c'estoit par exemple 28 & 14, ce seroit refaire la mesme chose qu'on a cy-devant considerée & trouvée impossible, car on auroit les quarre mesmes nombres qu'on a eus auparavant, sçavoir 34, 28, 27, 14.

Or les 42 qui restent ne se peuvent faire que par 26 & 16, car 25 & 21, ou 23 & 21 qui restent, sont trop grands.

On aura donc 34, 27, 26, 16 pour la premiere ligne A B.

Pour la seconde B C, qui doit avoir 68, je prens premierement 32 & 28, qui ensemble font 60; mais parce qu'il faudroit faire 8 en deux nombres, il en faut mettre un autre avec 32, & afin de les avoir separez de ceux de la premiere ligne, je les escriray à part avec leurs complémens.

103		68					
34	3	28	9	32	28	25	23
27	10	23	14	5	9	12	14
26	11	12	25				
16	21	5	32				

Je joindray donc 32 à 25, la somme est 57, qui ostée de 68, reste 11, qu'on ne peut faire en deux nombres, puisque les deux moindres qui restent, sçavoir 9 & 14, font plus de 11.

On assemblera aprés 32 & 23, la somme est 55, qui ostée de 68, reste 13; mais 9 & 12 qui restent font plus de 13.

Enfin on ajoûtera 32 à 14, la somme est 46, qui ostée de 68, reste 22; mais 12 & 9 qui restent ne font que 21, & ainsi on ne peut mettre 32 en cette ligne B C, puisque parcourant tous les nombres avec 32, on ne peut trouver 68.

Il faut donc changer 32, & prendre le nombre suivant qui est 28, lequel estant joint avec 25 fait 53, qui estans ostez de 68, reste 15, qu'on ne peut faire avec les nombres suivans, puisque les deux moindres 5 & 14 font plus de 15.

Aprés on ajoûtera 28 à 23: la somme est 51, qui ostée de 68, reste de 17, qui se fait avec les deux nombres qui restent, sçavoir avec 12 & 5.

On aura donc par ce moyen la table parfaite, car la premiere ligne A B sera 34, 27, 26, 16, prés desquels nombres je mets leurs complémens 3, 10, 11, 21, qui doivent faire la ligne D C de la figure qui est cy-devant à la page 450, & qui est opposée à A B, & on mettra les nombres & les complémens

vis-à-vis l'un de l'autre, comme on voit en la figure, en laquelle 3 est vis-à-vis de 34, 10 vis-à-vis de 27, & ainsi des autres.

La ligne B C se fera des nombres 28, 23, 12, 5, & la ligne A D qui luy est opposée se fera des complémens de ces nombres, sçavoir de 9, 14, 25, 32, qu'on voit en l'autre page vis-à-vis de 28, 23, 12, 5, & les autres, sçavoir 9, 14, 25, 32 se doivent mettre aussi chacun vis-à-vis de leurs complémens, sçavoir 9 vis-à-vis de 28, 14 vis-à-vis de 23, &c.

On peut passer outre à examiner si on ne peut point faire cette table de 6 d'une autre façon, les coins demeurans comme ils sont, & en leur mesme situation.

Premierement, il est bien certain que la ligne A B demeurant telle qu'elle est, on ne peut pas faire la ligne B C d'une autre sorte, parce que si au lieu de 28 & 23, on prenoit 28 & 14, ou 15 & 23, les nombres qui resteroient ne seroient pas suffisans d'achever 68, parce que necessairement ils seroient moindres que ceux qui restent lors qu'on prend 28 & 23.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103		68	
34	3	28	9
25	12	23	14
23	14	12	25
21	16	5	32

Il faut donc changer la ligne A B, dont les quatre nombres qui sont entre les coins 1 & 7, doivent faire ensemble 103.

Et parce que l'on a déja pris 34 & 27, & qu'on ne peut faire les 42 qui restent par d'autres nombres que par 26 & 16, qui ont déja esté employez, il faut changer 27, & prendre 26 avec 34, qui ensemble font 60, qui ostez de 103, reste 43, qu'on ne peut faire avec deux des nombres qui restent, & qui soient moindres que 26.

Il faut donc passer plus outre, & joindre 25 à 34, dont la somme est 59, qui ostée de 103, reste 44 qui se peuvent faire avec 23 & 21. La ligne A B sera donc 34, 25, 23, 21.

Et il faudra faire 68 en quatre nombres pour la ligne B C, avec les quatre qui restent, 5 9 10 11
& leurs complémens, qui sont 32 28 27 26

Mais on ne sçauroit trouver quatre de ces nombres selon la regle, qui est de ne point mettre un nombre & son complément en mesme ligne, qui fassent 68, d'où s'ensuit que la ligne A B ne peut pas estre composée de 34, 25, 23, 21.

Si on veut passer outre, on ne pourra plus adjoûter aucun nombre avec 34, car on ne feroit que des repetitions de ce qui a esté déja examiné: car si aprés 25 il faut prendre les deux plus grands nombres qui restent, sçavoir 23 & 21; si on mettoit 23 avec 34, on ne pourroit pas trouver deux nombres moindres que 23, qui fissent ensemble ce qu'il faudroit de reste pour achever 103, ainsi qu'il est requis.

Il faut donc abandonner 34, & se servir de 32, en le comparant aux nombres suivans, comme on a fait 34.

Je joins 32 à 28: la somme est 60, qui ostée de 103, reste 43, qu'on peut faire avec 27 & 16 seulement.

La ligne A B aura donc 32, 28, 27, 16 pour les quatre nombres qui sont entre ses coins 1, 7.

3	5	9	10	11	12	14	16
34	32	28	27	26	25	23	21

103		68
32	5	
28	9	
27	10	
16	21	

Pour faire la ligne B C, qui doit eſtre de 68, ſans les coins, on ſe ſervira des nombres reſtans, qui ſont 34 26 25 23
3 11 12 14

Si on prend 34 & 26, on aura 60, reſtera 8 qu'on ne peut pas faire en deux nombres; & le meſme inconvenient arrive à 34 & 25, comme auſſi à 34 & 23, qui enſemble font 57, qui oſtez de 68, reſte 11, qu'on ne ſçauroit faire avec 11 & 12.

Pareillemenr ſi on ſe ſert de 34 & 14, la ſomme eſt 48, qui oſtée de 68, reſte 20, qui eſt encore moindre que la ſomme de 11 & 12 qui reſtent.

Il faut donc laiſſer 34, & ſe ſervir de 26, qui eſtant joint à 25, fait 51, qui oſté de 68, reſte 17, qui ſe peut faire avec 14 & 3.

La ſeconde ligne B C ſera donc de 26, 25, 14, 3.

103		68	
32	5	26	11
28	9	25	12
27	10	14	23
16	21	3	34

On diſpoſera la premiere ligne au deſſous de 103, & les complémens à coſté, & de meſme la ſeconde ligne au deſſous de 68, afin de les diſpoſer aprés en leur place en ce meſme ordre pour avoir la figure ſuivante, en laquelle la figure interieure de 4 de coſté eſt la meſme que cy-devant.

Si on vouloit paſſer outre à la recherche d'autres figures, il faudroit joindre 32 à 25 : la ſomme eſt 59, qui oſtée de 103, reſte 44, qu'on fera en prenant 23 & 21, & ainſi on auroit pour la premiere ligne 32, 27, 23, 21, mais on ne pourra compoſer la ſeconde; de ſorte qu'il faut changer la premiere.

A B

1	32	28	27	16	7
11	2	33	31	8	26
12	24	15	17	18	25
23	19	20	22	13	14
34	29	6	4	35	3
30	5	9	10	21	36

D C

Si on joint 32 à 26 ou à 25, on ne pourra faire 103, c'eſt pourquoy il faut laiſſer 32, & conſiderer 28, qui eſtant joint à 27, donne 55, qui oſtez de 103, reſte 48, qui ſeront faits par 25 & 23. On aura donc pour la premiere ligne 28, 27, 25, 23, mais on ne pourra faire la ſeconde ligne qui doit eſtre de 68, avec les nombres qui reſtent.

Il faudroit donc reformer encore la premiere ligne, ce qui ne ſe peut, parce

qu'ayant pris les quatre nombres 28, 27, 25, 23, si l'on change quelqu'un des deux premiers 28 & 27, on ne pourra prendre que 26 au lieu de l'un d'eux; mais il faudroit en mesme temps augmenter 23 ou 25, ce qui ne se peut, parce qu'entre les nombres qu'on peut choisir, & dont on se peut servir, il n'y a que le mesme 26 qui soit plus grand qu'eux.

Il est donc manifeste, que laissant la table interieure de 4 en l'état qu'elle est, & les coins 1 & 7, avec leurs complémens, on ne peut faire que les deux tables de 6 cy-devant écrites, qui sont marquées A B C D, si ce n'est que l'on veüille considerer l'ordre des nombres, chacun demeurant dans la mesme ligne sans en sortir; mais il sera parlé cy-aprés de cette variation.

Que si on vouloit rechercher plus outre, il faudroit mettre un autre nombre que 7 à l'un des angles, & les ayant tous éprouvez à cet angle, on changeroit aussi l'angle où l'on a mis 1, mettant à la place le nombre suivant qui est 3, & son complément 34 à l'angle opposé; & à l'autre angle qui borne la mesme ligne, on mettroit le nombre suivant 5, puis 7, & les autres.

Exemple d'une table de 8.

Il faut maintenant donner l'exemple de la fabrique d'une autre table, sur laquelle on se puisse conduire, pour en former d'autres plus grandes, qui sera celle qui a 8 à chacun de ses costez.

J'arrange premierement la moitié des nombres de suite, sçavoir jusques à 32, & leurs complémens au dessous, & chaque couple de nombres fera 65, sçavoir autant que les deux extremes ensemble 64 & 1, & ce 65 est la valeur que doivent avoir deux nombres l'un portant l'autre en chaque ligne; & ainsi le premier quarré qui est de 4 aura deux fois 65, qui font 130; le second qui a six nombres aura 195, sçavoir trois fois 65; & le dernier qui est l'enceinte exterieure, & qui a huit nombres en chaque ligne, contiendra 260.

Voicy donc les nombres de suite ainsi qu'il les faut ranger.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33

Ayant ainsi disposé les nombres, je prens les huit premiers & leurs complémens, sçavoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, desquels je fais, comme il a esté montré cy-devant, la table suivante de 4.

1	63	62	4
60	6	7	57
8	58	59	5
61	3	2	64

Aprés je prens les dix nombres suivans, & leurs complémens, pour l'enceinte suivante, qui fera le quarré ou table de 6. Ces nombres sont,

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
56	55	54	53	52	51	50	49	48	47

Avec ces nombres on fera la derniere enceinte de la table de 6, par quelqu'une des façons cy-devant déduites.

Ou bien on prendra une des tables de 6 qui sont cy-devant ; par exemple, la premiere qui est en la page 444, qui est repetée icy.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Aysnt cette table, je remarque où sont les 18 premiers & moindres nombres qui sont la moitié des nombres de la table, & les laisse en leurs places ; mais au lieu des 18 autres, je mets les complémens pris sur le quarré 64, comme on les a mis cy-devant : mais afin de ne se point troubler, on pourra écrire les nombres de la table de 6, & leurs complémens au dessous pris sur 36, & au dessous de ceux-là les complémens pris sur 64, comme on voit icy.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47

La premiere ligne contient les nombres qui appartiennent à chacune des deux tables, tant à celle qu'on prend pour patron, que celle qui fait partie de la table de 8.

La seconde ligne appartient à la table de 6, qui est cy-dessus, & qui sert de patron, & contient les complémens de la premiere ligne, & chaque couple de nombres fait 37.

La troisiéme contient les complémens de la premiere ligne, & appartient à la table de 6, qui fait partie de celle de 8, & chaque couple de nombres fait 65.

Cela fait, il faut mettre à part le reste des nombres jusques à 32, & leurs complémens au dessous, comme on voit icy.

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33

Aprés on prendra pour les coins de la derniere enceinte les moindres nombres 19 & 20, & leurs complémens 46, 45 : ce n'est pas pourtant qu'on ne puisse prendre d'autres nombres que 19 & 20, car cela est visible, veu que la figure se peut faire en beaucoup de façons

Maintenant

Maintenant je feray facilement la table de 6 sur la precedente, laissant les nombres de la premiere ligne au lieu où on les trouvera, & mettant ceux de la troisiéme ligne à la place de ceux de la seconde ; & ainsi on aura la figure suivante.

19							20
	9	53	54	51	18	10	
	16	1	63	62	4	49	
	48	60	6	7	57	17	
	52	8	58	59	5	13	
	15	61	3	2	64	50	
	55	12	11	14	47	56	
45							46

J'assemble 19 & 20, la somme est 39, que j'oste de 260, qui est la somme que doivent faire les nombres de chaque ligne, reste 221 pour les six nombres, qu'il faut mettre entre 19 & 20.

Pareillement j'assemble 20 & 46, la somme est 66, qui ostez de 260, reste 194 pour les six nombres qui doivent estre entre 20 & 46.

On peut voir aussi quelle doit estre la somme des six nombres, qui seront entre 19 & 45, & cette somme sera 196, afin que si on trouvoit 196 avant 194, on s'en pust servir.

Je fais premierement la ligne 19, 20, & parce que 19, 20 sont les moindres nombres des coins, je prens des plus grands nombres qui restent pour suppléer à leur défaut. Je considereray donc les quatre plus grands, 44, 43, 42, 41, dont la somme est de 170 : & parce que les six nombres doivent valoir ensemble 221, il reste 51 pour les deux nombres qui sont encore à trouver. On prendra donc 25 & 26, qui ensemble font 51 : cette premiere ligne sera donc 44, 43, 42, 41, 26, 25, entre les coins 19 & 20.

Reste à trouver les six nombres qu'il faut à la ligne qui a 20 & 46 à ses extremitez, lesquels six nombres doivent faire ensemble 194, & les six nombres de la ligne opposée, dont les extremitez sont 19, 45, doivent faire ensemble 196, lesquels nombres on doit choisir parmi les suivans,

27	28	29	30	31	32
38	37	36	35	34	33

Je divise 194 par six, pour voir ce que doivent avoir les nombres l'un portant l'autre : je trouve 32, & reste 2 ; d'où s'ensuit que les nombres pris deux à deux doivent faire 64, mais l'un des couples doit faire 66, ainsi on aura deux couples de nombres de 64 chacun, & un couple de 66, qui font les six nombres, car on ne peut pas faire deux couples de 65 par exemple, & un de 64, parce qu'il est impossible de faire 65 en deux nombres, si on ne prend les deux, qui sont complémens l'un de l'autre ; ce qui est directement contre la principale & generale regle, qui est,

Que jamais dans la construction qu'on donne icy, on ne doit mettre en mesme ligne deux nombres qui soient complémens l'un de l'autre, c'est à dire qui estans joints ensemble fassent autant que les deux extrémes ensemble, qui sont icy 64 & 1.

On cherchera donc deux couples de nombres qui fassent 64, & un couple qui fasse 66, on aura 33, 31; 35, 29, & 38, 28. Les 37 & 27 font 64; mais parce qu'un des couples doit avoir deux de plus, on prend 38 au lieu de 37, & 28 au lieu de 27.

Les six nombres seront donc 28, 29, 31, 33, 35, 38, qu'il faut mettre entre 20, 46, & les six autres qu'il faut mettre en la ligne opposée, entre 19, 45 sont leurs complémens, sçavoir 37, 36, 34, 32, 30, 27, qui seront disposez selon cet ordre, en telle sorte que les complémens soient toûjours vis-à-vis l'un de l'autre; & ainsi on aura la figure suivante.

19	44	43	42	41	26	25	20
37	9	53	54	51	18	10	28
36	16	1	63	62	4	49	29
34	48	60	6	7	57	17	31
32	52	8	58	59	5	13	33
30	15	61	3	2	64	50	35
27	55	12	11	14	47	56	38
45	21	22	23	24	39	40	46

On pourra encore faire ces lignes d'une autre sorte; sçavoir, prenant 34, 32 pour le couple qui doit faire 66, & 35, 29; 37, 27 pour les deux autres; & ainsi les six nombres qu'il faudroit mettre entre 20 & 46, seroient 27, 29, 32, 34, 35, 37.

Et les six autres qui doivent estre mis entre 19, 45, seroient leurs complémens; sçavoir, 38, 36, 33, 31, 30, 28, avec lesquels on aura une autre figure.

	20	27	29	32	34	35	37	46	*à la place de*	20	28	29	31	33	35	38	46
&	19	38	36	33	31	30	28	45	*à la place de*	19	37	36	34	32	30	27	45

On pourroit encore faire 194 par d'autres couples, prenant 30 & 36 pour faire 66, & les deux autres couples de 64, qui seront 27, 37, & 31, 33, & les six nombres qu'on mettra entre 20 & 46, seront 27, 30, 31, 33, 36, 37; & entre 19, 45 on mettra leurs complémens 38, 35, 34, 32, 29, 28.

On se peut encore servir d'autres manieres pour trouver 194, ou 196, sans considerer ni prendre les couples des nombres, ainsi qu'on a fait pour la derniere enceinte des precedentes figures de six; ce qui seroit trop long à repeter icy, veû mesme qu'on en donnera des exemples, & qu'on s'en servira en quelqu'une des lignes de la figure suivante.

Exemple d'une table de 14.

AFIN qu'on puisse voir toutes les façons de choisir les nombres pour remplir les lignes des enceintes diverses de la figure, on donnera encore l'exemple d'une table de 14.

Et parce qu'en cette methode-cy il n'y a que trois façons de ranger les nombres, on prendra le quarré de 8, (consideré comme faisant partie du quarré

de 14) sur le modele du quarré precedent de 8, & en suite l'enceinte de 10 se fera d'un façon, celle de 12 d'une autre, & l'enceinte exterieure, qui est celle de 14, encore d'une autre.

Je mets donc premierement de suite les nombres qui doivent remplir les 196 places du quarré, & les dispose en deux lignes; sçavoir la moitié dans une des lignes, & l'autre moitié qui sert de complément à la premiere, dans l'autre ligne au dessous de la premiere, en telle sorte que chaque couple de nombre fasse 197, qui est la somme des deux nombres extrémes, comme on voit cy-dessous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
148	147	146	145	144	143	142	141	140	139	138	137
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
136	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126	125
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
112	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101
97	98										
100	99										

Ces nombres estant ainsi disposez, je prens les 32 premiers, & leurs complémens, pour faire le quarré interieur de 8 en la mesme façon qu'on a fait le precedent de 8, ou si on veut on le fera sur son modele, laissant les 32 premiers nombres en la mesme place qu'ils sont au precedent; mais pour les nombres qui surpassent 32, il les faudra changer aux complémens correspondans pris sur 196; & afin que cela se puisse faire plus aisément & sans estre en danger de prendre un nombre pour un autre, on écrira les 64 nombres de la precedente table de 8 en deux lignes, qui serviront de complément l'une à l'autre; & au dessous de cette seconde, on en mettra une troisiéme qui contiendra les 32 premiers complémens de la page precedente, sçavoir depuis 196 jusques à 165, qui est dessous 32.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
25	26	27	28	29	30	31	32				
40	39	38	37	36	35	34	33				
172	171	170	169	168	167	166	165				

Et laiſſant les nombres de la premiere ligne en meſme place dans la figure B, qu'on la voit dans les figure A, on mettra dans la figure B ceux de la troiſiéme ligne, aux meſmes places que ceux de la ſeconde ligne ſont dans la figure ſuivante A, comme l'on voit icy.

A

19	44	43	42	41	26	25	20
38	9	53	54	51	18	10	27
36	16	1	63	62	4	49	29
33	48	60	6	7	57	17	32
31	52	8	58	59	5	13	34
30	15	61	3	2	64	50	35
28	55	12	11	14	47	56	37
45	21	22	23	24	39	40	46

B

19	176	175	174	173	26	25	20
170	9	185	186	183	18	10	27
168	16	1	195	194	4	181	29
165	180	192	6	7	189	17	32
31	184	8	190	191	5	13	166
30	15	193	3	2	196	182	167
28	187	12	11	14	179	188	169
177	21	22	23	24	171	172	178

Pour avoir plns de faciliré à faire ees tables, il faut mêler les nombres le moins qu'on peut, c'eſt à dire les prendre de ſuite aurant que faire ſe pourra. Par exemple, le plus grand d'entre les moindres nombres de la table precédente B, eſt 32 ; or on appelle les moindres nombres eeux de la premiere ligne, ſçavoir depuis 1, juſques à 98 ; & les grands nombres, ceux de la ſeconde ligne qui ſont les complémens des premiers, depuis 99, juſques 196 incluſivement.

Je prens donc 33 & 34, & leurs complémens, pour les angles de la figure de 10, qui entoure la precédenre de 8 ; & parce qu'entre les angles de chaque ligne de l'enceinte de 10, il y a huit nombres, je prens les ſeize nombres qui ſuivent 34, & leurs complémens, pour deux lignes prochaines, & qui font un des angles de la figure, & pour les deux autres lignes qui leut ſont oppoſées. Ces nombres ſont,

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147

Je prens aprés les deux nombres ſuivans 51 & 52, & leurs complémens, pour les angles de la ſuivanre enceinre de 12, & les vingr nombres ſuivans, & leurs complémens pour les lignes.

Enfin on prendra le reſte des nombres pour la derniere enceinte : ce n'eſt pas

pas qu'il faille necessairement suivre cet ordre; car on peut entremesler les nombres comme on veut, & en prendre au commencement, au milieu, & à la fin pour une mesme ligne: mais on trouvera plus de facilité en suivant l'ordre precedent.

Or voicy les trois voyes dont on se pourra servir pour parfaire les lignes, aprés que les coins sont remplis; mais avant tout, il faut observer ce qui est commun à toutes ces voyes, & ce qui se doit pratiquer auparavant.

Je suppose donc premierement, que les nombres soient aux angles de la figure, & leurs complémens aux angles opposez, comme on voit icy, où 164 complément de 33, est opposé à 33, & 163 complément de 34, est opposé à 34.

33	34
163	164

Cela fait, je considere ce que tous les dix nombres de l'enceinte doivent faire ensemble; & pour trouver cette somme, on remarquera que deux nombres l'un portant l'autre doivent faire 197, & cela doit estre dans toutes les lignes de chaque enceinte, lequel 197 est la somme de 196 & 1, qui sont les deux extrémes de tous les nombres qui composent la figure de 14.

Or si chaque couple de nombres doit faire 197, les dix nombres, qui sont cinq couples, feront 985, sçavoir cinq fois 197. Puis donc que chaque ligne doit avoir 985, pour sçavoir quelle somme doivent faire les huit nombres qu'il faut mettre entre 33 & 34, il faut oster de 985 la somme de 33 & 34, qui est 67, & il restera 918 pour les huit nombres.

Semblablement j'oste de 985 la somme de 34 & 164, qui est 198, restera 787 pour les huit nombres qu'il faut mettre entre 34 & 164; & cette operation doit estre faite à chaque enceinte aprés que les angles sont posez.

Pour les deux lignes opposées, sçavoir 163, 164, ou 33, 163, il ne s'en faut pas mettre en peine; car leurs opposées estant faites, necessairement elles le feront aussi en y mettant les complémens de leurs opposées. Il est vray que pour l'operation précedente, qui sert à trouver combien les nombres qu'on doit mettre entre les angles doivent faire ensemble, on se peut servir de deux telles lignes qu'on voudra, pourveû qu'elles ne soient pas opposées l'une à l'autre. Par exemple, au lieu d'oster de 985 la somme de 33 & 34, on pourroit oster la somme de 163 & 164; & au lieu de la somme de 34 & 164, on pourroit prendre celle de 33 & 163, car cela est indifferent.

La premiere methode de trouver les nombres de chaque ligne, sert pour avoir toutes les façons possibles de faire & remplir la ligne avec les nombres donnez; & à cause que par cette methode on compare chaque nombre avec tous les autres, il s'ensuit qu'on ne s'en doit pas servir lorsqu'il y a beaucoup de nombres en la ligne, parce que cela seroit trop long, mais on s'en servira utilement lorsqu'il y a peu de nombres; c'est pourquoy nous la prendrons icy pour remplir les lignes de l'enceinte de 10, en chacune desquelles lignes il y a huit nombres, sans les coins qui sont 33, 34, & leurs complémens 164, 163.

Les huit nombres d'une des lignes, sçavoir de celle qui est entre 34 & 33, doivent faire ensemble 918, qu'il faut mettre à part au dessous de 34, 33, & les nombres qui doivent estre mis entre 34 & 164 feront ensemble 787, que je mets aussi à part afin de ne rien confondre.

34 33	34 164
918	787

Les nombres des deux lignes, & leurs complémens, sont

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
162	161	160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149	148	147
|	|	|	|	|	|	|		|			AAAAaa				

Pour faire 918, parce que le nombre est grand, & qu'il doit récompenser la petiresse de 34, 33, je prens les quatre plus grands nombres, sçavoir 162, 161, 160, 159, qui ensemble font 642, qui ostez de 918, restera 276 pour les quatre nombres restans. Pour faire 276, je ne puis pas me servir des deux nombres suivans 158, 157, parce qu'ils feroient plus de 276, ni mesme des deux moindres de la seconde ligne, sçavoir de 148, 147, parce qu'ils font aussi plus de 276. Mais si on prenoit les quatre plus grands de la premiere ligne, sçavoir 47, 48, 49, 50, la somme seroit moindre que 276, c'est pourquoy il faudra prendre un des nombres de la seconde ligne, & trois de la premiere. Prenons par exemple 158, restera 118, mais 118 ne se peut faire avec trois nombres de cette ligne; car les trois moindres sont 40, 41, 42, qui ensemble font 123, qui est 5 plus que 118.

Il faut donc diminuer 158. Je prens 155 au lieu de luy, qui ostez de 276, restera 121 qu'il faut faire en trois nombres; ce qui ne se peut point encore, non plus qu'avec 157 & 156; mais prenant 154, il restera 122, qui se feront avec 39, 41, 42.

Et ainsi on pourra éprouver à faire la ligne, en prenant 153, 152, & les autres.

Et pour continuer la recherche des differentes sortes de lignes qu'on peut faire avec les seize nombres, & leurs complémens, je change le dernier des quatre nombres premierement pris, & mets 158 au lieu de 159, & j'auray 162, 161, 160, 158, qui ensemble font 641, qui ostez de 918, reste 277, qu'il faut faire avec quatre nombres, desquels on a reconnu cy-devant que l'un devoit estre de la seconde ligne, & les trois autres de la premiere.

Je prens donc 157, qui ostez de 277, reste 120, qu'on ne sçauroit faire avec trois nombres; car si on prend les trois moindres 38, 41, 42, on aura 121. Il faut donc diminuer 157, & prendre 156, qui ostez de 277, restera 121, qu'on fera avec trois nombres, sçavoir avec 38, 40 43.

On pourroit continuer cette recherche prenant un autre nombre que 156, puis diminuant encore 158, & revenant aprés à faire la mesme chose à 160, 161, & enfin à 162. Ce qui seroit trop long à déduire.

La premiere ligne entre 33 & 34, sera donc 162, 161, 160, 158, 156, 38, 40, 43.

Pour la seconde ligne qui est entre 34 & 164, & dont les huit nombres doivent faire ensemble 787, je cherche à la faire comme s'ensuit, avec les nombres qui restent; sçavoir,

42	44	45	46	47	48	49	50
155	153	152	151	150	149	148	147

Parce que la somme des angles 14 & 164 est 198, qui ne differe que de l'unité de 197, qui est la somme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faudra prendre quatre nombres de la ligne inferieure, & quatre de la superieure, à telle condition toutefois qu'on prenne une quotité impaire de nombres impairs, afin que la somme soit impaire, comme est 787. Je prendray donc par exemple 155, 153, 152, 150: la somme est 610, qui ostée de 787, reste 177, qu'on ne peut pas faire avec quatre nombres, car les quatre qui restent sont 46, 48, 49, 50, qui ensemble font 193: & si je prens 147 au lieu de 150, la somme sera encore trop petite.

Et parce que la difference de 193 à 177 est grande, je diminuë tout à coup 152 de beaucoup, & sans s'amuser à prendre 151, ou 150, l'on prendra d'abord les quatre nombres 155, 153, 148, 147, dont la somme est 603, qui ostée de 787, reste 184; mais les quatre nombres qui restent, sçavoir 45, 46, 47, 48, font 186. Ils seront donc trop grands de 2, & ainsi il faudra diminuer 153. Je

prens 152 en sa place, & laisse 148 & 147, puisque 153 n'est diminué que de 1.

On aura donc 155, 152, 148, 147, dont la somme est 602, qui ostée de 787, reste 185 : les quatre nombres qui restent sont 44, 46, 47, 48, dont la somme est 185, ainsi qu'il est requis. On a donc les nombres qui doivent estre entre 34 & 164, qui seront 155, 152, 148, 147, 44, 46, 47, 48.

Mais si on vouloit chercher plus outre, on diminueroit encore 152, prenant d'autres nombres que 148 & 147.

Et enfin on diminuëroit le premier nombre 155, prenant 153 en sa place, & cherchant comme devant, on trouvera que les huit nombres suivans, 153, 152, 150, 147, 49, 48, 46, 42 estant joints ensemble, font 787.

Je mets donc au dessous de 918, les nombres de la ligne 34, 33, cy-devant trouvez ; & au dessous de 787, ceux de la ligne 34, 164, & leurs complémens a costé, comme on voit icy.

34	33	34	164
918		787	
162	35	153	44
161	36	152	45
160	37	150	47
158	39	147	50
156	41	49	148
43	154	48	149
40	157	46	151
38	159	42	155

Ces nombres estant ainsi disposez, je les range à l'entour de la figure de 8 marquée B en la page 460, entre leurs angles qui sont marquez au dessus d'iceux, & en fais la figure suivante de 10.

34	162	161	160	158	156	43	40	38	33
153	19	176	175	174	173	26	25	20	44
152	170	9	185	186	183	18	10	27	45
150	168	16	1	195	194	4	181	29	47
147	165	180	192	6	7	189	17	32	50
49	31	184	8	190	191	5	13	166	148
48	30	15	193	3	2	196	182	167	149
46	28	187	12	11	14	179	188	169	151
42	177	21	22	23	24	171	172	178	155
164	35	36	37	39	41	154	157	159	163

Mais cette methode est trop longue, quoy qu'elle soit de grande commodité aux petites figures, comme de six ou huit nombres à chaque costé : toute-

fois on pourroit choisir tels nombres pour les angles & pour les lignes qu'on se trouveroit si embarrassé, qu'on seroit obligé de recourir à cette voye, si on ne vouloit point changer les nombres ; & c'est icy le dernier refuge : car puisque par cette methode on trouve toutes les façons de faire les lignes avec les nombres donnez, si on la met en pratique, necessairement elle découvrira, (si on la suit de point en point & sans rien omettre) si la ligne se peut parfaire avec les nombres dont on se veut servir.

Il la faudroit aussi necessairement mettre en usage, si on vouloit avoir toutes les façons possibles de faire une table sans changer les nombres de chaque enceinte.

Maintenant il faut passer aux deux autres voyes, par l'une desquelles on fera l'enceinte de 12, & par l'autre la derniere qui est de 14.

Il faut premierement sçavoir combien chaque ligne doit avoir en l'enceinte de 12 ; ce qui se fait multipliant 197 par 6, le produit sera 1182, car puisque chaque couple de nombres, l'un portant l'autre, doit faire 197, les six couples, qui sont douze nombres, feront 1182.

Je choisis aprés les deux nombres qu'il faut mettre aux angles ; on a pris pour la table precedente tous les nombres jusques à 50, & leurs complémens ; on prendra pour ces deux angles icy les deux nombres suivans, sçavoir 51, 52, & leurs complémens 146, 145, qui seront disposez aux angles de la figure, comme on voit icy.

51	52
145	146

J'assemble aprés 51 & 52, la somme est 103, qui ostée de 1182, qui est la somme des douze nombres de la ligne, reste 1079 pour les dix nombres qui restent à mettre entre 51 & 52.

Pareillement j'assemble 51 & 145, la somme est 196, qui ostée de 1182, reste 986 pour les dix nombres qui doivent estre entre 51 & 145.

51	52	51	145
1079		989	

Cela fait, je prens les vingt nombres qui suivent 52, & leurs complémens, car il en faut dix en chacune des lignes entre les angles.

53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134
64	65	66	67	68	69	70	71	72		
133	132	131	130	129	128	127	126	125		

Seconde methode. Pour cette enceinte on se servira de la seconde methode qui est la plus facile de toutes, & se fait comme s'ensuit.

Je divise 1079 par 10, à cause que les dix nombres doivent faire 1079 ; tous ensemble on aura 108 moins 1 ; de sorte que neuf des nombres vaudront 108, & le dixiéme vaudra 107 : (ce qui se doit entendre l'un portant l'autre) chaque couple de nombres vaudra donc 216, excepté une qui ne vaudra que 215.

Mais parce qu'il n'y a que deux nombres qui puissent faire 216, sçavoir 144 & 12, il faudra prendre quelques-uns des plus grands nombres, afin que les autres en soient d'autant diminuez. Par exemple, on prendra 144 & 143, dont la somme est 287, qui ostée de 1079, reste 792, qui divisé par 8, à cause

cauſe des huit nombres qui reſtent, on aura 99 : chaque couple de nombres vaudra donc 198, & il y a quatre couples.

On obſervera de faire en ſorte que les nombres qui reſteront pour l'autre ligne, ſoient de ſuite le plus qu'on pourra, car on y trouvera plus de facilité.

On fera aiſément 198 pluſieurs fois, & tant qu'on voudra, comme ſi on prend 142, 56, | 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. |

Mais on le peut encore trouver d'une autre ſorte, prenant des couples de nombres qui vaillent plus de 198, & d'autres qui vaillent d'autant moins, car il arrive par fois qu'on ne peut trouver deux nombres qui faſſent ce qui eſt requis.

Si donc je ne pouvois faire 198 en deux nombres, j'en prendrois deux qui faſſent par exemple 188, ſçavoir 125 & 63, & en échange il en faudroit prendre deux qui fiſſent enſemble 208, comme 142, 66.

Le premier couple vaut 10 moins que 198, & le ſecond vaut 10 plus : je prendray aprés 126, 64, qui font enſemble 190, qui eſt huit moins que 198 ; & en échange je prendray 141, 65, dont la ſomme eſt 206, qui ſurpaſſe 198 de huit.

On aura donc 144, 143, 142, 141, 125, 126, 63, 64, 65, 66, pour les dix nombres qu'il faut mettre entre 51, 52.

Pour la ligne 51, 145, je diviſe 986 par dix, & je trouve 98, & reſte 6 ; ce qui me monſtre qu'il y aura ſix nombres qui auront 99 l'un portant l'autre, & quatre qui auront 98.

Il faudra donc trouver trois couples de nombres, dont chacune ſera 198, double de 99, & deux couples de 196 chacune.

Je marque les nombres de la ligne precedente avec une petite ligne ou tiret au deſſous, & me ſers des dix qui reſtent, qui eſtant de ſuite en quotité paire, (car il y en a premierement ſix de ſuite, & puis quatre, ce qu'il faut obſerver le plus qu'on peut pour la facilité, ſçavoir que les nombres qui ſuivent ſoient en quotité paire) il ſera facile de trouver des couples de 198 & de 196 ; les trois couples de 198 ſeront 140, 58, | 138, 60, | & 136, 62. | Les deux couples de 196 ſeront 67, 129, | & 69, 127 : on aura donc 140, 138, 136, 129, 127, 69, 67, 62, 60, 58 pour la ligne 51, 145.

Ayant ces nombres, afin de ne ſe point méprendre & de n'eſtre point en danger de les mettre en une ligne autre que celle où ils doivent eſtre mis, & auſſi pour avoir plus en main leurs complémens, on mettra les nombres de chaque ligne au deſſous des deux nombres qui ſont aux angles qui la bornent, comme on voit cy-deſſous, & leurs complémens à coſté.

51	52		51	145
1079			986	
144	53		140	57
143	54		138	59
142	55		136	61
141	56		129	68
125	72		127	70
126	71		69	128
63	134		67	130
64	133		62	135
65	132		60	237
66	131		58	139

Puis on diſpoſera ces lignes autour de la figure de dix cy-devant trouvée, & l'on aura la figure ſuivante de douze.

73													74
	51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52	
	140	34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	57	
	138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59	
	136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61	
	129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68	
	127	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	70	
	69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128	
	67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130	
	62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135	
	60	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	137	
	58	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	139	
	145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146	
123													124

Cette methode eſt la plus facile de toutes, mais il ſeroit aiſé de la découvrir en voyant la figure, ſi l'on n'y apporte un peu d'artifice; ce qui ſe pourra faire en mêlant davantage les nombres.

Par la troiſiémé methode les figures ſont renduës plus embaraſſées, parce que ſuivant ce qu'elle ordonne, on ne s'étudie pas à prendre les nombres de ſuite, comme on a fait cy-devant; mais on les prend par hazard ſelon qu'ils ſe rencontrent, conſidérant toutefois à peu prés ce qu'il faut pour parfaire la ligne.

On fera la meſme opération qu'aux precédentes, pour ſçavoir combien chaque ligne doit avoir, ſçavoir multipliant 197 par 7; (car 197 eſt la ſomme de chaque couple de nombres l'un portant l'autre par toute la figure, & y ayant quatorze nombres en chaque ligne de cette derniere enceinte, on aura ſept couples) ſi donc on multiplie 197 par 7, le produit ſera 1379, qui eſt la ſomme des quatorze nombres de chaque ligne de la derniere enceinte.

Je prendray donc, comme cy-devant, pour les angles deux nombres qui s'entreſuivent; par exemple, les deux moindres de ceux qui reſtent, ſçavoir 73, 74, & leurs complémens 124, 123, & je les diſpoſeray comme on voit icy, & ainſi qu'ils doivent eſtre dans la figure, & qu'ils ſeront aprés appliquez ſur les angles de la figure de douze, comme l'on voit de l'autre part.

73	74
123	124

J'aſſemble aprés 73 & 74 : la ſomme eſt 147, qui oſtée de 1379, (qui eſt la ſomme des quatorze nombres de chaque ligne) reſte 1232 pour les douze nombres qu'il faudra mettre entre 73 & 74.

Je prens auſſi la ſomme de 73 & 123, qui eſt 196, qui

ostée de 1379, reste 1183 pour les douze nombres qui doivent estre mis entre 73 & 123.

On disposera aprés de suite les vingt-quatre nombres qu'il faut mettre dans ces lignes, & leurs complémens.

75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
122	121	120	119	118	117	116	115	114	113	112	111
87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99

Je dispose comme cy-devant les nombres qu'il faut pour chaque ligne, lesquels on vient de trouver.

73	74	73	123
123		1183	

Pour remplir ces lignes par la troisiéme methode : Par exemple, la ligne qui doit avoir 1232, je vois que les nombres des angles sont tous deux petits, c'est pourquoy il faudra se récompenser aux douze nombres qu'on cherche, & pour cet effet prendre davantage des nombres de la seconde ligne, que de ceux de la premiere ; & sur tout observer, que les nombres impairs qu'on prendra soient en quotité paire, afin qu'ils puissent faire un nombre pair tel qu'est 1232. Je prens donc par exemple les nombres qui s'ensuivent, que je mets au dessous de 1232.

1232	
—122	75
—121	76
—120	77
—78	119
—79	118
117	
116	
115	
83	
113	
—85	112
111	
1260	

La somme de ces nombres est 1260, mais il ne falloit trouver que 1232, qui ostée de 1260, reste 28. Il faut donc diminuër ces nombres de 28, ce qui se peut faire en diverses façons, comme mettant en la place de quelqu'un des nombres qui sont icy, un nombre qui soit moindre de 28, pourveû que ce nombre ne soit point déja employé dans la ligne, ni son complément aussi. Par exemple, si au lieu de 122, on prenoit 94, ou bien on peut faire cette déduction en deux nombres ou plus ; ainsi au lieu de 116, on peut prendre 103, & 100 au lieu de 115 : ce qui diminuëroit les nombres de 28.

Mais il y a encore une autre methode, par laquelle on change les nombres de la ligne, en d'autres qui ont leurs complémens employez dans la mesme ligne ; mais en ce cas il ne faut diminuër ou augmenter le nombre que de la moitié, comme icy de 14, parce qu'on sera obligé de changer aussi les complémens ; ce qui fait doubler la correction, laquelle par conséquent ne se doit faire que de la moitié, comme on verra incontinent.

On se peut aussi servir de ces deux voyes ensemble, pour corriger le défaut ou excés des nombres.

Nous choisirons icy la seconde methode pour corriger l'excés de 28, lequel doit estre réduit à la moitié, sçavoir 14, comme il a esté dit. Pour changer 122, je cherche dans la ligne quelque petit nombre dont le complément soit beaucoup moindre ; par exemple 85, dont le complément est 112, qui est moindre de 10 que 122. Je mets donc 112 à la place de 85, & de mesme à la place de 122 je mets son complément 75, comme on voit à costé de la ligne ; & ainsi on aura 20 de diminution, au lieu de 10, car on oste 122, & on met 112 ; comme aussi on oste 85, & on met 75 à sa place.

Reste donc à diminüer les nombres de 4, pour achever 14.

Parce que les nombres qu'on a pris sont eux, ou leurs complémens tous de suite, (car le complément de 78 est 119, qui precede 120, & ainsi des autres) il sera facile de voir de combien les complémens des nombres de la ligne seront moindres que celuy avec lequel on les voudra comparer. Par exemple, le complément de 79 sera moindre de trois que 121, parce que 79 est le troisiéme nombre aprés 121, & pour la mesme raison le complément de 78 sera moindre de 1, que 120. Or 3 & 1 font 4, qui est la correction requise; je mets donc au lieu de 121, 120, 78, 79, leurs complémens sçavoir 76, 77, 119, 118, comme on voit de l'autre part, où les complémens sont écrits à costé de leurs nombres, lesquels nombres sont marquez, pour montrer qu'ils ne servent plus de rien, & qu'en leur place il faut prendre ceux qui sont à costé.

Les nombres de cette ligne, dont les angles sont 73, 74, seront donc 75, 76, 77, 119, 118, 117, 116, 115, 83, 113, 112, 111, qui font ensemble la somme requise 1232.

Pour l'autre ligne, dont les angles sont 73, 123, & qui doit contenir 1183 en ses douze nombres, je prens les nombres qui restent; sçavoir

87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
110	109	108	107	106	105	104	103	102	101	100	99

Et parce que les angles 73, 123, vallent à peu prés 197, qui est la valeur que doit avoir chaque couple de nombres l'un portant l'autre, il faut aussi que les nombres qu'on employera soient à peu prés de cette valeur: mais on prendra garde d'avoir une quotité impaire de nombres impairs, parce que la somme des douze nombres, sçavoir 1183, est impaire.

On remarquera aussi que les nombres qui sont l'un dessus l'autre, valant ensemble 197, & n'estant differens l'un de l'autre que de l'unité, si on prend un des nombres de dessous, avec le suivant de la ligne superieure, comme 110, & 88, on aura 1 plus que 197: mais si avec le nombre de dessous, on prend le precedent de la ligne superieure, comme 109 & 87, on aura 1 moins que 197.

1183	
110	
88	
—89	108
—107	90
106	
92	
93	
103	
102	
96	
97	
98	

Si donc on veut que les nombres ayent 197 l'un portant l'autre, il faut mêler ces deux façons, & prendre les nombres qu'on voit icy au dessous de 1183, qui ensemble font 1181, qui est 2 moins qu'il ne faut: d'où s'ensuit qu'il faudra augmenter un des nombres de 1, car ainsi le complément estant augmenté de 1, toute l'augmentation sera de 2. Or cela se peut faire en beaucoup de manieres; par exemple, mettant 108 au lieu de 107; car cela estant, il faudra mettre 90, complément de 107, à la place de 107, & 108, complément de 89, à la place de 89, comme on voit icy; & ainsi 89 & 107 seront chacun augmentez de 1, puisqu'au lieu d'iceux on aura 90 & 108.

Voicy donc les nombres de la ligne qui doit estre entre les angles 73, 123, qui sont 110, 88, 108, 90, 106, 92, 93, 103, 102, 96, 97, 98. On mettra donc, comme on a fait cy-devant, les nombres de ces deux lignes au dessous de leurs angles, & leurs complémens à costé, comme l'on voit cy-aprés.

73	74
75	122
76	121
77	120
119	78
118	79
117	80
116	81
115	82
83	114
113	84
112	85
111	86

73	123
110	87
88	109
108	89
90	107
106	91
92	105
93	104
103	94
102	95
96	101
97	100
98	99

Cela fait, je les dispose autour de la precédente figure de 12, & on aura la figure de 14 parfaite, comme on la voit cy-aprés.

73	75	76	77	119	118	117	116	115	83	113	112	111	74
110	51	144	143	142	141	125	126	63	64	65	66	52	87
88	140	34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	57	109
108	138	153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	59	89
90	136	152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	61	107
106	129	150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	68	91
92	127	147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	70	105
93	69	49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	128	104
103	67	48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	130	94
102	62	46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	135	95
96	60	42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	137	101
97	58	164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	139	100
98	145	53	54	55	56	72	71	134	133	132	131	146	99
123	122	121	120	78	79	80	81	82	114	84	85	86	124

On pourroit bien faire que la figure auroit à ses angles quatre nombres de suite, sçavoir 97, 98, 99, 100, qui seroient disposez comme on voit cy-aprés.

La ligne qui doit estre entre 97 & 98 auroit 1184 en ses douze nombres, & celle qui seroit mise entre 97 & 99 aura 1183, on trouvera que la premiere doit

avoir deux couples de 196 chacun, & quatre de 198, & la seconde devroit avoir deux couples de 196, trois de 198, & un de 197; mais parce qu'on ne peut faire aucun couple de 197, à cause qu'il faudroit prendre deux nombres qui seroient complément l'un de l'autre, au lieu du couple de 197, j'en prendray un de 198, & en récompense au lieu d'un de 196, j'en prendray un de 195; on en aura donc quatre de 198, un de 196, & un de 195. Les nombres dont il se faut servir sont les suivans.

97 98

99 100

73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
124	123	122	121	120	119	118	117	116	115	114	113
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
112	111	110	109	108	107	106	105	104	103	102	101

La ligne qui doit estre entre 97 & 98, & qui vaut 1184, se fera aisément, prenant 73, 123, | 75, 121, pour les deux couples de 196; | & 120, 78, | 118, 80, | 116, 82, | 114, 84, | pour les quatre couples de 198.

1183
112
86
110
88
108
90
106
—92 105
93
—103 94
95
96

L'autre ligne qui doit estre entre 97 & 99, ne se fera pas si aisément, parce que la somme des nombres est impaire. On prendra 112, 86, | 110, 88, | 108, 90, | 106, 92, pour les quatre couples de 198, & 93, 103 pour le couple de 196; mais on ne sçauroit faire 195 avec les nombres qui restent. J'en prens donc deux au hasard, en sorte toutefois que l'un d'eux soit pair, & l'autre impair, afin que leur somme soit impaire, comme l'est 195. Par exemple, je prens 95, 96, dont la somme est 191, qui est moindre de 4 que 195, il faut donc augmenter un des nombres de 2, & pour le faire, j'en choisis un, qui estant augmenté de 2, ne se trouve point dans la ligne, mais que son complément y soit: par exemple, je change 92, parce que 94 qui le surpasse de 2, n'est pas dans la ligne, mais son complément 103 s'y trouve.

Je mets donc au lieu de 92, son complément 105, & au lieu de 103, son complément 94, & on aura les douze nombres de cette ligne. Je les dispose aprés comme l'on voit icy, & leurs complémens aprés eux.

97 98		97 99	
73	124	112	85
123	74	86	111
75	122	110	87
121	76	88	109
120	77	108	89
78	119	90	107
118	79	106	91
80	117	105	92
116	81	93	104
82	115	94	103
114	83	95	102
84	113	96	101

Je mets donc ces quatre angles & ces quatre lignes en la disposition que l'on voit dans la page qui suit autour de la figure de 12, avec laquelle on pourra remplir l'espace vuide.

97	73	123	75	121	120	78	118	80	116	82	114	84	98
112													85
86													111
110													87
88													109
108													89
90													107
106													91
105													92
93													104
94													103
95													102
96													101
99	124	74	122	76	77	119	79	117	81	115	83	113	100

Il faut remarquer, qu'avec la methode dont on s'est servi pour faire cette figure, on pourra construire les autres figures interieures, comme de 12, 10, 8 ou 6, & par la mesme façon qu'on a fait cy-devant celle de 8 qui est au dedans de celle de 14, se servant d'une autre de 8 qui ne dépend que d'elle-mesme, & dont le plus grand nombre est 64. Or ce qui fait que les figures inferieures se peuvent construire de celle-cy, & ses semblables, est que les nombres & leurs complémens vont de suite dans toutes les enceintes des figures, & n'anticipent point sur les nombres destinez pour les figures suivantes. Ainsi en la table de 6 comprise dans celle de 14, les 36 nombres sont les 18 moindres, & leurs complémens pris, eû égard à 196.

En la table de 8, les 64 nombres sont les 32 moindres, & leurs complémens pris sur 196.

En celle de 10, les 100 nombres sont les 50 moindres, & leurs complémens.

Et en celle de 12, les 144 nombres sont les 72 moindres, & leurs complémens pris toûjours sur 196.

Mais pour faire de la precédente table de 14 une figure moindre : par exemple, celle de 10 en laquelle le plus grand nombre soit 100, il faut laisser les 50 premiers & moindres nombres en la disposition qu'on les trouvera en la table de 10, faisant partie de celle de 14 ; & pour les autres 50 qui sont les complémens des 50 premiers, au lieu qu'en la table de 10 qui fait partie

de celle de 14, on les a pris sur 196, il ne les faudra prendre que sur 100: & afin de ne se point tromper, & de ne prendre point un nom pour un autre, on écrira les 50 premiers nombres, sçavoir 1, 2, 3, 4, &c. & au dessous dans une seconde ligne, leurs complémens pris sur 196, comme ils sont cy-devant; & dans une troisiéme ligne au dessous, on mettra les complémens des mesmes nombres de la premiere ligne pris sur 100, comme on voit icy.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90	89
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
184	183	182	181	180	179	178	177	176	175	174	173
88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
172	171	170	169	168	167	166	165	164	163	162	161
76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
160	159	158	157	156	155	154	153	152	151	150	149
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53
49	50										
148	147										
52	51										

34	162	161	160	158	156	43	40	38	33	
153	19	176	175	174	173	26	25	20	44	
152	170	9	185	186	183	18	10	27	45	
150	168	16	1	195	194	4	181	29	47	A
147	165	180	192	6	7	189	17	32	50	
49	31	184	8	190	191	5	13	166	148	
48	30	15	193	3	2	196	182	167	149	
46	28	187	12	11	14	179	188	169	151	
42	177	21	22	23	24	171	172	178	155	
164	35	36	37	39	41	154	157	159	163	

	34	66	65	64	62	60	43	40	38	33
	57	19	80	79	78	77	26	25	20	44
	56	74	9	89	90	87	18	10	27	45
B	54	72	16	1	99	98	4	85	29	47
	51	69	84	96	6	7	93	17	32	50
	49	31	88	8	94	95	5	13	70	52
	48	30	15	97	3	2	100	86	71	53
	46	28	91	12	11	14	83	92	73	55
	42	81	21	22	23	24	75	76	82	59
	68	35	36	37	39	41	58	61	63	67

La table cottée A, eſt celle de 10 qui fait partie de celle de 14, & contient les nombres de la premiere & ſeconde ligne.

La table cottée B, eſt celle de 10 ſimplement, & ne fait partie de nulle autre, & contient les nombres de la premiere & troiſiéme ligne.

En cette table B, les nombres de la premiere ligne, ſçavoir depuis 1 juſques à 50, ſont aux meſmes lieux qu'en la table A.

Et ceux de la troiſiéme ligne, ſçavoir depuis 51 juſques à 100, ſont à la place de ceux de la ſeconde ligne, en la table A: ainſi pour faire la table B, je commence par le premier nombre 34 de la table A, lequel eſtant moindre que 50, je le laiſſe en la table B au meſme lieu, & pourſuivant je trouve 162, 161, 160, 158, 156, qui ſurpaſſent 50, c'eſt pourquoy je cherche dans la ſeconde ligne le lieu où ils ſont, & prens au lieu d'eux le nombre qui eſt dans la troiſiéme ligne, ſçavoir 66, 65, 64, 62, 60, que je mets enſuite de 34, & aux meſmes lieux où eſtoient 162, 161, 160, 158, 156, & ainſi continuant en la meſme ſorte, on achevera la table B, comme elle eſt icy.

Mais on n'eſt pas obligé de faire les tables en telle ſorte, que les nombres d'une enceinte n'anticipent pas ſur l'autre, car on peut prendre les nombres au hazard & comme ils viendront, & ſi on ne laiſſera pas d'avoir une figure parfaite, mais elle ne pourra pas ſervir, comme la precedente, à faire une figure moindre. Par exemple, ſi en la ligne interieure de 10 il y avoit des nombres plus grands que 50, & moindres que 99, on ne pourroit pas la transformer en une ſimple, dont le plus grand nombre fuſt 100.

On pourroit auſſi mettre les nombres de ſuite aux enceintes ſans les entremeſler; mais par un ordre contraire au precedent, ſçavoir mettant les nombres du milieu à la figure de 4, & les ſuivans, avec leurs complémens à l'enceinte de 6, & ainſi continuant juſques à la derniere enceinte.

Par ce moyen la table de 4 contiendroit les nombres ſuivans.

98	97	96	95	94	93	92	91
99	100	101	102	103	104	105	106

L'enceinte de la table de 6 contiendra,

90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
107	108	109	110	111	112	113	114	115	116

Celle de la table de 8 contiendroit,

80	79	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69
117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128

68	67
129	130

Celle de 10 auroit,

66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142

54	53	52	51	50	49
143	144	145	146	147	148

Celle de 12 contiendroit

48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37
149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160

36	35	34	33	32	31	30	29	28	27
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170

Enfin la derniere enceinte de 14 contiendroit le reste des nombres, qui est,

26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182

14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194

2	1
195	196

Et la figure estant disposée selon la methode dont il a esté parlé cy-devant, on aura celle qui suit.

195	171	25	180	23	179	21	178	24	175	16	14	177	1
3	28	31	32	164	163	162	161	160	159	48	47	27	194
189	30	42	133	66	137	65	136	54	135	63	147	167	8
13	39	146	129	77	118	70	121	71	72	130	51	158	184
4	44	144	73	116	85	110	89	109	82	124	53	153	193
15	40	58	78	84	103	93	92	106	113	119	139	157	182
185	156	56	128	86	98	100	101	95	111	69	141	41	12
7	155	138	74	83	102	96	97	99	114	123	59	42	190
187	154	57	117	107	91	105	104	94	90	80	140	43	10
6	168	142	122	115	112	87	108	88	81	75	55	29	191
186	152	145	67	120	79	127	76	126	125	68	52	45	11
188	46	50	64	131	60	132	61	143	62	134	148	151	9
5	170	166	165	33	34	35	36	37	38	149	150	169	192
196	26	172	17	174	18	176	19	173	22	181	183	20	2

DE L'ATTACHEMENT DES FIGURES partiales & interieures.

EN la façon precédente de faire les figures, celles qui sont au dedans sont en quelque façon détachées, ou plûtost sont capables d'estre détachées l'une d'avec l'autre, ainsi qu'il a esté dit : car si on oste la premiere enceinte de la precédente figure de 14, la figure de 12 qui restera aura les conditions requises ; pareillement si on oste deux enceintes, il demeurera une figure de 10, qui aura encore toutes les lignes égales.

Que si on oste trois enceintes, on aura encore la table de 8, avec les mesmes conditions ; & si on oste quatre enceintes, on aura la table de 6, qui sera encore selon les regles : enfin si on oste cinq enceintes, il restera la table de 4 qui aura pareille qualité.

Mais il y a moyen d'attacher les enceintes l'une à l'autre, en telle sorte que lorsqu'on en ostera quelqu'une, les autres, ou laquelle on voudra de celles qui restent, ne soit point selon les loix ; quoy-que la figure totale qui est icy de 14, demeure toûjours bonne. Ce qui doit toûjours estre supposé, & en cecy il n'y a point de restriction ; car on choisit laquelle on veut, pour estre bonne, ou mauvaise.

Exemple. On pourra faire que la table entiere de 14 demeurant bonne, celle de 12 ne vaudra rien, mais les autres de 10, 8, 6 & 4, seront bonnes.

Ou bien qu'il n'y aura que celle de 10 qui n'ait pas les conditions requi-

ses, ou que ce sera celle de 8, 6 ou 4 seulement, en laquelle arrivera ce défaut.

On peut faire aussi qu'il y en aura deux, & lesquelles on voudra, qui n'auront pas les conditions requises, comme celles de 12 & de 10, ou de 12 & de 8, ou de 12 & de 6, ou de 12 & de 4.

Ou bien celles de 10 & de 8, de 10 & de 6, ou de 10 & de 4.

Ou celles de 8 & de 6, de 8 & de 4, ou de 6 & de 4.

Comme aussi on poutra faire que trois de ces figures ne vaudront rien, mais que les autres seront bonnes : par exemple, que celles de 12, 10 & 8 ne vaudront rien, ou celles de 12, 10 & 6, ou de 12, 10 & 4, ou de 12, 8, 6, ou de 12, 8, 4, ou de 12, 6, 4, ou de 10, 8, 6, ou de 10, 8, 4, ou de 10, 6, 4, ou enfin de 8, 6 & 4. Les autres estans disposées selon les loix.

Pareillement on fera que quatre des tables interieures ne vaudront rien, & la cinquiéme sera bonne, & cette cinquiéme sera laquelle on voudra ; sçavoir celle de 12, ou celle de 10 & de 8, de 6 ou de 4, où il faut toûjours supposer que l'exterieure, ou totale, soit bonne.

Enfin on peut faire en sorte que la seule figure totale sera bonne, & qu'aucune des particulieres & interieures n'aura les conditions requises.

Cet attachement se fait, transposant deux nombres d'une enceinte, à la place de deux autres équivalens d'une autre enceinte, en telle sorte que les nombres demeurent en la mesme ligne ou colomne où chacun d'eux estoit auparavant ; de sorte que pour faire cette transmutation ou transport, il faut que les nombres soient vis-à-vis l'un de l'autre, & s'ils n'y sont pas, il les y faut mettre, changeant aussi leurs complémens pour les mettre vis-à-vis de leurs nombres, les laissant pourtant dans leur mesme enceinte, de peur que la figure totale ne soit gastée. On peut voir ensuite des exemples de cela.

On veut faire en sorte qu'en la precédente figure de 14, qui est en la page 475, si on oste une enceinte, la figure de 12 qui restera ne vaille rien, mais les autres 10, 8 & 6 soient bonnes. Je prens deux lignes prochaines & paralleles, l'une de la figure de 14, & l'autre de celle de 12, & mets aussi leurs complémens vis-à-vis, comme on voit icy. Or il ne faut point comprendre dans ces lignes les nombres qui sont aux angles.

A	B	C	D
3			194
189	30	167	8
13	39	158	184
4	44	153	193
15	40	157	182
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
186	152	45	11
188	46	151	9
5			192

Premiere Fig.

Les nombres de la colomne D, sont complémens de ceux de la colomne A, & ceux de la colomne C, sont complémens de ceux de la colomne B.

Pour attacher ces deux figures ensemble, je cherche deux nombres dans la colomne A, égaux à deux de la colomne B, comme s'ensuit.

La somme de 3 & de 189, est 192 ; je cherche en B ou en C deux nombres qui fassent pareillement 192. Prenons 30 pour un des deux nombres, l'autre doit estre 162, lequel n'est point dans la ligne B. Je prens le suivant 39, le reste pour parvenir à 192 seroit 153, qui n'est point en B ; prenant 44, il faudroit avoir 148 : & enfin prenant 40, le reste sera 152 qui se trouve en B ; on aura donc 40 & 152, qui ensemble font autant que 3 & 189.

Mais parce que 3 & 189 ne sont pas vis-à-vis de 40 & 152, il les y faut mettre en plaçant 3 à la place de 15, & en suite 15

re 15 à la place de 31 & par mesme moyen 194, complément de 3, en la colomne D, en la place de 182, complément de 15, parce que 15 estoit vis-à-vis de l'un des nombres de la ligne B, sçavoir de 40.

A	B	C	D
15			182
186	30	167	11
13	39	158	184
4	44	153	193
3	40	157	194
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
189	152	45	8
188	46	151	9
5			192

Seconde Fig.

Semblablement je fais un échange de place entre 189, & son complément 8 avec 186, & son compléments 11, parce que 186 est vis-à-vis de l'autre nombre 152: on aura donc 3, 189, vis-à-vis de 40, 152, comme on voit en la seconde table.

A	B	C	D
15			182
186	30	167	11
13	39	158	184
4	44	153	193
40	3	157	194
185	156	41	12
7	155	42	190
187	154	43	10
6	168	29	191
152	189	45	8
188	46	151	9
5			192

Troisiéme Fig.

Maintenant pour faire l'attachement, je mets 3 à la place de 40 qui est vis-à-vis, & 189 à la place de 152; & cette transposition estant faite, si on ostoit la premiere enceinte de la figure en laquelle les lignes seroient disposées selon la suite des nombres contenus aux colonnes A, B, C, D de la troisiéme figure, la table de 12 n'auroit pas ses lignes égales, mais bien celles de 10, 8, 6 & 4.

Il faut remarquer, qu'à cette seconde transposition on ne touche point aux colomnes C, D où sont les complémens.

Par ce changement, la figure entiere de 14 ne reçoit aucun dommage, puisque les lignes disposées selon la suite A, B, C, D ne changent point de nombres, mais retiennent toûjours les mesmes; & les colomnes qui vont de haut en bas changent bien de nombres, mais en leurs places, elles en reçoivent d'équivalens. Par exemple, la colomne A, au lieu de 3, 189 qu'elle avoit, reçoit 40, 152, qui valent autant: mais si on prend la figure de 12 toute seule, il n'en ira pas ainsi; car encore que la colomne B, à la prendre de haut en bas, ne reçoive aucun dommage, il n'en est pas de mesme aux deux lignes qui vont selon la suite A, B, C, D, car en celle où sont 3, 157, on a mis 3 tout seul à la place de 40, puisque la ligne de la table de 12 ne commence qu'en 40; d'où s'ensuit que cette ligne sera trop petite de 37; & en la ligne 189, 45, on a mis 189 à la place de 152, & ainsi elle sera trop grande de 37.

Pour les autres figures de 10, 8, 6 & 4, elles ne reçoivent aucun changement, parce qu'on n'y a point touché.

A	B
30	
39	146
44	144
40	58
156	56
155	138
154	57
168	142
152	145
46	

On peut prendre, si on veut, trois nombres ou plus dans la colomne A, & en choisir autant d'autres, dont la somme soit égale dans la colomne B, ou dans son opposée C, & les transposer comme devant.

On auroit pû prendre 41, 151 dans la colomne C de la premiere figure, pour faire 192. De mesme, si on avoit pris 3, 188 dans la colomne A, qui font 191, on trouveroit 39, 152 dans la colomne B, qui font 191. Enfin on peut trouver ces égalitez en beaucoup de manieres.

Si on vouloit gaster la figure de 10 seulement, il faudroit transposer des nombres de l'enceinte de la figure de 12, à la place d'autres nombres équivalens de la figure de 10, & prendre leurs lignes ou colomnes comme devant, & comme on les voit icy.

Ainsi ayant trouvé que 44 & 155 de la colomne A en la table precedente, sont égaux à 57, 142 de la colomne B, aprés avoir mis 44, 155 vis-à-vis de 57, 142, comme devant, & pareillement leurs complémens qui sont en la colomne opposée de la table, je les transpose d'une colomne en l'autre, mettant 44, 155 à la place de 57, 142, & on les aura en la façon qu'ils sont icy.

A	
30	
39	146
154	144
40	58
156	56
168	138
57	44
142	155
152	145
46	

Et si on les applique à la figure de 14 en cette disposition, & qu'on en oste deux enceintes, la figure de 10 qui restera ne sera pas bonne; mais quelqu'autres enceintes qu'on puisse oster, ce qui restera ne laissera pas d'estre bon. On auroit pû prendre 30, 168, la somme est 198; leurs égaux dans la colomne B, sont 56, 142, ou bien 39, 156, ausquels sont égaux 138, 57 en l'autre colomne, ou bien 39, 155, & on aura 56, 138, qui valent autant, comme aussi 44, 156 font autant que 144, 56, & que 58, 142, & 44, 155 font autant que 57, 142, &c.

On fera la mesme chose des autres enceintes; car si on vouloit que la table de 8 toute seule ne valust rien, on mêleroit l'enceinte de 8 avec la precédente qui est de 10; & pour gaster la table de 6, on changera des nombres de son enceinte avec celle de 8, &c.

Pour gaster deux tables de suite, il faut mêler les nombres de la moindre, avec ceux de l'enceinte qui les enveloppe toutes

deux. Par exemple, pour faire que les tables de 12 & de 10 ne vallent rien, les autres demeurant bonnes, on changera les nombres de l'enceinte de 14, en des équivalents de celle de 10.

Et pour gaster les tables de 10 & de 8 seulement, on changera les nombres de la table de 8, en ceux de la table de 12, qui est celle qui enveloppe celle de 10.

Toutes les autres diversitez qu'on pourroit apporter à faire quelques-unes des figures bonnes, & quelqu'autres mauvaises, se feront en la façon qui a esté montrée, changeant toûjours les nombres de la figure qu'on veut gaster, avec la precédente qu'on veut conserver bonne. Il seroit trop long d'apporter des exemples de chaque sorte, veû mesme que ce qui a esté dit peut suffire estant bien entendu.

Il y a plusieurs autres manieres de gaster ou attacher les figures. En voicy des exemples.

Je cherche deux nombres aux deux colomnes marquées A de la figure precédente, sçavoir un en chacune, qui soient égaux à deux autres des mesmes lignes: par exemple, 154 & 144 font 298, & pareillement 146 & 152 font 298. Et parce que 154 & 144 sont vis-à-vis l'un de l'autre, on n'aura que faire d'y toucher; mais pour 152, il le faudra mettre vis-à-vis de 146, ou 146 à la place de 145, vis-à-vis de 152, & la ligne sera comme on la voit icy; & en mesme temps aussi on transposera le complément de 152 qui est en la ligne opposée dans la figure precédente de 14, vis-à-vis de 152; & pareillement le complément de 39, parce qu'on a mis 152 en sa place.

				B
30			30	
152	146		154	144
154	144		152	146
40	58		40	58
156	56		156	56
168	138		168	138
57	44		57	44
142	155		142	155
39	145		39	145
46			46	

Cela fait, on mettra 152, 146 à la place de 154, 144, comme on voit en la figure B; & en faisant ce dernier changement, il ne faut point toucher aux complémens, car c'est en cela que consiste l'attachement des enceintes l'une à l'autre, sçavoir, à transposer d'une enceinte à l'autre, ou d'une ligne à l'autre des nombres équivalens, sans toucher à leurs complémens.

On a encore 142, 56, qui font 198.

On a aussi 154, 56, qui font 210, & 152, 58 qui font autant.

On peut aussi changer les nombres qui sont aux angles. Ainsi en la figure qui a 14 de costé, on pourra mettre 196 à la place de 190 : & parce que 196 surpasse 170 de 26, il faudra trouver dans la colonne 171, 26, entre les nombres 28, 170, qui sont les angles de la table de 12, un nombre qui surpasse de 26 quelqu'un de ceux qui sont entre 195, 196; tel est 39 qui surpasse 13 de 26, comme aussi 30 qui surpasse 4 de 26 ; & par mesme moyen il faudroit un nombre entre 170 & 169 de la ligne 5, 192, un nombre qui surpassât de 26 quelqu'un des nombres qui sont entre 196 & 2 : & parce qu'il

ne s'en trouve point, on en cherchera deux entre 170 & 169 qui surpasse de 26 deux autres de la ligne 196, 2; tels sont 33 & 35, dont la somme est 68, qui surpassent de 26 les nombres 20 & 22, dont la somme est 42, de mesme 33 & 34, dont la somme est 67, surpassent de 26 les nombres 19 & 22, dont la somme est 41. Si on ne trouvoit pas deux nombres qui fissent l'égalité, on en pourroit prendre trois ou quatre, ou davantage.

On peut faire aussi des tables impaires par la methode precedente, dont on s'est servi pour faire les paires, comme on peut voir en la table de 5 qui est icy, en laquelle les relatifs sont dans les lignes opposées, & dans la mesme diagonale.

1	18	21	22	3
2	12	17	10	24
20	11	13	15	6
19	16	9	14	7
23	8	5	4	25

Or on peut varier cette table en beaucoup de manieres, à cause qu'elle est détachée, & que les nombres qui sont aux extrémitez des lignes, ou colomnes, sont complémens l'un de l'autre, (c'est à dire qu'ils sont autant étant joints l'un à l'autre, que les deux nombres extrémes) ainsi qu'on voit en 2 & 24; 20 & 6; 18 & 8, &c. & pareillement les nombres des angles opposez dans les diagonales, comme 1 & 25; 3 & 23. Et pareillement on peut transposer la table interieure de 9 toute entiere, c'est à dire sans toucher à l'ordre des nombres, qui ne se peut changer, ce qui se fait en huit façons: puis considerant la premiere colomne de l'enceinte exterieure, on y trouve trois nombres sans les angles, sçavoir 2, 20, 19, qui se peuvent varier en six façons, suivant la combinaison d'ordre de trois choses; & pareillement la premiere ligne où sont les trois nombres 18, 21, 22, se peut varier en six sortes. Si donc on multiplie ces trois nombres 8, 6, 6 l'un par l'autre, on aura 288, qui est la quantité des changemens & variations qu'on peut donner à cette table; & ainsi on fera 288 tables differentes de la precédente.

Pareillement on variera en beaucoup de sortes une table de six détachée: par exemple celle qui est icy.

9	25	26	23	18	10
16	1	35	34	4	21
20	32	6	7	29	17
24	8	30	31	5	13
15	33	3	2	36	22
27	12	11	14	19	28

Car premierement, la table de 4 de costé qui est au dedans se peut varier en 880 sortes, dont chacune se peut transposer en huit façons, qui sont en

tout

tout 7040 changemens, qui se feront sans toucher à l'enceinte exterieure, en laquelle les nombres de la colonne, qui sont quatre sans les angles, se peuvent varier en vingt-quatre sortes, selon la combinaison d'ordre de quatre choses, & pareillement il y a quatre nombres en la ligne de la mesme enceinte exterieure, qui se varieront aussi en vingt-quatre façons ; & ainsi il faudra multiplier 7040 par vingt-quatre, & le produit encore par vingt-quatre, pour avoir la quantité des tables qu'on peut faire en variant une seule d'entre elles, comme celle qui est icy, qui seront en tout 4055040 tables. Or on ne prend que les quatre nombres du milieu de chaque ligne de l'enceinte, sans toucher aux angles, afin qu'y ayant en la table quelques nombres qui ne soient point remuez, on ait de vrayes variations, & non point des transpositions de la table entiere.

Tables de 5. dont chacune se peut varier en 288 façons.

5	20	17	12	11
24	10	25	4	2
3	7	13	19	23
18	22	1	16	8
15	6	9	14	21

5	18	17	14	11
2	10	25	4	24
23	7	13	19	3
20	22	1	16	6
15	8	9	12	21

6	24	15	12	8
3	10	25	4	23
21	7	13	19	5
17	22	1	16	9
18	2	11	14	20

6	23	17	11	8
24	10	25	4	2
5	7	13	19	21
12	22	1	16	14
18	3	9	15	20

6	24	8	15	12
23	10	25	4	3
5	7	13	19	21
17	22	1	16	9
14	2	18	11	20

9	24	3	18	11
21	10	25	4	5
6	7	13	19	20
14	22	1	16	12
15	2	23	8	17

9	2	23	20	11
21	10	25	4	5
8	7	13	19	18
12	22	1	16	14
15	24	3	6	17

9	21	6	18	11
24	10	25	4	2
3	7	13	19	23
14	22	1	16	12
15	5	20	8	17

1	23	20	17	4
19	10	24	5	7
11	8	13	18	15
12	21	2	16	14
22	3	6	9	25

3	25	19	14	4
20	10	24	5	6
9	8	13	18	17
11	21	2	16	15
22	1	7	12	23

3	25	22	9	6
19	10	24	5	7
11	8	13	18	15
12	21	2	16	14
20	1	4	17	23

3	25	19	12	6
22	10	24	5	4
9	8	13	18	17
11	21	2	16	15
20	1	7	14	23

4	25	23	6	7
17	10	24	5	9
11	8	13	18	15
14	21	2	16	12
19	1	3	20	22

4	23	17	14	7
25	10	24	5	1
6	8	13	18	20
11	21	2	16	15
19	3	9	12	22

4	25	6	19	11
23	10	24	5	3
9	8	13	18	17
14	21	2	16	12
15	1	20	7	22

4	23	20	7	11
25	10	24	5	1
9	8	13	18	17
12	21	2	16	14
15	3	6	19	22

2	23	20	12	8
9	10	25	4	17
15	7	13	19	11
21	22	1	16	5
18	3	6	14	24

2	23	20	8	12
11	10	25	4	15
17	7	13	19	9
21	22	1	16	5
14	3	6	18	24

2	23	17	11	12
8	10	25	4	18
20	7	13	19	6
21	22	1	16	5
14	3	9	15	24

3	24	18	15	5
9	10	25	4	17
12	7	13	19	14
20	22	1	16	6
21	2	8	11	23

3	24	21	8	9
20	10	25	4	6
11	7	13	19	15
14	22	1	16	12
17	2	5	18	23

3	24	15	14	9
6	10	25	4	20
18	7	13	19	8
21	22	1	16	5
17	2	11	12	23

3	21	18	14	9
24	10	25	4	2
6	7	13	19	20
15	22	1	16	11
17	5	8	12	23

3	24	21	6	11
18	10	25	4	8
17	7	13	19	9
12	22	1	16	14
15	2	5	20	23

3	21	18	12	11
24	10	25	4	2
6	7	13	19	20
17	22	1	16	9
15	6	8	14	23

3	20	17	14	11
24	10	25	4	2
15	7	13	19	21
18	22	1	16	8
15	6	9	12	23

TABLE GENERALE
DES
QUARREZ DE QUATRE.

β	β	β	β	γ
1 13 8 12	1 13 12 8	1 13 8 12	1 13 12 8	1 14 8 11
16 4 9 5	16 4 5 9	16 4 9 5	16 4 5 9	15 4 10 5
11 7 14 2	7 11 14 2	10 6 15 3	6 10 15 3	12 7 13 2
6 10 3 15	10 6 3 15	7 11 2 14	11 7 2 14	6 9 3 16
α	α	γ	δ	δ
1 14 11 8	1 14 7 12	1 14 12 7	1 11 14 8	1 14 11 8
15 4 5 10	15 4 9 6	15 4 6 9	16 5 4 9	16 5 4 9
6 9 16 3	10 5 16 3	8 11 13 2	7 12 13 2	7 12 13 2
12 7 2 13	8 11 2 13	10 5 3 16	10 6 3 15	10 3 6 15
α	δ	δ	β	β
1 14 7 12	1 10 15 8	1 15 10 8	1 11 8 14	1 11 14 8
16 5 10 3	16 6 3 9	16 6 3 9	16 6 9 3	16 6 3 9
9 4 15 6	5 11 14 4	5 11 14 4	13 7 12 2	4 10 15 5
8 11 2 13	12 7 2 13	12 2 7 13	4 10 5 15	13 7 2 12
β	β	γ	α	γ
1 11 14 8	1 11 8 14	1 12 8 13	1 12 13 8	1 12 14 7
16 6 3 9	16 6 9 3	15 6 10 3	15 6 3 10	15 6 4 9
7 13 12 2	10 4 15 5	14 7 11 2	4 9 16 5	8 13 11 2
10 4 5 15	7 13 2 12	4 9 5 16	14 7 2 11	10 3 5 16
α	β	β	β	β
1 12 7 14	1 10 8 15	1 10 15 8	1 10 15 8	1 10 8 15
15 6 9 4	16 7 9 2	16 7 2 9	16 7 2 9	16 7 9 2
10 3 16 5	13 6 12 3	4 11 14 5	6 13 12 3	11 4 14 5
8 13 2 11	4 11 5 14	13 6 3 12	11 4 5 14	6 13 3 12
δ	δ	γ	α	γ
1 12 13 8	1 13 12 8	1 12 8 13	1 12 13 8	1 12 15 6
16 7 2 9	16 7 2 9	14 7 11 2	14 7 2 11	14 7 4 9
3 10 15 6	3 10 15 6	15 6 10 3	4 9 16 5	8 13 10 3
14 5 4 11	14 4 5 11	4 9 5 16	15 6 3 10	11 2 5 16
α	δ	β	β	γ
1 12 6 15	1 10 7 16	1 10 7 16	1 11 6 16	1 11 16 6
14 7 9 4	14 8 9 3	15 8 9 2	14 8 9 3	14 8 3 9
11 2 16 5	15 5 12 2	14 5 12 3	15 5 12 2	4 10 13 7
8 13 3 10	4 11 6 13	4 11 6 13	4 10 7 13	15 5 2 12
δ	γ	γ	δ	β
1 11 6 16	1 10 16 7	1 10 16 7	1 10 7 16	1 10 7 16
15 8 9 2	15 8 2 9	15 8 2 9	12 8 9 5	15 8 9 2
14 5 12 3	4 11 13 6	6 13 11 4	15 3 14 2	12 3 14 5
4 10 7 13	14 5 3 12	12 3 5 14	6 13 4 11	6 13 4 11

TABLE

γ	β	δ	δ	β
1 12 6 15	1 12 15 6	1 15 12 6	1 11 6 16	1 11 6 16
13 8 10 3	13 8 3 10	13 8 3 10	12 8 9 5	14 8 9 3
16 5 11 2	4 9 14 7	4 9 14 7	14 2 15 3	12 2 15 5
4 9 7 14	16 5 2 11	16 2 5 11	7 13 4 10	7 13 4 10
γ	γ	β	δ	δ
1 11 16 6	1 12 7 14	1 12 14 7	1 13 4 16	1 7 10 16
14 8 3 9	13 8 11 2	13 8 2 11	14 8 9 3	14 9 8 3
7 13 10 4	16 5 10 3	4 9 15 6	12 2 15 5	15 6 11 2
12 2 5 15	4 9 6 15	16 5 3 10	7 11 6 10	4 12 5 13
δ	δ	δ	δ	δ
1 7 10 16	1 7 10 16	1 7 10 16	1 12 15 6	1 12 5 16
15 9 8 2	12 9 8 5	15 9 8 2	14 9 4 7	14 9 8 3
14 6 11 3	15 4 13 2	12 4 13 5	3 8 13 10	15 6 11 2
4 12 5 13	6 14 3 11	6 14 3 11	16 5 2 11	4 7 10 13
δ	δ	δ	δ	δ
1 12 5 16	1 14 3 16	1 6 12 15	1 12 13 8	1 12 6 15
15 9 8 2	15 9 8 2	16 9 7 2	16 9 4 5	16 9 7 2
14 6 11 3	12 4 13 5	13 8 10 3	2 7 14 11	13 8 10 3
4 7 10 13	6 7 10 11	4 11 5 14	15 6 3 10	4 5 11 14
δ	δ		δ	δ
1 4 15 14	1 15 4 14	1 6 12 15	1 6 11 16	1 6 11 16
16 10 5 3	16 10 5 3	13 10 8 3	12 10 7 5	13 10 7 4
9 7 12 6	9 7 12 6	16 7 9 2	13 3 14 4	12 3 14 5
8 13 2 11	8 2 13 11	4 11 5 14	8 15 2 9	8 15 2 9
δ		δ	β	β
1 12 13 8	1 12 6 15	1 13 12 8	1 7 12 14	1 7 14 12
15 10 3 6	13 10 8 3	15 10 3 6	16 10 5 3	16 10 3 5
2 7 14 11	16 7 9 2	2 7 14 11	13 11 8 2	4 6 15 9
16 5 4 9	4 5 11 14	16 4 5 9	4 6 9 15	13 11 2 8
α	β	γ	α	γ
1 7 14 12	1 7 12 14	1 8 12 13	1 8 13 12	1 8 14 11
16 10 3 5	16 10 5 3	15 10 6 3	15 10 3 6	15 10 4 5
11 13 8 2	6 4 15 9	14 11 7 2	4 5 16 9	12 13 7 2
6 4 9 15	11 13 2 8	4 5 9 16	14 11 2 7	6 3 9 16
α	δ	δ	δ	δ
1 8 11 14	1 4 14 15	1 14 4 15	1 5 12 16	1 5 12 16
15 10 5 4	16 11 5 2	16 11 5 2	14 11 6 3	15 11 6 2
6 3 16 9	9 6 12 7	9 6 12 7	15 8 9 2	14 8 9 3
12 13 2 7	8 13 3 10	8 3 13 10	4 10 7 13	4 10 7 13
δ	δ	δ	δ	δ
1 5 12 16	1 5 12 16	1 10 15 8	1 10 7 16	1 10 7 16
10 11 6 7	15 11 6 2	14 11 4 5	14 11 6 3	15 11 6 2
15 4 13 2	10 4 13 7	3 6 13 12	15 8 9 2	14 8 9 3
8 14 3 9	8 14 3 9	16 7 2 9	4 5 12 13	4 5 12 13

	δ				β				β				β				β		
1	14	3	16	1	6	11	15	1	6	15	12	1	6	13	12	1	6	12	15
15	11	6	2	16	11	5	2	16	11	2	5	16	11	2	5	16	11	5	2
10	4	13	7	13	10	8	3	4	7	14	9	10	13	8	3	7	4	14	9
8	5	12	9	4	7	9	14	13	10	3	8	7	4	9	14	10	13	3	8
	δ				δ				γ				·				γ		
1	8	13	12	1	13	8	12	1	8	12	13	1	8	13	12	1	8	15	10
16	11	2	5	16	11	2	5	14	11	7	2	14	11	2	7	14	11	4	5
3	6	15	10	3	6	15	10	15	10	6	3	4	5	16	9	12	13	6	3
14	9	4	7	14	4	9	7	4	5	9	16	15	10	3	6	7	2	9	16
	·																		
1	8	10	15	1	4	15	14	1	4	14	15	1	9	16	8	1	9	16	8
14	11	5	4	9	12	7	6	9	12	6	7	14	12	5	3	15	12	5	2
7	2	16	9	16	5	10	3	16	5	11	2	4	6	11	13	4	7	10	13
12	13	3	6	8	13	2	11	8	13	3	10	15	7	2	10	14	6	3	11
	δ				β				γ				β				δ		
1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	16	11	1	7	10	16	1	7	10	16
14	12	5	3	15	12	5	2	15	12	2	5	14	12	5	3	15	12	5	2
15	9	8	2	14	9	8	3	4	7	13	10	15	9	8	2	14	9	8	3
4	7	10	13	4	7	10	13	14	9	3	8	4	6	11	13	4	6	11	13
	γ				δ				β				γ				γ		
1	7	16	10	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	16	11	1	8	10	15
14	12	3	5	8	12	5	9	15	12	5	2	15	12	2	5	13	12	6	3
4	6	13	11	15	3	14	2	8	3	14	9	10	13	7	4	16	9	7	2
15	9	2	8	10	13	4	7	10	13	4	7	8	3	9	14	4	5	11	14
	β				δ				δ				γ				δ		
1	8	15	10	1	13	4	16	1	7	10	16	1	7	16	10	1	7	10	16
13	12	3	6	15	12	5	2	8	12	5	9	14	12	3	5	14	12	5	3
4	5	14	11	8	3	14	9	14	2	15	3	11	13	6	4	8	2	15	9
16	9	2	7	10	6	11	7	11	13	4	6	8	2	9	15	11	13	4	6
	γ				β				δ				δ				δ		
1	8	11	14	1	8	14	11	1	13	4	16	1	3	14	16	1	3	14	16
13	12	7	2	13	12	2	7	14	12	5	3	12	13	4	5	15	13	4	2
16	9	6	3	4	5	15	10	8	2	15	9	15	8	9	2	12	8	9	5
4	5	10	15	16	9	3	6	11	7	10	6	6	10	7	11	6	10	7	11
	δ				δ				δ				δ				δ		
1	3	14	16	1	3	14	16	1	10	7	16	1	10	7	16	1	10	15	8
15	13	4	2	10	13	4	7	12	13	4	5	15	13	4	2	12	13	6	3
10	6	11	7	15	6	11	2	15	8	9	2	12	8	9	5	5	4	11	14
8	12	5	9	8	12	5	9	6	3	14	11	6	3	14	11	16	7	2	9
	δ				β				β				β				β		
1	12	5	16	1	4	14	15	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	14	15
15	13	4	2	16	13	3	2	16	13	2	3	16	13	2	3	16	13	3	2
10	6	11	7	11	10	8	5	6	7	12	9	10	11	8	5	7	6	12	9
8	3	14	14	6	7	9	12	11	10	5	8	7	6	9	12	10	11	5	8

α 1 8 10 15 16 13 3 2 5 4 14 11 12 9 7 6	α 1 10 8 15 16 13 3 2 5 4 14 11 12 7 9 6	α 1 7 14 12 8 13 2 11 9 4 15 6 16 10 3 5	α 1 7 14 12 11 13 2 8 6 4 15 9 16 10 3 5	1 7 16 10 11 13 4 6 14 12 5 3 8 2 9 15
1 7 16 10 14 13 4 3 11 12 5 6 8 2 9 15	α 1 8 9 16 14 13 4 3 7 2 15 10 12 11 6 5	α 1 11 6 16 14 13 4 3 7 2 15 10 12 8 9 5	γ 1 8 14 11 12 13 7 2 15 10 4 5 6 3 9 16	α 1 8 11 14 12 13 2 7 6 3 16 9 15 10 5 4
γ 1 8 15 10 12 13 6 3 14 11 4 5 7 2 9 16	1 8 10 15 12 13 3 6 7 2 16 9 14 11 5 4	α 1 2 15 16 12 14 3 5 13 7 10 4 8 11 6 9	1 2 16 15 13 14 4 3 12 7 9 6 8 11 5 10	α 1 2 15 16 13 14 3 4 12 7 10 5 8 11 6 9
α 1 11 6 16 12 14 3 5 13 7 10 4 8 2 15 9	α 1 11 6 16 13 14 3 4 12 7 10 5 8 2 15 9	α 1 4 13 16 12 14 3 5 15 9 8 2 6 7 10 11	β 1 4 13 16 15 14 3 2 12 9 8 3 6 7 10 11	γ 1 4 16 13 15 14 2 3 6 7 11 10 12 9 5 8
β 1 7 10 16 12 14 3 5 15 9 8 2 6 4 13 11	γ 1 7 16 10 12 14 5 3 6 4 11 13 15 9 2 8	α 1 7 10 16 15 14 3 2 12 9 8 5 6 4 13 11	α 1 4 13 16 8 14 3 9 15 5 12 2 10 11 6 7	γ 1 4 16 13 15 14 2 3 10 11 7 6 8 5 9 12
β 1 4 13 16 15 14 3 2 8 5 12 9 10 11 6 7	γ 1 8 10 15 11 14 4 5 16 9 7 2 6 3 13 12	β 1 8 15 10 11 14 5 4 6 3 12 13 16 9 2 7	α 1 11 6 16 15 14 3 2 8 5 12 9 10 4 13 7	1 3 16 12 10 14 3 7 8 4 13 9 15 11 2 6
1 5 16 12 10 14 3 7 15 11 6 2 8 4 9 13	1 5 16 12 15 14 3 2 10 11 6 7 8 4 9 13	1 5 16 12 8 14 3 9 10 4 13 7 15 11 2 6	α 1 7 10 16 8 14 3 9 12 2 15 5 13 11 6 4	γ 1 7 16 10 12 14 5 3 13 11 4 6 8 2 9 15
β 1 7 10 16 12 14 3 5 8 2 15 9 13 11 6 4	γ 1 8 13 12 11 14 7 2 16 9 4 5 6 3 10 15	β 1 8 12 13 11 14 2 7 6 3 15 10 16 9 5 4	α 1 11 6 16 12 14 3 5 8 2 15 9 13 7 10 4	δ 1 4 13 16 12 15 2 5 14 9 8 3 7 6 11 10
β 1 4 13 16 14 15 2 3 12 9 8 5 7 6 11 10	γ 1 4 16 13 14 15 3 2 7 6 10 11 12 9 5 8	β 1 6 11 16 12 15 2 5 14 9 8 3 7 4 13 10	γ 1 6 16 11 12 15 5 2 7 4 10 13 14 9 3 8	δ 1 6 11 16 14 13 2 3 12 9 8 5 7 4 13 10

				α
1 3 16 14	1 3 16 14	1 3 16 14	1 3 16 14	1 4 13 16
8 15 2 9	13 15 2 4	13 15 2 4	12 15 2 [illegible]	8 15 2 9
13 6 11 4	8 6 11 9	12 10 7 5	13 10 7 4	14 5 12 3
12 10 5 7	12 10 5 7	8 6 9 11	8 6 9 11	11 10 7 6
β	γ	γ	β	α
1 4 13 16	1 4 16 13	1 8 11 14	1 8 14 11	1 10 7 16
14 15 2 3	14 15 3 2	10 15 4 5	10 15 5 4	14 15 2 3
8 5 12 9	11 10 6 7	16 9 6 3	7 2 12 13	8 5 12 9
11 10 7 6	8 5 9 12	7 2 13 12	16 [illegible] 3 6	11 4 13 6
α	α	α		α
1 6 11 16	1 6 11 16	1 7 14 12	1 7 14 12	1 9 8 16
7 15 2 10	14 15 2 3	9 15 4 6	9 15 4 6	14 15 2 3
14 4 13 3	7 4 13 10	8 2 13 11	16 10 5 3	7 4 15 10
12 9 8 5	12 9 8 5	16 10 3 5	8 2 11 13	12 6 11 5
α	γ	β	γ	β
1 6 11 16	1 6 16 11	1 6 11 16	1 8 13 12	1 8 12 13
8 15 2 9	12 15 5 2	12 15 2 5	10 15 6 3	10 15 3 6
12 3 14 5	13 10 4 7	8 3 14 9	16 9 4 5	7 2 14 11
13 10 7 4	8 3 9 14	13 10 7 4	7 2 11 14	16 9 5 4
α	γ	γ	γ	γ
1 10 7 16	1 4 15 14	1 4 14 15	1 6 15 12	1 6 12 15
12 15 2 5	13 16 3 2	13 16 2 3	11 16 5 2	11 16 2 5
8 3 14 9	8 5 10 11	12 9 7 6	8 3 10 13	14 9 7 4
13 6 11 4	12 9 6 7	8 5 11 10	14 9 4 7	8 3 13 10
γ	γ	γ	γ	γ
1 4 14 15	1 4 15 14	1 7 14 12	1 7 12 14	1 6 15 12
13 16 2 3	13 16 3 2	10 16 5 3	10 16 3 5	11 16 5 2
8 5 11 10	12 9 6 7	8 2 11 13	15 9 6 4	14 9 4 7
12 9 7 6	8 5 10 11	15 9 4 6	8 2 13 11	8 3 10 13
γ	γ	γ	γ	γ
1 6 12 15	1 7 14 12	1 7 12 14	2 13 7 12	2 13 11 8
11 16 2 5	10 16 5 3	10 16 3 5	16 3 9 6	16 3 5 10
8 3 13 10	15 9 4 6	8 2 13 11	11 8 14 1	7 12 14 1
14 9 7 4	8 2 11 13	15 9 6 4	5 10 4 15	9 6 4 15
[illegible]	[illegible]	β	β	β
2 13 8 11	2 13 12 7	2 14 7 11	2 14 11 7	2 14 11 7
16 3 10 5	16 3 6 9	15 3 10 6	15 3 6 10	15 3 6 10
9 6 15 4	5 10 15 4	12 8 13 1	5 9 16 4	8 12 13 1
7 12 1 14	11 8 1 14	5 9 4 16	12 8 1 13	9 5 4 16
β	α	α	α	α
2 14 7 11	2 11 8 13	2 11 14 7	2 14 11 7	2 9 16 7
15 3 10 6	15 4 9 6	15 4 5 10	15 4 5 10	15 5 4 10
9 5 16 4	10 5 16 3	8 13 12 1	8 13 12 1	6 12 13 3
8 12 1 13	7 14 1 12	9 6 3 16	9 3 6 16	11 8 1 14

α	γ	·	γ	·
2 15 6 11	2 11 13 8	2 11 8 13	2 11 7 14	2 11 14 7
16 5 12 1	16 5 3 10	16 5 10 3	16 5 9 4	16 5 4 9
9 4 13 8	7 14 12 1	9 4 15 6	13 8 12 1	3 10 15 6
7 10 3 14	9 4 6 15	7 14 1 12	3 10 6 15	13 8 1 12
β	β	β	β	α
2 12 7 13	2 12 13 7	2 12 13 7	2 12 7 13	2 9 16 7
15 5 10 4	15 5 4 10	15 5 4 10	15 5 10 4	15 6 3 10
14 8 11 1	3 9 16 6	8 14 11 1	9 3 16 6	4 11 14 5
3 9 6 16	14 8 1 11	9 3 6 16	8 14 1 11	13 8 1 12
α	α	α	α	γ
2 15 4 13	2 11 14 7	2 11 14 7	2 9 8 15	2 9 15 8
16 6 11 1	12 6 3 13	13 6 3 12	11 7 10 6	16 7 1 10
9 3 14 8	5 9 16 4	4 9 16 5	16 4 13 1	5 14 12 3
7 10 5 12	15 8 1 10	15 8 1 10	5 14 3 12	11 4 6 13
β	γ	β	α	α
2 9 8 15	2 11 5 16	2 11 16 5	2 14 3 15	2 9 8 15
16 7 10 1	14 7 9 4	14 7 4 9	16 7 10 1	13 7 10 4
11 4 13 6	15 6 12 1	3 10 13 8	11 4 13 6	16 6 11 1
5 14 3 12	3 10 8 13	15 6 1 12	5 9 8 12	3 12 5 14
β	γ	β	γ	α
2 9 8 15	2 9 15 8	2 12 5 15	2 12 15 5	2 12 5 15
16 7 10 1	16 7 1 10	13 7 10 4	13 7 4 10	16 7 10 1
13 6 11 4	3 12 14 5	16 6 11 1	3 9 14 8	13 6 11 4
3 12 5 14	13 6 4 11	3 9 8 14	16 6 1 11	3 9 8 14
α	γ	β	γ	β
2 11 13 8	2 11 8 13	2 11 13 8	2 12 15 5	2 12 5 15
12 7 1 14	14 7 12 1	14 7 1 12	13 7 4 10	13 7 10 4
5 10 16 3	15 6 9 4	3 10 16 5	8 14 9 3	11 1 16 6
15 6 4 9	3 10 5 16	15 6 4 9	11 1 6 16	8 14 3 9
α	β	β	β	β
2 13 11 8	2 9 7 16	2 9 16 7	2 9 16 7	2 9 7 16
14 7 1 12	15 8 10 1	15 8 1 10	15 8 1 10	15 8 10 1
3 10 16 5	14 5 11 4	3 12 13 6	5 14 11 4	12 3 13 6
15 4 6 9	3 12 6 13	14 5 4 11	12 3 6 13	5 14 4 11
α	α	γ	·	γ
2 9 16 7	2 9 16 7	2 11 7 14	2 11 14 7	2 11 16 5
12 8 1 13	13 8 1 12	13 8 12 1	13 8 1 12	13 8 3 10
5 11 14 4	4 11 14 5	16 5 9 4	3 10 15 6	7 14 9 4
15 6 3 10	15 6 3 10	3 10 6 15	16 5 4 9	12 1 6 15
·	α	α	α	α
2 11 5 16	2 3 16 13	2 15 10 7	2 5 12 15	2 5 12 15
13 8 10 3	15 9 6 4	16 9 8 1	11 9 8 6	14 9 8 3
12 1 15 6	10 8 11 5	3 6 11 14	14 4 13 3	11 4 13 6
7 14 4 9	7 14 1 12	13 4 5 12	7 16 1 10	7 16 1 10

	δ		δ	γ
2 5 11 16	2 11 14 7	2 11 5 16	2 14 11 7	2 7 13 12
14 9 7 4	16 9 4 5	14 9 7 4	16 9 4 5	16 9 3 6
15 8 10 1	1 8 13 12	15 8 10 1	1 8 13 12	11 14 8 1
3 12 6 13	15 6 3 10	3 6 12 13	15 3 6 10	5 4 10 15
α	γ	α	β	β
2 7 12 13	2 7 11 14	2 7 14 11	2 8 11 13	2 8 13 11
16 9 6 3	16 9 5 4	16 9 4 5	15 9 6 4	15 9 4 6
5 4 15 10	13 12 8 1	3 6 15 10	14 12 7 1	3 5 16 10
11 14 1 8	3 6 10 15	13 12 1 8	3 5 10 16	14 12 1 7
β	β	δ	δ	δ
2 8 13 11	2 8 11 13	2 5 11 16	2 11 14 7	2 11 5 16
15 9 4 6	15 9 6 4	15 10 8 1	15 10 3 6	15 10 8 1
12 14 7 1	5 3 16 10	14 7 9 4	1 8 13 12	14 7 9 4
5 3 10 16	12 14 1 7	3 12 6 13	16 5 4 9	3 6 12 13
δ	δ	δ	δ	
2 5 16 11	2 15 4 13	2 7 14 11	2 7 14 11	2 3 16 13
15 10 3 6	16 10 7 1	8 10 3 13	13 10 3 8	10 11 8 5
4 7 14 9	5 3 14 12	9 5 16 4	4 5 16 9	15 6 9 4
13 12 1 8	11 6 9 8	15 12 1 6	15 12 1 6	7 14 1 12
		δ	β	β
2 10 15 7	2 10 15 7	2 5 12 15	2 5 15 12	2 5 12 15
13 11 6 4	16 11 6 1	7 11 6 10	16 11 1 6	16 11 6 1
3 5 12 14	3 8 9 14	16 4 13 1	9 14 8 3	7 4 13 10
16 8 1 9	13 5 4 12	9 14 3 8	7 4 10 13	9 14 3 8
γ	β	δ	β	δ
2 7 9 16	2 7 16 9	2 14 3 15	2 3 13 16	2 5 12 15
14 11 5 4	14 11 4 5	16 11 6 1	10 11 5 8	13 11 6 4
15 10 8 1	3 6 13 12	7 4 13 10	15 6 12 1	16 10 7 1
3 6 12 13	15 10 1 8	9 5 12 8	7 14 4 9	3 8 9 14
β	γ	β	γ	δ
2 5 12 15	2 5 15 12	2 8 9 15	2 8 15 9	2 8 9 15
16 11 6 1	16 11 1 6	13 11 6 4	13 11 4 6	16 11 6 1
13 10 7 4	3 8 14 9	16 10 7 1	3 5 14 12	13 10 7 4
3 8 9 14	13 10 4 7	3 5 12 14	16 10 1 7	3 5 12 14
δ	γ	β	γ	β
2 7 13 12	2 7 12 13	2 7 13 12	2 8 15 9	2 8 9 15
8 11 1 14	14 11 8 1	14 11 1 8	13 11 4 6	13 11 6 4
9 6 16 3	15 10 5 4	3 6 16 9	12 14 5 3	7 1 16 10
15 10 4 5	3 6 9 16	15 10 4 5	7 1 10 16	12 14 3 5
δ	δ	γ	β	β
2 13 7 12	2 3 13 16	2 13 3 16	2 5 11 16	2 5 16 11
14 11 1 8	15 12 6 1	15 12 6 1	15 12 6 1	15 12 1 6
3 6 16 9	10 5 11 8	10 5 11 8	14 9 7 4	3 8 13 10
15 4 10 5	7 14 4 9	7 4 14 9	3 8 10 13	14 9 4 7

	β				β				δ				δ				γ		
2	5	16	11	2	5	11	16	2	5	16	11	2	5	16	11	2	7	11	14
15	12	1	6	15	12	6	1	8	12	1	13	13	12	1	8	13	12	8	1
9	14	7	4	8	3	13	10	9	7	14	4	4	7	14	9	16	9	5	4
8	3	10	13	9	14	4	7	15	10	3	6	15	10	3	6	3	6	10	15
	α				γ				α				δ				δ		
2	7	14	11	2	7	16	9	2	7	9	16	2	7	10	15	2	7	10	15
13	12	1	8	13	12	3	6	13	12	6	3	8	12	5	9	11	12	5	6
3	6	15	10	11	14	5	4	8	1	15	10	11	1	16	6	8	1	16	9
16	9	4	5	8	1	10	15	11	14	4	5	13	14	3	4	13	14	3	4
	δ												δ				δ		
2	8	11	13	2	8	15	9	2	8	15	9	2	11	8	13	2	1	16	15
14	12	1	7	11	12	5	6	14	12	5	3	14	12	1	7	11	13	4	6
3	5	16	10	14	13	4	3	11	13	4	6	3	5	16	10	14	8	9	3
15	9	6	4	7	1	10	16	7	1	10	16	15	6	9	4	7	12	5	10
	δ								δ				δ				δ		
2	1	16	15	2	1	15	16	2	11	14	7	2	12	5	15	2	3	14	15
14	13	4	3	14	13	3	4	12	13	8	1	14	13	4	3	7	13	4	10
11	8	9	6	11	8	10	5	5	4	9	16	11	8	9	6	16	6	11	1
7	12	5	10	7	12	6	9	15	6	3	10	7	1	16	10	9	12	5	8
	γ				β				γ				β				δ		
2	3	15	14	2	3	14	15	2	7	9	16	2	7	16	9	2	12	5	15
16	13	1	4	16	13	4	1	12	13	3	6	12	13	6	3	16	13	4	1
9	12	8	5	7	6	11	10	15	10	8	1	5	4	11	14	7	6	11	10
7	6	10	11	9	12	5	8	5	4	14	11	15	10	1	8	9	3	14	8
	δ				β				γ				β				γ		
2	3	14	15	2	3	14	15	2	3	15	14	2	8	9	15	2	8	15	9
11	13	4	6	16	13	4	1	16	13	1	4	11	13	4	6	11	13	6	4
16	10	7	1	11	10	7	6	5	8	12	9	16	10	7	1	5	3	12	14
5	8	9	12	5	8	9	12	11	10	6	7	5	3	14	12	16	10	1	7
	δ																		
2	8	9	15	2	6	15	11	2	6	15	11	2	6	15	11	2	6	15	11
16	13	4	1	7	13	4	10	9	13	4	8	9	13	4	8	16	13	4	1
11	10	7	6	9	3	14	8	7	3	14	10	16	12	5	1	9	12	5	8
5	3	14	12	16	12	1	5	16	12	1	5	7	3	10	14	7	3	10	14
	δ				γ				β				γ				β		
2	7	11	14	2	7	14	11	2	7	11	14	2	8	15	9	2	8	9	15
8	13	1	12	12	13	8	1	12	13	1	8	11	13	6	4	11	13	4	6
9	4	16	5	15	10	3	6	5	4	16	9	14	12	3	5	7	1	16	10
15	10	6	3	5	4	9	16	15	10	6	3	7	1	10	16	14	12	5	3
	δ																		
2	11	7	14	2	4	15	13	2	4	15	13	2	4	13	15	2	5	12	15
12	13	1	8	5	14	3	12	16	14	3	1	16	14	13	3	26	14	1	3
5	4	16	9	16	7	10	1	5	7	10	12	9	11	8	6	9	11	8	6
15	6	10	3	11	9	6	8	11	9	6	8	7	5	12	10	7	4	13	10

β	β	β	β	
2 3 13 16	2 3 16 13	2 3 16 13	2 3 13 16	2 4 15 13
15 14 4 1	15 14 1 4	15 14 1 4	15 14 4 1	9 14 3 8
12 9 7 6	5 8 11 10	9 12 7 6	8 5 11 10	16 11 6 1
5 8 10 11	12 9 6 7	8 5 10 11	9 12 6 7	7 5 10 12
			α	α
2 4 13 15	2 4 15 13	2 9 8 15	2 7 9 16	2 9 7 16
16 14 1 3	16 4 3 1	16 14 1 3	15 14 4 1	15 14 4 1
5 7 12 10	9 11 6 8	5 7 12 10	6 3 13 12	6 3 13 12
11 9 8 6	7 5 10 12	11 4 13 6	11 10 8 5	11 8 10 5
γ	α	γ	α	γ
2 7 13 12	2 7 12 13	2 7 16 9	2 7 9 16	2 3 16 13
11 14 8 1	11 14 1 8	11 14 5 4	11 14 4 5	14 15 4 1
16 9 3 6	5 4 15 10	13 12 3 6	8 1 15 10	7 6 9 12
5 4 10 15	16 9 6 3	8 1 10 15	13 12 6 3	11 10 5 8
γ	γ	γ	γ	γ
2 3 13 16	2 3 13 16	2 3 16 13	2 8 13 11	2 8 11 13
14 15 1 4	14 15 1 4	14 15 4 1	9 15 6 4	9 15 4 6
11 10 8 5	7 6 12 9	11 10 5 8	7 1 12 14	16 10 5 3
7 6 12 9	11 10 8 5	7 6 9 12	16 10 3 5	7 1 14 12
γ	γ	γ	γ	γ
2 5 16 11	2 5 11 16	2 5 11 16	2 5 16 11	2 8 11 13
12 15 6 1	12 15 1 6	12 15 1 6	12 15 6 1	9 15 4 6
7 4 9 14	13 10 8 3	7 4 14 9	13 10 3 8	7 1 14 12
13 10 3 8	7 4 14 9	13 10 8 3	7 4 9 14	16 10 5 3
γ	α	β	γ	β
2 8 13 11	2 3 14 15	2 3 14 15	2 3 15 14	2 5 12 15
9 15 6 4	11 16 1 6	13 16 1 4	13 16 4 1	11 16 1 6
16 10 3 5	13 10 7 4	11 10 7 6	8 5 9 12	13 10 7 4
7 1 12 14	8 5 12 9	8 5 12 9	11 10 6 7	8 3 14 9
γ	α			
2 5 15 12	2 5 12 15	2 4 13 15	2 4 13 15	2 5 12 15
11 16 6 1	13 16 1 4	14 16 3 1	14 16 3 1	14 16 3 1
8 3 9 14	11 10 7 6	7 5 10 12	11 9 6 8	11 9 6 8
13 10 4 7	8 3 14 9	11 9 8 6	7 5 12 10	7 4 13 10
	α	γ	β	β
2 9 8 15	2 3 14 15	2 3 15 14	2 3 14 15	2 7 13 12
14 16 3 1	7 16 1 10	13 16 4 1	13 16 1 4	9 16 6 3
7 5 10 12	13 6 11 4	12 9 5 8	7 6 11 10	8 1 11 14
11 4 13 6	12 9 8 5	7 6 10 11	12 9 8 5	15 10 4 5
γ	α	δ	α	
2 7 12 13	2 9 8 15	2 3 14 15	2 3 14 15	2 8 11 13
9 16 3 6	13 16 1 4	8 16 1 9	11 16 1 6	10 16 5 3
15 10 5 4	7 6 11 10	11 5 12 6	8 5 12 9	15 9 4 6
8 1 14 11	12 3 14 5	13 10 7 4	13 10 7 4	7 1 14 12

δ	δ	δ	γ	β
2 8 11 13	2 10 7 15	2 5 12 15	2 5 15 12	2 5 12 15
10 16 5 3	11 16 1 6	7 16 1 10	11 16 6 1	11 16 1 6
7 1 12 14	8 5 12 9	11 4 13 6	14 9 3 8	7 4 13 10
15 9 6 4	13 3 14 4	14 9 8 3	7 4 10 13	14 9 8 3
γ	β	δ	γ	α
2 7 14 11	2 7 11 14	2 9 8 15	3 13 6 12	3 13 8 10
9 16 5 4	9 16 4 5	11 16 1 6	16 2 9 7	16 2 11 5
15 10 3 6	8 1 13 12	7 4 13 10	10 8 15 1	9 7 14 4
8 1 12 13	15 10 6 3	14 5 12 3	5 11 4 14	6 12 1 15
γ	α	δ	β	β
3 13 10 8	3 13 12 6	3 14 8 9	3 14 9 8	3 14 12 5
16 2 5 11	16 2 7 9	15 2 12 5	15 2 5 12	15 2 8 9
6 12 15 1	5 11 14 4	10 7 13 4	6 11 16 1	6 11 13 4
9 7 4 14	10 8 1 15	6 11 1 16	10 7 4 13	10 7 1 16
β	δ	δ	δ	δ
3 14 5 12	3 9 16 6	3 14 7 10	3 10 7 14	3 13 12 6
15 2 9 8	14 4 5 11	16 4 13 1	13 4 9 8	15 4 5 10
10 7 16 1	7 13 12 2	9 5 12 8	12 5 16 1	2 9 16 7
6 11 4 13	10 8 1 15	6 11 2 15	6 15 2 11	14 8 1 11
γ	α	α	δ	δ
3 10 13 8	3 10 8 13	3 10 15 6	3 9 8 14	3 12 15 6
16 5 2 11	16 5 11 2	16 5 4 9	12 5 10 7	16 5 4 9
6 15 12 1	9 4 14 7	2 11 14 7	13 4 15 2	1 10 13 8
9 4 7 14	6 15 1 12	13 8 1 12	6 16 1 11	14 7 2 11
β	β	β	δ	γ
3 12 13 6	3 12 13 6	3 12 6 13	3 9 8 14	3 9 14 8
14 5 4 11	14 5 4 11	14 5 11 4	10 6 11 7	16 6 1 11
2 9 16 7	8 15 10 1	9 2 16 7	16 4 13 1	5 15 12 2
15 8 1 10	9 2 7 16	8 15 1 10	5 15 2 12	10 4 7 13
β	β	δ	γ	γ
3 9 8 14	3 10 16 5	3 15 2 14	3 9 14 8	3 12 14 5
16 6 11 1	15 6 4 9	16 6 11 1	16 6 1 11	13 6 4 11
10 4 13 7	2 11 13 8	10 4 13 7	2 12 15 5	2 9 15 8
5 15 2 12	14 7 1 12	5 9 8 12	13 7 4 10	16 7 1 10
δ	β	γ	β	δ
3 10 13 8	3 10 13 8	3 12 14 5	3 12 5 14	3 13 10 8
12 6 1 15	15 6 1 12	13 6 4 11	13 6 11 4	15 6 1 12
5 11 16 2	2 11 16 5	8 15 9 2	10 1 16 7	2 11 16 5
14 7 4 9	14 7 4 9	10 1 7 16	8 15 2 9	14 4 7 9
δ	δ	δ	δ	δ
3 9 8 14	3 10 15 6	3 12 13 6	3 13 12 6	3 6 15 10
10 7 12 5	16 7 2 9	14 7 2 11	14 7 2 11	14 7 2 11
15 2 13 4	1 12 13 8	1 10 15 8	1 10 15 8	4 9 16 5
6 16 1 11	14 5 4 11	16 5 4 9	16 4 5 9	13 12 1 8

	δ				δ				β				β				β		
3	9	16	6	3	9	16	6	3	9	16	6	3	9	16	6	3	9	6	16
10	8	1	15	15	8	1	10	14	8	1	11	14	8	1	11	14	8	11	1
7	13	12	2	2	13	12	7	2	12	13	7	5	15	10	4	12	2	13	7
14	4	5	11	14	4	5	11	15	5	4	10	12	2	7	13	5	15	4	10
	α				γ				α				δ				δ		
3	10	15	6	3	10	16	5	3	10	5	16	3	6	15	10	3	6	15	10
13	8	1	12	13	8	2	11	13	8	11	2	12	8	1	13	13	8	1	12
2	11	14	7	6	15	9	4	12	1	14	7	5	9	16	4	4	9	16	5
16	3	4	9	12	1	7	14	6	13	4	9	14	11	2	7	14	11	2	7
	δ				δ				δ				δ				γ		
3	12	5	14	3	13	4	14	3	14	11	6	3	2	16	13	3	6	13	12
13	8	9	2	15	8	9	2	16	9	8	1	14	9	7	4	16	9	2	7
6	1	16	11	6	1	16	11	2	7	10	15	11	8	10	5	10	15	8	1
10	13	4	7	10	12	5	7	13	4	5	12	6	15	1	12	5	4	11	14
	α				α				δ				δ				β		
3	6	12	13	3	6	15	10	3	3	12	14	3	8	13	10	3	8	13	10
16	9	7	2	16	9	4	5	8	9	6	11	16	9	4	3	14	9	4	7
5	4	14	11	2	7	14	11	13	4	13	2	1	6	15	12	2	5	16	11
10	15	1	8	13	12	1	8	10	16	1	7	14	11	2	7	15	12	1	6
	β				β														
3	8	13	10	3	8	10	13	3	2	16	13	3	2	13	16	3	11	14	6
14	9	4	7	14	9	7	4	11	10	8	5	11	10	5	8	13	10	7	4
12	15	6	1	5	2	16	11	14	7	9	4	14	7	12	1	2	5	12	15
5	2	11	16	12	15	1	6	6	15	1	12	6	15	4	9	16	8	1	9
					δ				γ				β				β		
3	11	14	6	3	5	12	14	3	5	14	12	3	5	12	14	3	6	16	9
16	10	7	1	6	10	7	11	16	10	1	7	16	10	7	1	15	10	4	5
2	8	9	15	16	4	13	1	9	15	8	2	6	4	13	11	2	7	13	12
13	5	4	12	9	15	2	8	6	4	11	13	9	15	2	8	14	11	1	8
	δ				γ				γ				δ				β		
3	15	2	14	3	5	14	12	3	8	14	9	3	6	13	12	3	6	13	12
16	10	7	1	16	10	1	7	13	10	4	7	8	10	1	15	15	10	1	8
6	4	13	11	2	8	15	9	2	5	15	12	9	7	16	2	2	7	16	9
9	5	12	8	13	11	4	6	16	11	1	6	14	11	4	5	14	11	4	5
	γ				β				δ				δ				α		
3	8	14	9	3	8	9	14	3	13	6	12	3	2	16	13	3	14	7	10
13	10	4	7	13	10	7	4	15	10	1	8	14	11	5	4	16	11	6	1
12	15	5	2	6	1	16	11	2	7	16	9	7	6	12	9	2	5	12	15
6	1	11	16	12	15	2	5	14	4	11	5	10	15	1	8	13	4	9	8
	δ				δ				δ				δ				α		
3	5	12	14	3	6	15	10	3	8	13	10	3	13	8	10	3	6	12	13
6	11	8	9	16	11	2	5	14	11	2	7	14	11	2	7	8	11	5	10
15	2	13	4	1	8	13	12	1	6	15	12	1	6	15	12	9	2	16	7
10	16	1	7	14	9	4	7	16	9	4	5	16	4	9	5	14	15	1	4

	α				α				α										
3	6	12	13	3	2	13	16	3	13	2	16	3	2	15	14	3	2	16	13
10	11	5	8	14	11	7	1	14	12	7	1	16	12	1	5	7	12	6	9
7	2	16	9	11	5	10	8	11	5	10	8	9	13	8	4	14	5	11	4
14	15	1	4	6	15	4	9	6	4	15	9	6	7	10	11	10	15	1	8
									β				β				β		
3	7	10	14	3	7	14	10	3	5	16	10	3	5	16	10	3	5	10	16
16	12	1	5	16	12	5	1	14	12	1	7	14	12	1	7	14	12	7	1
9	13	8	4	2	6	11	15	2	8	13	11	9	15	6	4	8	2	13	11
6	2	15	11	13	9	4	8	15	9	4	6	8	2	11	13	9	15	4	6
	α				γ				α										
3	6	15	10	3	6	16	9	3	6	9	16	3	7	14	10	3	7	10	14
13	12	1	8	13	12	2	7	13	12	7	2	9	12	5	8	16	12	1	5
2	7	14	11	10	15	5	4	8	1	14	11	16	13	4	1	2	6	15	11
16	9	4	5	8	1	11	14	10	15	4	5	6	2	11	15	13	9	8	4
									α				γ				β		
3	7	14	10	3	9	8	14	3	2	15	14	3	2	14	15	3	2	15	14
16	12	5	1	16	12	1	5	6	13	4	11	16	13	1	4	16	13	4	1
9	13	4	8	2	6	15	11	16	7	10	1	9	12	8	5	6	7	10	11
6	2	11	15	13	7	10	4	9	12	5	8	6	7	11	10	9	12	5	8
	γ				β				α										
3	6	9	16	3	6	16	9	3	12	5	14	3	1	16	14	3	1	16	14
12	13	2	7	12	13	7	2	16	13	4	1	15	13	2	4	15	13	2	4
14	11	8	1	5	4	10	15	6	7	10	11	6	8	11	9	10	12	7	5
5	4	15	10	14	11	1	8	9	2	15	8	10	12	5	7	6	8	9	11
									α				β				γ		
3	8	9	14	3	12	5	14	3	2	15	14	3	2	15	14	3	2	14	15
15	13	2	4	15	13	2	4	10	13	4	7	16	13	4	1	16	13	1	4
10	12	7	5	6	8	11	9	16	11	6	1	10	11	6	7	5	8	12	9
6	1	16	11	10	1	16	7	5	8	9	12	5	8	9	12	10	11	7	6
	β				γ				α				γ				γ		
3	8	9	14	3	8	14	9	3	8	9	14	3	6	15	10	3	8	14	9
10	13	4	7	10	13	7	4	16	13	4	1	12	13	8	1	10	13	7	4
16	11	6	1	5	2	12	15	10	11	6	7	14	11	2	7	15	12	2	5
5	2	15	12	16	11	1	6	5	2	15	12	5	4	9	16	6	1	11	16
	γ				γ				γ				γ				γ		
3	2	13	16	3	2	16	13	3	5	16	10	3	5	10	16	3	2	16	13
15	14	1	4	15	14	4	1	12	14	7	1	12	14	1	7	15	14	4	1
10	11	8	5	6	7	9	12	6	4	9	15	13	11	8	2	10	11	5	8
6	7	12	9	10	11	5	8	13	11	2	8	6	4	15	9	6	7	9	12
	γ				γ				γ				γ				γ		
3	2	13	16	3	8	13	10	3	8	10	13	3	5	16	10	3	8	13	10
15	14	1	4	9	14	7	4	9	14	4	7	12	14	7	1	9	14	7	4
6	7	12	9	6	1	12	15	16	11	5	2	13	11	2	8	16	11	2	5
10	11	8	5	16	11	2	5	6	1	15	12	6	4	9	15	6	1	12	15

				β
3 12 5 14	3 1 14 16	3 1 16 14	3 1 14 16	3 2 13 16
13 15 4 2	12 15 2 5	13 15 4 2	13 15 2 4	14 15 4 1
8 6 9 11	13 10 7 4	8 6 9 11	12 10 7 5	12 9 6 7
10 1 16 7	6 8 11 9	10 12 5 7	6 8 11 9	5 8 11 10
β	β	β		
3 2 16 13	3 2 16 13	3 2 13 16	3 1 14 16	3 1 14 16
14 15 1 4	14 15 1 4	14 15 4 1	8 15 2 9	13 15 2 4
5 8 10 11	9 12 6 7	8 5 10 11	13 6 11 4	8 6 11 9
12 9 7 6	8 5 11 10	9 12 7 6	10 12 7 5	10 12 7 5
		δ	δ	γ
3 1 16 14	3 8 9 14	3 2 16 13	3 2 16 13	3 6 13 12
13 15 4 2	13 15 4 2	8 15 1 10	10 15 1 8	10 15 8 1
12 10 5 7	12 10 5 7	9 6 12 7	7 6 12 9	16 9 2 7
6 8 9 11	6 1 16 11	14 11 5 4	14 11 5 4	5 4 11 14
γ	δ	δ		δ
3 6 16 9	3 4 13 14	3 4 13 14	3 4 14 13	3 5 12 14
10 15 5 4	6 16 1 11	15 16 1 2	15 16 2 1	6 16 1 11
13 12 2 7	15 9 8 2	6 9 8 11	6 9 7 12	15 9 8 2
8 1 11 14	10 5 12 7	10 5 12 7	10 5 11 8	10 4 13 7
δ	δ	β	γ	β
3 5 12 14	3 2 15 14	3 2 15 14	3 2 14 15	3 5 12 14
15 16 1 2	10 16 1 7	13 16 1 4	13 16 4 1	10 16 1 7
6 9 8 11	13 11 6 4	10 11 6 7	8 5 9 12	13 11 6 4
10 4 13 7	8 5 12 9	8 5 12 9	10 11 7 6	8 2 15 9
γ	δ	δ	γ	β
3 5 14 12	3 5 12 14	3 2 15 14	3 2 14 15	3 2 15 14
10 16 7 1	13 16 1 4	6 16 1 11	13 16 4 1	13 16 1 4
8 2 9 15	10 11 6 7	13 7 10 4	12 9 5 8	6 7 10 11
13 11 4 6	8 2 15 9	12 9 8 5	6 7 11 10	12 9 8 5
γ	β	δ		
3 6 12 13	3 6 13 12	3 9 8 14	3 2 15 14	3 7 10 14
9 16 2 7	9 16 7 2	13 16 1 4	12 16 5 1	12 16 5 1
14 11 5 4	8 1 10 15	6 7 10 11	13 9 4 8	13 9 4 8
8 1 15 10	14 11 4 5	12 2 15 5	6 7 10 11	6 2 15 11
		γ	γ	β
3 7 10 14	3 9 8 14	3 5 14 12	3 6 15 10	4 16 5 9
12 16 5 1	12 16 5 1	10 16 7 1	9 16 5 4	13 1 12 8
6 2 11 15	6 2 11 15	15 9 2 8	14 11 2 7	11 7 14 2
13 9 8 4	13 7 10 4	6 4 11 13	8 1 12 13	6 10 3 15
β	β	β	α	γ
4 16 9 5	4 16 9 5	4 16 5 9	4 15 6 9	4 15 9 6
13 1 8 12	13 1 8 12	13 1 12 8	14 1 12 7	14 1 7 12
6 10 15 3	7 11 14 2	10 6 15 3	11 8 13 2	5 10 16 3
11 7 2 14	10 6 3 15	7 11 2 14	5 10 3 16	11 8 2 13

α	γ	δ	δ	δ
4 15 10 5	4 15 5 10	4 15 6 9	4 15 10 5	4 15 10 5
14 1 8 11	14 1 11 8	11 2 13 8	11 2 7 14	14 2 7 11
7 12 13 2	9 6 16 3	14 7 12 1	6 9 16 3	3 9 16 6
9 6 3 16	7 12 2 13	5 10 3 16	13 8 1 12	13 8 1 12
δ	δ	δ	δ	δ
4 9 8 13	4 14 11 5	4 10 15 5	4 13 8 9	4 9 15 6
14 3 10 7	16 3 6 9	13 3 6 12	15 3 14 2	10 5 3 16
11 6 15 2	1 10 15 8	8 14 11 1	10 6 11 7	7 12 14 1
5 16 1 12	13 7 2 12	9 7 2 16	5 12 1 16	13 8 2 11
β	γ	β	δ	β
4 9 15 6	4 10 13 7	4 10 7 13	4 15 9 6	4 16 1 13
16 5 3 10	15 5 2 11	15 5 12 2	16 5 3 10	9 5 12 8
1 12 14 7	6 16 11 1	9 3 14 8	1 12 14 7	14 2 15 3
13 8 2 11	9 3 8 14	6 16 1 11	13 2 8 11	7 11 6 10
δ	γ	β	δ	γ
4 16 1 13	4 14 7 9	4 14 9 7	4 11 6 13	4 15 1 14
14 5 12 3	11 5 16 2	11 3 2 16	9 5 12 8	10 5 11 8
9 2 15 8	13 3 10 8	6 12 15 1	14 2 15 3	13 2 16 3
7 11 6 10	6 12 1 15	13 3 8 10	7 16 1 10	7 12 6 [illegible]
γ	α	γ	α	δ
4 14 1 15	4 15 1 14	4 15 5 10	4 15 10 5	4 16 9 5
11 5 10 8	9 6 12 7	9 6 16 3	9 6 3 16	13 6 3 12
13 3 16 2	16 3 13 2	14 1 11 8	7 12 13 2	2 11 14 7
6 12 7 9	5 10 8 11	7 12 2 13	14 1 8 11	15 1 8 10
δ	β	β	β	δ
4 13 2 15	4 13 7 10	4 13 10 7	4 13 1 16	4 15 2 13
9 6 11 8	11 6 16 1	11 6 1 16	11 6 10 7	7 6 11 10
16 3 14 1	14 3 9 8	5 12 15 2	14 3 15 2	14 1 16 3
5 12 7 10	5 12 2 15	14 3 8 9	5 12 8 9	9 12 5 8
δ	δ	δ	δ	α
4 15 2 13	4 12 5 13	4 14 7 9	4 9 8 13	4 10 15 5
14 6 11 3	7 6 11 10	12 6 1 15	10 7 14 3	16 7 2 9
7 1 16 10	14 1 16 3	5 11 16 2	15 2 11 6	2 14 11 8
9 12 5 8	9 15 2 8	13 3 10 8	5 16 1 12	13 3 6 12
γ	α	α	β	β
4 9 15 6	4 9 6 15	4 9 16 5	4 13 1 16	4 13 6 11
14 7 1 12	14 7 12 1	14 7 2 11	10 7 11 6	10 7 16 1
5 16 10 3	11 2 13 8	1 12 13 8	15 2 14 3	15 2 9 8
11 2 8 13	5 16 3 10	15 6 3 10	5 12 8 9	5 12 3 14
β	δ	δ	δ	δ
4 13 11 6	4 11 6 13	4 5 16 9	4 5 16 9	4 14 3 13
10 7 1 16	16 7 10 1	11 7 2 14	14 7 2 11	16 7 10 1
5 12 14 3	5 2 15 12	6 10 15 3	3 10 15 6	5 2 15 12
15 2 8 9	9 14 3 8	13 12 1 8	13 12 1 8	9 11 6 8

	α				α				α				α				α		
4	9	6	15	4	9	16	5	4	9	16	5	4	5	16	9	4	5	14	11
11	8	13	2	11	8	1	14	14	8	1	11	13	8	1	12	10	8	1	15
14	1	12	7	6	15	10	3	3	15	10	6	3	10	15	6	7	9	16	2
5	16	3	10	13	2	7	12	13	2	7	12	14	11	2	7	13	12	3	6
	α				α				α										
4	5	14	11	4	10	7	13	4	14	5	11	4	1	15	14	4	1	14	15
15	8	1	10	14	8	9	3	15	8	1	10	12	9	7	6	12	9	6	7
2	9	16	7	5	1	16	12	2	9	16	7	13	8	10	3	13	8	11	2
13	12	3	6	11	15	2	6	13	3	12	6	5	16	2	11	5	16	3	10
									α				β				γ		
4	12	13	5	4	12	13	5	4	5	15	10	4	5	15	10	4	6	13	11
14	9	8	3	15	9	8	2	6	9	3	16	16	9	3	6	15	9	2	8
1	6	11	16	1	7	10	16	11	8	14	1	1	8	14	11	10	16	7	1
15	7	2	10	14	6	3	11	13	12	2	7	13	12	2	7	5	3	12	14
	β				α				α				β				γ		
4	6	11	13	4	15	5	10	4	5	14	11	4	5	14	11	4	7	13	10
15	9	8	2	16	9	3	6	7	9	2	16	16	9	2	7	14	9	3	8
5	3	14	12	1	8	14	11	10	8	15	1	1	8	15	10	11	16	6	1
10	16	1	7	13	2	12	7	13	12	3	6	13	12	3	6	5	2	12	15
	β				α				γ				γ				α		
4	7	10	13	4	14	5	11	4	6	13	11	4	7	13	10	4	1	15	14
14	9	8	3	16	9	2	7	15	9	2	8	14	9	3	8	13	10	8	3
5	2	15	12	1	8	15	10	1	7	16	10	1	6	16	11	12	7	9	6
11	16	1	6	13	3	12	6	14	12	3	5	15	12	2	5	5	16	2	11
	α				α				α										
4	13	12	5	4	3	14	13	4	3	14	13	4	3	14	13	4	6	11	13
15	10	7	2	6	10	7	11	15	10	7	2	16	10	1	7	16	10	1	7
1	8	9	16	15	5	12	2	6	5	12	11	9	15	8	2	9	15	8	2
14	3	6	11	9	16	1	8	9	16	1	8	5	6	11	12	5	3	14	12
	α				α				γ										
4	6	15	9	4	15	6	9	4	5	14	11	4	5	11	14	4	5	16	9
16	10	5	3	16	10	5	3	15	10	1	8	15	10	8	1	15	10	3	6
1	7	12	14	1	7	12	14	9	16	7	2	6	3	13	12	1	8	13	12
13	11	2	8	13	2	11	8	6	3	12	13	9	16	2	7	14	11	2	7
	α				α				β				β				β		
4	5	16	9	4	13	2	15	4	7	14	9	4	7	14	9	4	7	9	14
13	10	3	8	16	10	7	1	13	10	3	8	13	10	3	8	13	10	8	3
2	7	14	11	5	3	14	12	1	6	15	12	11	16	5	2	6	1	15	12
15	12	1	6	9	8	11	6	16	11	2	5	6	1	12	15	11	16	2	5
	α				δ														
4	1	14	15	4	13	12	5	4	1	15	14	4	1	16	13	4	8	9	13
13	11	8	2	14	11	6	3	8	11	5	10	15	11	2	6	15	11	2	6
12	6	9	7	1	8	9	16	13	6	12	3	10	14	7	3	10	14	7	3
5	16	3	10	15	2	7	10	9	16	2	7	5	8	9	12	5	1	16	12

					γ												β		
4	8	15	9	4	5	15	10	4	5	10	15	4	5	16	9	4	6	15	9
15	11	6	2	14	11	1	8	14	11	8	1	14	11	2	7	13	11	2	8
1	5	12	16	9	16	6	3	7	2	13	12	1	8	13	12	1	7	14	12
14	10	3	7	7	2	12	15	9	16	3	6	15	10	3	6	16	10	3	5
	β				β												δ		
4	6	15	9	4	6	9	15	4	8	13	9	4	8	13	9	4	1	16	13
13	11	2	8	13	11	8	2	10	11	6	7	15	11	6	2	6	12	5	11
10	16	[illegible]	3	7	1	14	12	15	14	3	2	10	14	3	7	15	7	10	2
7	1	12	14	10	16	3	5	5	1	12	16	5	1	12	16	9	14	3	8
	α				δ								α				δ		
4	1	16	13	4	6	15	9	4	6	9	15	4	14	3	13	4	1	15	14
15	12	5	2	14	12	7	1	14	12	1	7	15	12	5	2	13	12	6	3
6	7	10	11	3	5	10	16	11	13	8	2	6	7	10	11	8	5	11	10
9	14	3	8	13	11	2	8	5	3	16	10	9	1	16	8	9	16	2	7
	δ								γ				γ				γ		
4	13	8	9	4	6	15	9	4	1	14	15	4	1	15	14	4	6	15	9
15	12	5	2	14	12	7	1	16	13	2	3	16	13	3	2	11	13	8	2
1	6	11	16	11	13	2	8	9	12	7	6	5	8	10	11	5	3	10	16
14	3	10	7	5	3	10	16	5	8	11	10	9	12	6	7	14	12	1	7
	γ				γ				γ				γ				γ		
4	6	9	15	4	1	15	14	4	1	14	15	4	7	9	14	4	7	14	9
11	13	2	8	16	13	3	2	16	13	2	3	10	13	3	8	10	13	8	3
14	12	7	1	9	12	6	7	5	8	11	10	15	12	6	1	5	2	11	16
5	3	16	10	5	8	10	11	9	12	7	6	5	2	16	11	15	12	1	6
	γ				γ				δ				γ				β		
4	6	15	9	4	7	14	9	4	1	16	15	4	1	13	16	4	1	16	13
11	13	8	2	10	13	8	3	5	14	3	12	15	14	2	3	15	14	3	2
14	12	1	7	15	12	1	6	15	8	9	2	10	11	7	6	5	8	9	12
5	3	10	16	5	2	11	16	10	11	6	7	5	8	12	9	10	11	6	7
	γ				β				δ										
4	5	10	15	4	5	15	10	4	11	6	13	4	2	13	15	4	2	13	15
11	14	1	8	11	14	8	1	15	14	3	2	9	14	3	8	16	14	3	1
13	12	7	2	6	3	9	16	5	8	9	12	16	11	6	1	9	11	6	8
6	3	16	9	13	12	2	7	10	1	16	7	5	7	12	10	5	7	12	10
									δ				β				γ		
4	2	13	15	4	2	13	15	4	1	16	13	4	1	16	13	4	1	13	16
5	14	3	12	16	14	3	1	9	14	3	8	15	14	3	2	15	14	2	3
16	7	10	1	5	7	10	12	15	12	5	2	9	12	5	8	6	7	11	10
9	11	8	6	9	11	8	6	6	7	10	11	6	7	10	11	9	12	8	5
	β				β				δ				γ				γ		
4	7	10	13	4	7	15	10	4	7	10	13	4	5	16	9	4	7	13	10
9	14	3	8	9	14	8	3	15	14	3	2	11	14	7	2	9	14	8	5
15	12	5	2	6	1	11	16	9	12	5	8	15	12	1	8	16	11	1	6
6	1	16	11	15	12	2	5	6	1	16	11	6	3	10	15	5	2	12	15

α	α		α	α
4 3 14 13	4 3 14 13	4 3 13 14	4 5 16 9	4 6 11 13
5 15 2 12	16 13 2 1	16 15 1 2	6 15 10 3	16 15 2 1
16 10 7 1	5 10 7 12	5 10 8 11	11 2 7 14	5 10 7 12
9 6 11 8	6 11 8	9 6 12 7	13 12 1 8	9 3 14 8
α	γ	β	γ	β
4 1 16 13	4 1 13 16	4 1 16 13	4 5 11 14	4 5 14 11
5 15 2 12	14 15 3 2	14 15 2 3	10 15 1 8	10 13 8 1
14 8 9 3	11 10 6 7	5 8 9 12	13 12 6 3	7 2 9 16
11 10 7 6	5 8 12 9	11 10 7 6	7 2 16 9	13 12 3 6
α	α	β	γ	β
4 10 7 13	4 1 16 13	4 1 16 13	4 1 13 16	4 6 11 13
14 15 2 3	9 15 2 8	14 15 2 3	14 15 3 2	9 15 2 8
5 8 9 12	14 12 5 3	9 12 5 8	7 6 10 11	14 12 5 3
11 1 16 6	7 6 11 10	7 6 11 10	9 12 8 5	7 1 16 10
γ	α			γ
4 6 13 11	4 6 11 13	4 1 16 13	4 8 9 13	4 5 16 9
9 15 8 2	14 15 2 3	11 15 6 2	11 15 6 2	10 15 6 3
7 1 10 16	9 12 5 8	14 10 3 7	14 10 3 7	13 12 1 8
14 12 3 5	7 1 16 10	3 8 9 12	5 1 16 12	7 2 11 14
γ	α	α	α	α
4 6 13 11	4 2 15 13	4 2 15 13	4 2 15 13	4 2 15 13
9 15 8 2	3 16 1 12	14 16 1 3	7 16 1 10	14 16 1 3
16 10 1 7	14 9 8 3	5 9 8 12	14 11 6 3	7 11 6 10
5 3 12 14	11 7 10 6	11 7 10 6	9 5 12 8	9 5 12 8
α	α	α	α	β
4 5 12 13	4 5 12 13	4 5 14 11	4 7 10 13	4 1 14 15
7 16 1 10	14 16 1 3	7 16 9 2	14 16 1 3	13 16 3 2
14 11 6 3	7 11 6 10	10 1 8 13	5 9 8 12	11 10 5 8
9 2 13 8	9 2 15 8	13 12 3 6	11 2 15 6	6 7 12 9
β	β	β		
4 1 15 14	4 1 15 14	4 1 14 15	4 3 14 13	4 6 11 13
13 16 2 3	13 16 2 3	13 16 3 2	10 16 7 1	10 16 7 1
6 7 9 12	10 11 3 8	7 6 9 12	15 9 2 8	15 9 2 8
11 10 8 5	7 6 12 9	10 11 8 5	5 6 11 12	5 3 14 12
γ	γ	γ	β	γ
4 5 14 11	4 5 13 10	3 11 10 8	5 12 9 8	5 10 11 8
9 16 7 2	9 16 6 3	16 2 3 13	13 2 3 14	16 3 2 13
15 10 1 8	14 11 1 8	4 14 15 1	4 13 16 1	4 15 14 1
6 3 12 13	7 2 12 13	9 7 6 12	10 7 6 11	9 6 7 12
β	γ	γ	α	β
3 12 9 8	5 9 12 8	5 9 12 8	5 10 11 8	5 10 11 8
14 3 2 15	16 4 1 13	16 4 1 13	14 4 1 15	15 4 1 14
4 13 16 1	3 15 14 2	2 14 15 3	3 13 16 2	2 13 16 3
11 6 7 10	10 6 7 11	11 7 6 10	12 7 6 9	12 7 6 9

β 5 11 10 8 14 4 1 15 3 13 16 2 12 6 7 9	α 5 11 10 8 15 4 1 14 2 13 16 3 12 6 7 9	α 5 4 13 12 11 6 3 14 8 9 16 1 10 15 2 7	α 5 11 8 10 15 6 9 4 2 3 16 13 12 14 1 7	α 5 4 13 12 10 7 2 15 8 9 16 1 11 14 3 6
α 5 10 8 11 14 7 9 4 3 2 16 13 12 15 1 6	5 2 15 12 16 8 1 9 3 11 14 6 10 13 4 7	5 13 4 12 16 8 1 9 3 11 14 6 10 2 15 7	5 3 14 12 16 8 1 9 2 10 15 7 11 13 4 6	5 13 4 12 16 8 1 9 2 10 15 7 11 3 14 6
5 4 14 11 16 9 7 2 3 6 12 13 10 15 1 8	5 4 15 10 16 9 6 3 2 7 12 13 11 14 1 8	α 5 3 16 10 6 9 4 15 11 8 13 2 12 14 1 7	α 5 3 16 10 15 9 4 6 2 8 13 11 12 14 1 7	α 5 6 11 12 16 9 8 1 3 4 13 14 10 15 2 7
α 5 15 2 12 16 9 8 1 3 4 13 14 10 6 11 7	α 5 2 15 12 8 9 4 13 10 7 14 3 11 16 1 6	α 5 8 10 11 16 9 7 2 1 4 14 15 12 13 3 6	α 5 3 14 12 4 10 7 13 16 6 11 1 9 15 2 8	β 5 3 14 12 16 10 7 1 4 6 11 13 9 15 2 8
β 5 4 16 9 15 10 6 3 2 7 11 14 12 13 1 8	α 5 15 2 12 16 10 7 1 4 6 11 13 9 3 14 8	5 1 16 12 14 10 3 7 4 8 13 9 11 15 2 6	5 14 4 11 15 10 8 1 2 3 13 16 12 7 9 6	α 5 2 15 12 4 11 6 13 16 7 10 1 9 14 3 8
β 5 2 15 12 16 11 6 1 4 7 10 13 9 14 3 8	β 5 14 3 12 4 11 6 13 16 7 10 1 9 2 15 8	α 5 14 3 12 16 11 6 1 4 7 10 13 9 2 15 8	γ 5 2 16 11 15 12 6 1 4 7 9 14 10 13 3 8	γ 5 3 16 10 14 12 7 1 4 6 9 15 11 13 2 8
α 5 3 16 10 11 13 8 2 6 4 9 15 12 14 1 7	α 5 3 16 10 2 13 8 11 15 4 9 6 12 14 1 7	α 5 2 15 12 16 13 4 1 3 8 9 14 10 11 6 7	α 5 11 6 12 16 13 4 1 3 8 9 14 10 2 15 7	α 5 4 14 11 16 13 3 2 1 8 10 15 12 9 7 6
α 5 4 14 11 2 13 3 16 15 8 10 1 12 9 7 6	α 5 3 16 10 4 14 1 15 13 11 8 2 12 6 9 7	α 5 3 16 10 15 14 1 4 2 11 8 13 12 6 9 7	5 1 16 12 10 14 7 3 8 4 9 13 11 15 2 6	5 10 8 11 15 14 4 1 2 7 9 16 12 3 13 6
β 5 3 16 10 12 14 1 7 9 15 4 6 8 2 13 11	γ 5 4 16 9 11 14 2 7 10 15 3 6 8 1 13 12	α 5 2 16 11 4 15 1 14 13 10 8 3 12 7 9 6	α 5 2 16 11 14 15 1 4 3 10 8 13 12 7 9 6	β 5 2 16 11 12 15 1 6 9 14 4 7 8 3 13 10

γ				
5 4 16 9	5 2 15 12	5 8 11 10	5 8 10 11	5 8 10 11
10 15 3 6	8 16 9 1	13 16 3 2	13 16 2 3	3 16 2 13
11 14 2 7	11 3 6 14	4 9 6 15	4 9 7 14	14 9 7 4
8 1 13 12	10 3 4 7	12 1 14 7	12 1 15 6	12 1 15 6
δ	β	β	δ	γ
5 2 15 12	5 2 15 12	5 3 14 12	5 3 14 12	5 4 14 11
10 16 1 7	11 16 1 6	10 16 1 7	11 16 1 6	9 16 2 7
11 13 4 6	10 13 4 7	11 13 4 6	10 13 4 7	12 13 3 6
8 3 14 9	8 3 14 9	8 2 15 9	8 2 15 9	8 1 15 10
γ	β	γ	γ	δ
5 4 15 10	6 11 10 7	6 12 9 7	6 10 11 7	6 9 12 7
9 16 3 6	16 1 4 13	15 1 4 14	15 3 2 14	13 3 2 16
12 13 2 7	3 14 15 2	3 13 16 2	4 16 13 1	4 14 15 1
8 1 14 11	9 8 5 12	10 8 5 11	9 5 8 12	11 8 5 10
β	β	δ	γ	γ
6 9 12 7	6 12 9 7	6 12 9 7	6 10 11 7	6 9 12 7
16 3 2 13	13 3 2 16	16 3 2 13	15 3 2 14	15 4 1 14
1 14 15 4	4 14 15 1	1 14 15 4	1 13 16 4	3 16 13 2
11 8 5 10	11 5 8 10	11 5 8 10	12 8 5 9	10 5 8 11
β	δ	δ	δ	δ
6 11 10 7	6 7 12 9	6 7 12 9	6 12 7 9	6 12 7 9
13 4 1 16	14 4 1 15	15 4 1 14	14 4 1 15	15 4 1 14
3 14 15 2	3 13 16 2	2 13 16 3	3 13 16 2	2 13 16 3
12 5 8 9	11 10 5 8	11 10 5 8	11 5 10 8	11 5 10 8
δ	δ			δ
6 3 14 11	6 12 7 9	6 1 16 11	6 14 3 11	6 3 15 10
12 5 4 13	16 5 10 3	15 7 2 10	15 7 2 10	4 9 5 16
7 10 15 2	1 4 15 14	4 12 13 5	4 12 13 5	13 8 12 1
9 16 1 8	11 13 2 8	9 14 3 8	9 1 16 8	11 14 2 7
β	β	δ	α	α
6 3 15 10	6 4 13 11	6 15 3 10	6 3 13 12	6 3 16 9
16 9 5 4	25 9 8 2	16 9 5 4	15 10 8 1	15 10 5 4
1 8 12 13	3 5 12 14	1 8 12 13	4 5 11 14	1 8 11 14
11 14 2 7	10 16 1 7	11 2 14 7	9 16 2 7	12 13 2 7
γ	γ	δ	β	β
6 1 15 12	6 4 15 9	6 1 16 11	6 1 16 11	6 3 15 10
16 11 5 2	13 11 8 2	3 12 5 14	15 12 5 2	13 12 8 1
3 8 10 13	3 5 10 16	15 8 9 2	3 8 9 14	4 5 9 16
9 14 4 7	12 14 1 7	10 13 4 7	10 13 4 7	11 14 2 7
δ	δ	δ	γ	β
6 13 4 11	6 3 14 11	6 4 15 9	6 3 15 10	6 4 15 9
15 12 5 2	4 13 12 5	16 13 2 3	12 13 1 8	11 13 2 8
3 8 9 14	15 2 7 10	1 12 7 14	9 16 4 5	10 16 3 5
10 1 16 7	9 16 1 8	11 5 10 8	7 2 14 11	7 1 14 12

6 7 12 9 14 15 4 1 3 10 5 16 11 2 13 8	6 7 12 9 1 15 4 14 16 10 5 3 11 2 13 8	γ 6 3 13 12 10 15 1 8 11 14 4 5 7. 2 16 9	δ 6 1 16 11 9 15 2 8 12 14 3 5 7 4 13 10	β 6 1 16 11 12 15 2 5 9 14 3 8 7 4 15 10
β 6 4 13 11 9 15 2 8 12 14 3 5 7 1 16 10	δ 6 4 13 11 12 15 2 5 9 14 3 8 7 1 16 10	γ 6 3 16 9 10 15 4 5 11 14 1 8 7 2 13 12	δ 6 2 15 11 7 16 1 10 12 13 4 5 9 3 14 8	δ 6 2 15 11 12 16 1 5 7 13 4 10 9 3 14 8
δ 6 3 14 11 7 16 1 10 12 13 4 5 9 12 15 8	δ 6 3 14 11 12 16 1 5 7 13 4 10 9 2 15 8	β 6 1 15 12 11 16 2 5 10 13 3 8 7 4 14 9	γ 6 3 15 10 9 16 4 5 12 13 1 8 7 2 14 11	δ 7 6 11 10 14 3 2 15 4 13 16 1 9 12 5 8
δ 7 12 5 10 14 3 2 15 4 13 16 1 9 6 11 8	7 5 12 10 16 4 1 13 2 14 15 3 9 11 6 8	7 11 6 10 16 4 1 13 2 14 15 3 9 5 12 8	δ 7 2 15 10 12 5 4 13 6 11 14 3 9 16 1 8	δ 7 16 1 10 12 5 4 13 6 11 14 3 9 2 15 8
7 1 16 10 14 6 3 11 4 12 13 5 9 15 2 8	7 15 2 16 14 6 3 11 4 12 13 5 9 1 16 8	δ 7 2 15 10 4 13 12 5 14 3 6 11 9 16 1 8	δ 7 4 14 9 16 13 3 2 1 12 6 15 10 5 11 8	7 1 16 10 6 14 11 13 12 4 5 13 9 15 2 8
7 6 12 9 15 14 4 1 2 11 5 16 10 3 13 8	δ 7 2 16 9 6 15 1 12 11 14 4 5 10 3 15 8	δ 7 2 16 9 12 15 1 6 5 14 4 11 10 3 13 8	7 4 14 9 11 16 2 5 6 13 3 12 10 1 15 8	7 4 14 9 5 16 2 11 12 13 3 6 10 1 15 8

α 48
β 192
γ 192
δ 328
.... 120

Somme 880

B					C			
	6	3	15	10		6	1	16	11
	13	12	8	1		12	15	2	5
	4	5	9	16		9	14	3	8
	11	14	2	7		7	4	13	10

Les tables qui ont cette marque β au dessus, ont la mesme égalité que devant, sinon qu'au milieu d'un des costez & à son opposé, il y a un des quarrez dont les nombres ne sont pas égaux à ceux d'un des costez. Ainsi en la table B, les nombres 3, 15, 12, 8, & 5, 9, 14, 2, ne font pas 34 ; & en la table C, les nombres 12, 16, 9, 14, & 2, 5, 3, 8 ne font pas 34. Mais si on prend les huit ensemble, ils font le double de 34, puisqu'ils comprennent deux lignes ; & de ces tables il y en a en tout 192.

D				
	6	3	15	10
	12	13	1	8
	9	16	4	5
	7	2	14	11

Les tables marquées γ, n'ont que les quarrez des angles qui ayent cette égalité avec celuy du milieu, mais non pas ceux du milieu des costez. Ainsi la table D a égalité dans les nombres 6, 12, 3, 13, | 15, 1, 8, 10, | 9, 16, 7, 2, | 4, 5, 14, 11, | & 13, 1, 16, 4, | & pareillement aux nombres des angles des quarrez de 3 de costé ; sçavoir, 6, 15, 4, 9, | 10, 3, 16, 5, | 7, 12, 1, 14, | & 2, 13, 8, 11 ; & enfin au quarré total, 6, 7, 10, 11 ; & de ces tables il y en a en tout 192.

c d

E					F			
	6	13	4	11		6	3	14	11
	15	12	5	2		4	13	12	5
	3	8	9	14		15	2	7	10
	10	1	16	7		9	16	1	8

a b

Les tables qui ont cette marque δ, n'ont égalité, outre les angles du grand quarré, & ceux du quarré du milieu, (ausquels il y a égalité dans toutes les tables) que deux autres quarrez aux costez opposez. Ainsi la table E n'a égalité qu'aux nombres 13, 14, 12, 5, | & 8, 9, 1, 16, | & en outre aux angles exterieurs, 6, 11, 10, 7, & au quarré du milieu, 12, 5, 8, 9. Et la table F n'a égalité qu'aux nombres 4, 13, 15, 2, & 12, 5, 7, 10 ; & aux angles exterieurs, 6, 11, 9, 8 ; & au quarré du milieu, 13, 12, 2, 7 : & de ces tables il y en a 328. Or ces égalitez se doivent toûjours entendre outre les lignes qui sont supposées égales entre elles.

Les autres tables qui n'ont point de marque, n'ont rien que ce qui est commun à toutes ; sçavoir le petit quarré du milieu, & le grand du dehors,

où il y ait égalité aux nombres des angles ; & de ces tables il y en a 120.

Or on démontrera, comme il s'ensuit, que les nombres qui sont aux angles de l'enceinte exterieure de la table de 4, & pareillement les 4 interieurs, sont égaux à une des lignes. Par exemple, au quarré E les quatre nombres 6, 11, 10, 7 vallent necessairement 34, & pareillement 12, 5, 8, 9, sçavoir autant qu'une des lignes.

En la table E, si les quatre nombres *a, b, c, d,* ne vallent pas ensemble 34, il faut qu'ils fassent plus ou moins de 34, qu'ils vallent moins. Mais parce que les nombres de chaque ligne doivent faire 34, les lignes *a b*, & *c d* feront chacune 34. Il faudra donc que les quatre nombres qui sont entre les angles dans les lignes *a b*, & *c d*, fassent ensemble plus de 34, & ils doivent surpasser 34 d'un nombre égal à celuy de l'excés de 34, pardessus les nombres des angles *a, b, c, d*, & pareillement les quatre nombres qui sont entre les angles des lignes *c a*, & *d b*; sçavoir ceux qui seront à la place où sont 15, 3, 2, 14, excederont 34 d'un nombre égal à celuy dont 34 excede les nombres des angles ; & par conséquent les nombres qui sont à l'enceinte exterieure entre les angles, excederont deux fois 34 du double du mesme excés. Mais les 16 nombres ensemble doivent faire quatre fois 34 : & partant les huit nombres qui restent, sçavoir les quatre des angles *a, b, c, d*, & les quatre interieurs qui doivent estre mis à la place où sont 12, 5, 8, 9, seront moindres que deux fois 34, du double du mesme excés : mais les quatre qui sont aux angles *a, b, c, d,* sont moindres que 34, selon le mesme excés, donc les quatre interieurs seront moindres aussi que 34, selon le mesme excés. Et parce que toutes les lignes doivent estre égales, posons que l'une des lignes transversales, comme *c b*, contienne quatre nombres, qui ensemble fassent 34, il s'ensuivra que les quatre autres contenus en la ligne *a d*, feront moins de 34, du double de l'excés de 34, par dessus les quatre qui sont aux angles *a, b, c, d*, ce qui est absurde & contre l'hypotese : la mesme chose se fera voir, si on suppose les quatre nombres *a, b, c, d*, plus grands que 34 : car on montrera de mesme, que les nombres d'une des lignes transversales seront plus grands que 34 du double de l'excés ; & partant les quatre nombres *a, b, c, d*, sont égaux à 34. Ce qu'il falloit démontrer.

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*k*	*l*	*m*
n	*o*	*p*	*q*

Mais la mesme chose se démontrera bien plus briévement, comme s'ensuit. En la table *a, d, n, q*, les quatre nombres des angles *a, d, n, q*, sont égaux aux quatre interieurs *f, g, k, l*; car les quatre, *a, d, n, q*, sont complémens à deux lignes (sçavoir à 68) des quatre nombres, *b, c, o, p*, & les quatre, *f, g, k, l*, des quatre *e, i, h, m*. Mais les mesmes huit nombres, *a, d, n, q, f, g, k, l*, font ensemble deux lignes, sçavoir les deux diagonales ; & partant, tant les quatre, *a, d, n, q*, que les quatre, *f, g, k, l*, font autant qu'une ligne. Et de là il s'ensuit aussi, qu'en toute table les quatre *b, c, o, p*, font une ligne, & pareillement les quatre *e, i, h, m*.

En toute table ou quarré qui a quatre de costé, les quatre nombres qui sont à l'un des angles de la figure, comme *a, b, e, f*, sont égaux aux quatre nombres, *l, m, p, q*, qui sont à l'angle diametralement opposé, parce

que les uns & les autres sont le complément à deux lignes des quatre nombres *c*, *d*, *g*, *h*.

Pareillement, en toute table les quatre nombres des angles d'un des quarrez de trois, comme *a*, *e*, *l*, *i*, sont égaux aux quatre *f*, *h*, *q*, *o*, du quarré opposé, parce que les uns & les autres sont le complément à deux lignes des quatre *b*, *d*, *m*, *k*.

Si en quelque table de 4, les quatre nombres d'un des petits quarrez des angles, comme de *a*, *b*, *f*, *e*, sont ensemble égaux à une ligne; les autres petits quarrez des angles, comme *c*, *d*, *g*, *h*, &c. le feront aussi; & pareillement les nombres des angles du quarré de 3, comme *a*, *c*, *l*, *i*, ou *b*, *d*, *m*, *k*, &c.

La raison est, que *a*, *b*, *f*, *e*, étant égaux aux quatre *l*, *m*, *q*, *p*, comme on vient de démontrer, si les uns vallent une ligne, les autres en vaudront autant. Et pareillement les autres petits quarrez, sçavoir *c*, *d*, *g*, *h*, & *i*, *k*, *n*, *o*, qui sont leurs complémens à deux lignes.

Mais puisque les huit, *c*, *d*, *g*, *h*, & *i*, *k*, *n*, *o*, vallent deux lignes; par supposition, si on en oste une ligne, sçavoir *d*, *g*, *k*, *n*, le reste, qui sont les quatre *c*, *h*, *i*, *o*, vaudront aussi une ligne; & ainsi les huit, *a*, *c*, *l*, *i*, & *h*, *f*, *o*, *q*, qui sont les angles des deux quarrez de trois opposez, vaudroit deux lignes, puisque les huit nombres sont les quatre *c*, *i*, *a*, *h*, qui vallent une ligne, & les quatre de la diagonale, *a*, *f*, *l*, *q* : mais on a démontré, que les quatre *a*, *c*, *l*, *i*, sont égaux aux quatre *h*, *f*, *o*, *q*: donc tant les uns que les autres vallent une ligne.

On montrera de mesme, que si les quatre des angles du quarré de trois, comme *a*, *c*, *l*, *i*, vallent une ligne chacun des petits quarrez des angles, comme *a*, *b*, *e*, *f*, &c. vaudront une ligne.

Car si les quatre *a*, *c*, *l*, *i*, vallent une ligne, les quatre *h*, *f*, *o*, *q*, qui leur sont égaux, en vaudront une pareillement : & si de ces huit, qui vallent deux lignes, on oste la diagonale *a*, *f*, *l*, *q*, restera une ligne pour la valeur des quatre autres, *c*, *h*, *i*, *o*, ausquels ajoûtant la diagonale *d*, *g*, *k*, *n*, on aura deux lignes pour la valeur des huit nombres *c*, *h*, *d*, *g*; *k*, *n*, *i*, *o*; mais on a montré qu'en toute table de quatre, les quatre *i*, *k*, *n*, *o*, sont égaux aux quatre *c*, *d*, *g*, *h* ; donc tant les uns que les autres vallent une ligne.

REGLES
POUR LES JETS D'EAU.
DE LA DEPENSE DE L'EAU QUI SE FAIT par différens ajustages, selon les diverses élévations des Reservoirs.

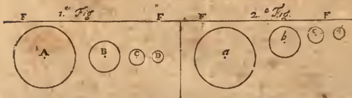
Par M. MARIOTTE.

UN pied cube d'eau pese 70 livres, & contient 36 pintes mesure de Paris lorsqu'elles sont mesurées justes : mais si l'eau passe les bords de la mesure, comme il se peut faire sans qu'elle se répande, la pinte d'eau pesera alors 2 livres, & 35 feront le pied cube. Le muid de Paris contient 280 de ces dernieres pintes, & 288 des autres.

Un pouce d'eau, est l'eau qui coule par une ouverture circulaire d'un pouce de diamétre posée verticalement en un des costez d'un baquet, lorsque la surface de l'eau qui fournit à l'écoulement, demeure toûjours au dessus de l'ouverture à la distance d'une ligne, c'est-à-dire à 7 lignes au dessus de son centre, sans s'élever plus haut, ni s'abaisser au dessous. Il passe en une minute de temps par cette ouverture 28 livres d'eau, en 14 pintes pesant chacune deux livres.

Il est vray qu'à l'endroit de l'ouverture, & immédiatement au dessus, l'eau est plus basse qu'au reste du baquet, où elle doit estre élevée d'une ligne plus haut ; car si elle n'estoit qu'à la mesme hauteur, l'extrémité de la surface de l'eau ne passeroit pas le bord superieur de l'ouverture en coulant, & elle ne donneroit alors en une minute, qu'environ 13 pintes & ½.

Si l'on veut sçavoir ce que donnent des ouvertures circulaires plus petites, comme d'un demi-pouce de diamétre, ou d'un quart de pouce, il les faut placer en sorte que leurs centres soient à 7 lignes de la surface de l'eau qui est au dessus du trou d'un pouce, laquelle est marquée par la ligne FF, com-



me on le voit dans la premiere figure, où les centres A B C D des différentes ouvertures sont tous dans une ligne parallele à FF, & non pas comme dans la seconde, où leurs bords superieurs sont à égales distances de la mesme ligne FF. Or si l'ouverture B est de 6 lignes de diamétre, sa surface ne sera que le quart de celle d'un pouce, & elle ne devroit donner que le quart de 14 pintes dans le mesme temps d'une minute ; & cependant elle donne le quart de 15 pintes, quoy-que toute la surface de l'eau du baquet ne soit pas plus haute qu'une ligne au dessus de l'ouverture d'un pouce ; ce qui provient de plusieurs causes qui sont expliquées dans mon Traité du mouvement des Eaux.

Eaux. La principale est, que l'eau ne baisse pas sensiblement au dessus de ces petits trous, & qu'elle y est de mesme qu'au reste de la surface; au lieu qu'à l'ouverture d'un pouce, pour faire que le centre soit à 7 lignes au dessous, il faut que le reste de la superficie de l'eau soit environ à 8 lignes au dessus de ce centre : car il faut quatre fois autant d'eau pour fournir à l'écoulement de l'ouverture de 12 lignes, qu'à celle de 6 lignes. D'où il arrive, que l'eau qui doit succéder à celle qui passe par la grande ouverture, vient de plus loin, & par conséquent elle ne succéde pas avec tant de facilité, & mesme il n'y en a qu'à une ligne au dessus, au lieu qu'il y en a 4 lignes au dessus de la petite ouverture, ce qui facilite la succession de son écoulement. D'ailleurs les expériences éxactes de ces écoulemens sont tres-difficiles à faire, & l'on se peut tromper dans la grandeur des ouvertures, dans la hauteur de l'eau du réservoir, & dans le temps de l'écoulement. Deplus, les jets d'eau qui jallissent horisontalement donnent un peu plus d'eau que ceux qui vont de bas en haut, & un peu moins que ceux qui coulent de haut en bas.

Pour bien déterminer un pouce d'eau, & faciliter les différens calculs selon les différentes ouvertures & dispositions des ajustages, on peut supposer qu'un pouce d'eau donne 14 pintes ou 28 livres d'eau en une minute : & c'est sur ce pied que j'ay fait les calculs suivans.

Si on a un pendule de 3 pieds 8 lignes & demi depuis le point de la suspension, jusques au centre de la petite balle, il fera une seconde à chaque battement, & une minute en 60 battemens.

Si l'on veut sçavoir sans jauge ce que donne d'eau une médiocre fontaine, il en faut recevoir l'eau dans quelque grand vaisseau; & si en une demie minute, ou 30 secondes elle donne 7 pintes, on dira qu'elle donne un pouce d'eau; si elle donne 21 pintes, qu'elle en donne 3 pouces, &c.

Suivant cette détermination, un pouce d'eau donnera 3 muids de Paris en une heure, & 72 en 24 heures. Une ligne est la 144[e] partie d'un pouce, & elle donne un demi-muid en 24 heures; deux ouvertures d'une ligne donneront un muid; & une ouverture de 3 lignes de diamétre, qui font neuf lignes superficielles, donneront 4 muids & demi en 24 heures.

On a trouvé par plusieurs expériences, qu'un réservoir ayant 13 pieds de hauteur au dessus de l'ouverture d'un ajustage de 3 lignes, donnoit un pouce d'eau, c'est à dire 14 pintes en une minute jallissant de bas en haut. C'est ce qu'on prendra pour fondement de la dépense des autres jets d'eau.

Lorsque les réservoirs sont à mesme hauteur, & les ajustages differens, ils dépensent de l'eau selon la proportion des ouvertures par où l'eau sort, ou des quarrez de leurs diamétres. Ainsi si un réservoir de 12 pieds a un ajustage de 6 lignes de diamétre, il donnera 4 pouces; & si son ouverture est d'un pouce de diamétre, le jet de bas en haut donnera 16 pouces, pourvû que les tuyaux qui portent l'eau soient d'une largeur suffisante, selon les regles qui seront données cy-aprés. Pour calculer ces dépenses d'eau, il faut prendre le quarré de 3 qui est 9₁ & si l'ajustage nouveau a 5 lignes de diamétre, il faut faire cette ligne de 3. Si 9, quarré de 3, donne 14 pintes, combien 25, quarré de 5. On trouvera que le quatriéme nombre sera 38 $\frac{8}{9}$, & ainsi des autres ajustages. En voicy une Table.

TABLE DES DÉPENSES D'EAU

pendant une minute par différens ajustages ronds, l'eau du réservoir estant à 12 pieds de hauteur.

PAR l'ajustage d'une ligne de diamétre 1 pinte $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{18}$.

Par 2 lignes	6 pintes $\frac{1}{4}$.
Par 3 lignes	14 pintes.
Par 4 lignes	25 pintes à peu prés.
Par 5 lignes	39 pintes à peu prés.
Par 6 lignes	56 pintes.
Par 7 lignes	76 pintes $\frac{1}{4}$.
Par 8 lignes	110 pintes $\frac{1}{3}$.
Par 9 lignes	126 pintes.

Si on divise ces grands nombres par 14, le quotient donnera les pouces d'eau, ainsi 126 pintes divisées par 14 font 9 pouces. On peut objecter, que dans quelques expériences les grandes ouvertures donnent plus d'eau à proportion que les petites, mais cela arrive par des causes étrangeres, & bien souvent les grandes ouvertures donnent moins à proportion. Voicy les expériences que j'en ay faites. J'ay pris un tuyau de six pieds de hauteur, & de 6 pouces de diamétre, au fond duquel j'ajustay une ouverture de 4 lignes, & une de 12; estant tout plein, on laissa aller en mesme temps les deux ajustages jusques à ce que le tuyau fut vuide à demi, on recevoit en deux vaisseaux differens l'eau qui couloit par les deux ouvertures; & au lieu que la grande devoit donner 9 fois autant que la petite, elle n'en donnoit que huit à peu prés.

Lorsque les hauteurs des eaux des réservoirs sont differentes, les plus hautes donnent plus que les moins hautes, selon la raison sous doublée des hauteurs, c'est-à-dire comme la moindre hauteur à la moyenne proportionnelle entre elle, & la plus grande.

Suivant cette regle, si la surface de l'eau du réservoir le moins haut est de 3 pieds d'élévation, & l'ajustage de 3 lignes, il faut prendre 6 qui est le nombre moyen proportionnel entre 3 & 12; & parce que 6 est à 3, comme 14 pintes à 7, on jugera que le réservoir de 3 pieds d'élévation donnera un demi-pouce, c'est-à-dire 7 pintes en une minute, par une ouverture de 3 lignes. Si la hauteur estoit de 4 pieds, il faut prendre 48, produit de 4, par 12, dont la racine est 7 à peu prés, & comme 12 à 7; ainsi 14 à 8 $\frac{1}{6}$: ce qui fera connoistre que ce jet d'eau donnera 8 pintes & $\frac{1}{7}$ en une minute, à fort peu prés.

TABLE DES DEPENSES D'EAU

à differentes élevations de réservoirs, sur trois lignes d'ajustages en une minute.

A 6 pieds	10 pintes un peu moins.
A 8 pieds	11 $\frac{1}{2}$ un peu moins.
A 9 pieds	12 $\frac{1}{4}$ un peu moins.
A 10 pieds	12 $\frac{1}{7}$ un peu moins.
A 12 pieds.	14 pintes.
A 15 pieds	15 $\frac{1}{2}$ un peu moins.
A 18 pieds	17 $\frac{1}{7}$.
A 20 pieds	18 $\frac{1}{11}$.
A 25	20 $\frac{1}{5}$.
A 30	22 $\frac{1}{11}$.
A 35	24 un peu moins.
A 40	25 $\frac{1}{2}$.
A 45	27 $\frac{1}{7}$.
A 48	deux pouces, ou 28 pintes.

Lorsque le réservoirs ont plus de 50 pieds de hauteur, les ajustages de 3 lignes sont trop étroits, & la dépense de l'eau devient sensiblement moindre,

que selon la proportion sousdoublée de 12 à 60, ou à 80, &c. tant à cause du plus grand frottement à propotion, que de la plus grande résistance de l'air.

Lorsque par le defaut de largeur suffisante des tuyaux de la conduite, ou par d'autres empeschemens, l'eau ne jallit pas si haut qu'elle devroit, il faut calculer la dépense de l'eau selon la hauteur du réservoir qui convient au jet, selon la table suivante; comme si un réservoir de 45 pieds ne faisoit son jet qu'à 20 pieds, il faudra faire le calcul de la dépense de l'eau; comme si le réservoir estoit à 21 pieds 4 pouces, les ajustages d'une ligne & demie, ne vont pas si haut que ceux de 4 ou 5 lignes, à une hauteur de réservoir de 8, 10, ou 12 pieds, &c. mais il ne faut pas laisser de calculer la dépense d'eau, suivant la hauteur des réservoirs, quand la conduite de l'eau est libre. Quelquefois en faisant des experiences, on trouve que les tuyaux estant fort inégaux, les plus grands donnent de l'eau en plus grande raison que la sousdoublée; mais cela procede de ce que pour entretenir un jet qui dépense beaucoup d'eau, il faut verser l'eau avec une grande vitesse, ce qui choque l'eau du réservoir, & luy donne une impulsion qui fait aller plus viste l'eau, à la sortie de l'ajustage, qu'elle ne feroit par le seul poids.

DE LA HAUTEUR DES JETS.

LA resistance de l'air empesche que les jets ne s'élevent jusques à la hauteur des reservoirs; & plus il y a d'air à traverser, plus la difference est considerable. Voicy une Regle qu'on peut suivre, pour sçavoir la diminution des jets, jusques à la hauteur du réservoir.

Ayez une balle de plomb d'un pouce de diametre, ou environ, & une balle de bois ayant son diametre à peu prés comme celuy de l'ouverture, & dont la pesanteur soit fort peu moindre que celle de l'eau: ensorte que nageant pardessus elle soit presque toute cachée: jettez-les avec une mesme force en haut, de maniere que la balle de plomb aille jusques à la hauteur du réservoir, ou fort prés, remarquez jusques où ira la balle de bois, ce sera la hauteur du jet, à peu prés.

L'autre Regle par le calcul, est que les differences des hauteurs des réservoirs & des hauteurs des jets, augmentent en raison doublée de leur hauteur, c'est à dire, en la proportion des quarrez de leurs hauteurs, comme si le premier jet est de 5 pieds, & que son réservoir soit plus haut d'un pouce; un jet de 10 pieds aura son réservoir plus haut de 4 pouces; car 5 est à 10, comme 1 à 2, & le quarré de 2 est 4: donc, comme 1 est à 4, ainsi un pouce a 4 pouces. On suppose que les tuyaux soient suffisamment larges selon les Regles qui en seront données.

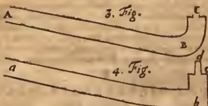
TABLE DES DIFFERENTES HAUTEURS des Jets.

Hauteurs des Jets.	*Hauteurs des Reservoirs.*	
5 pieds.	5 pieds.	1 pouces.
10	10	4
15	15	9
20	21	4
25	22	1
30	33	0
35	39	1
40	45	4

45 pieds.	51 pieds.	9 pouces.
50	58	4
55	65	1
60	72	0
65	79	1
70	86	4
75	93	9
80	101	4
85	109	1
90	117	0
95	125	1
100	135	4

Le frottement contre les bords des ajustages, diminuë un peu de cette proportion dans les grandes hauteurs ; c'est pourquoy il est necessaire qu'à ces grandes hauteurs les ajustages soient d'une ouverture de 10, ou 12 lignes, car s'ils estoient de 2, ou 3 lignes, ils iroient beaucoup moins haut ; que selon cette Table, outre que l'air resiste beaucoup plus à un petit corps, qu'à un plus grand ; comme on en voit l'exemple dans les armes à feu, qui poussent bien plus loin une grosse balle, qu'une tres-petite, comme de la menuë dragée, ou de la poudre de plomb. Si un tuyau élevé de 136 pieds, éleve son jet à 100 pieds, l'ajustage estant de 12 lignes, on ne doit pas tirer la consequence, qu'un tuyau de 344 pieds, par un mesme ajustage, éleve son jet à 200 pieds, quoyque la hauteur de 344 pieds excede 200 pieds, de 144 quadruple de 36 pieds, dans la vitesse de ces jets, l'air resiste si fortement, que l'eau se reduit par le choc, en parcelles imperceptibles qui ne peuvent aller bien haut. J'ay experimenté qu'il faut aussi que les tuyaux ayent une largeur considerable jusques à l'ajustage, & d'autant plus grande que l'ajustage est plus large. Voicy les Regles de ces grandeurs.

Un réservoir de cinq pieds ayant un ajustage de 6 lignes d'ouverture, doit avoir le tuyau le plus proche de l'ajustage environ de 2 pouces, la meilleure figure pour la conduite des tuyaux jusques à l'ajustage, doit estre semblable à la troisiéme figure A B C.



C'est à dire, que la courbure en B, ne doit pas estre en angles droits, comme en la quatriéme figure *abcd*, & dans les mediocres hauteurs jusques à 10, ou 12 pieds, il ne faut point de tuyau long à la sortie, comme *cd*, car le frottement retarderoit le jet tres-considerablement, mais il suffit de l'épaisseur du métail, comme en la premiere figure. Si le réservoir est de 21 pieds 4 pouces de hauteur & l'ouverture de l'ajustage de 6 lignes, le jet n'ira pas à 20 pieds ; si le tuyau de la conduste n'est que de 2 pouces, parce que le frottement sera trop grand dans le tuyau étroit, ou l'eau coulera deux fois plus viste que lorsque le réservoir n'est qu'à 5 pieds de hauteur, & par consequent, il faut le tenir

plus

plus large, afin que l'eau y aille à peu prés de mesme vitesse ; il faut donc au lieu de deux pouces, qu'il ait deux pouces $\frac{1}{2}$ à peu prés ; parce que les vitesses estant en raison sousdoublée des hauteurs, la vitesse de ce dernier jet sera double de l'autre, & par consequent le quarré du diametre de la largeur de son tuyau doit estre double de l'autre à peu prés. C'est sur cette regle qu'est fondée la Table suivante.

TABLE DES LARGEURS DES TUYAUX & des differens ajustages selon la hauteur des réservoirs.

Hauteurs des réservoirs.	*Largeurs des ajustages.*	*Largeurs des tuyaux.*
A 5 pieds,	3, ou 4, ou 5, ou 6 lignes,	22 lignes.
A 10 pieds,	4 5 6 lignes,	25 lignes.
A 15 pieds,	5 6 lignes,	2 pouces $\frac{1}{4}$
A 20	6 lignes,	2 pouces $\frac{1}{2}$
A 25	6	2 ponces $\frac{3}{4}$
A 30	6	3 pouces.
A 40	7 8 lignes.	4 p. $\frac{1}{4}$
A 50	8 10 lignes.	5 p. $\frac{1}{2}$.
A 60	10 12 lignes.	5 $\frac{1}{4}$, ou 6 pouces.
A 80	12 14 lignes.	6 p. $\frac{1}{2}$, ou 7
A 100	12 14 15	7 p. ou 8

Si le jet de l'eau a 12 lignes d'ajustage, & que le réservoir soit à 84 pieds de hauteur, le jet sera de 65 pieds à peu prés. Si les moindres tuyaux prés de l'ajustage sont de 7, ou 8 pouces, & il donnera 40 pouces à peu prés, & par un ajustage de 14 lignes il donnera 54 pouces, qui font 3888 muids en 24 heures ; & si le réservoir a 50 pieds en quarré, il faudra qu'il ait environ 13 pieds de hauteur, afin qu'il puisse fournir le jet 24 heures ; & pour l'entretenir seulement 12 heures, il suffira qu'il ait 40 pieds en quarré & 10 pieds de hauteur pour contenir 1944 muids. Si les jets d'eau ne vont pas continuellement, & qu'on mette des robinets dans les tuyaux de la conduite, pour arrester le cours de l'eau quand on veut, il faut que leurs ouvertures soient à peu prés de la largeur des tuyaux ; car si elles estoient beaucoup plus petites, elles diminuëroient la hauteur du jet par le frottement. On peut tenir les tuyaux plus larges en ces endroits, & ajuster les robinets, ensorte que leurs ouvertures soient aussi larges que le reste des tuyaux.

Lorsque les réservoirs sont fort élevez, & les tuyaux du bas, larges de 5, ou 6 pouces, ils sont en danger de se rompre par le poids de l'eau ; & plus ils sont étroits moins ils se rompent, si les tuyaux sont de mesme épaisseur. Voicy les regles que l'on peut suivre. Supposé qu'un réservoir de 30 pieds ne rompe, ou ne dessoude point un tuyau de cuivre d'un quart de ligne d'épaisseur, & qu'étant de moindre épaisseur, comme d'un cinquiéme de ligne, il le puisse rompre. Lorsqu'on élargira les tuyaux sans hausser le reservoir, il faut augmenter l'épaisseur selon la raison des diamétres ; car d'un costé, le poids de l'eau est en raison doublée des diametres, mais les circonferences soudées sont aussi en la raison des diametres ; c'est pourquoy, si le diametre est double, le poids de l'eau sera quadruple, & la circonference soudée sera double, ce qui rend la resistance double ; donc il ne reste que la simple raison des diamétres, si on suppose que l'eau par son poids fasse separer & détacher les parties du métail & de la soudure, comme les parties d'un baston qu'on tireroit perpendiculairement : ainsi si le tuyau est de 6 pouces sur 30 pieds de hauteur, il faut que que le métail du tuyau ait $\frac{1}{2}$ ligne d'épaisseur ; s'il est d'un pied de largeur, il luy faudra donner une ligne.

OOOooo

Lorsque les réservoirs sont plus hauts, les largeurs des tuyaux demeurant les mesmes, il faut augmenter l'épaisseur du métail à proportion des hauteurs; ainsi, à un réservoir de 60 pieds, le tuyau estant de 3 pouces de largeur, le métail doit avoir ½ ligne d'épaisseur, & à un de 120 pieds, il doit avoir une ligne.

Si les tuyaux sont plus hauts & plus larges, il faudra considerer les deux proportions. Ainsi, si le tuyau a 60 pieds de hauteur, & que sa largeur soit de 8 pouces, il faudra prendre une demie ligne à cause de la hauteur de 60 pieds; & à l'égard de la largeur, il faut faire cette regle de trois, comme 3 pouces sont à 8 huit pouces, ainsi une demie ligne à $\frac{4}{3}$; ce qui fera voir que le métail devra avoir alors une ligne & un tiers d'épaisseur.

Si on suppose que les fondures soient plus difficiles a separer, que les parties du métail, on peut considerer la platine de la figure troisiéme où est l'ajustage comme la plus foible partie, & comme devant se rompre en son milieu, ou proche des bords de la soudure; & parce qu'une regle de bois appuyée par les deux bouts, peut soûtenir dans son milieu un poids double de celuy qu'elle soûtiendroit, si elle estoit deux fois plus longue, & que si le poids est distribué le long d'une regle, en plusieurs petites parties égales, elle en peut soûtenir, sans se rompre deux fois autant que si tout le poids estoit au milieu; il s'ensuit que si la platine estoit quarrée, & qu'elle pust estre chargée d'une eau de 20 pieds de hauteur, sans qu'elle se rompît, elle ne pourroit soûtenir que la moitié du mesme poids, si elle estoit deux fois aussi longue sans augmenter sa largeur, mais alors elle seroit chargée de deux fois autant d'eau, & par consequent elle n'en pourroit soûtenir que le quart; donc, selon la doctrine de Galilée, il faudroit doubler son épaisseur pour la rendre assez forte. La mesme chose arriveroit si elle estoit quarrée; car d'un costé le poids de l'eau seroit doublé, mais sa resistance seroit aussi doublée; & estant ronde elle résisteroit aussi à proportion.

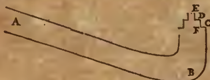
Donc, aux tuyaux dont les diametres sont differens, & les hauteurs égales, il faut augmenter l'épaisseur du métail de la platine où est l'ajustage, selon la raison des diamétres, si la platine est la plus foible partie.

Lorsque les conduites des eaux sont fort longues, comme de 1000 toises, le long frottement diminuë la hauteur des jets & la dépense de l'eau, principalement si les tuyaux sont trop étroits. Voicy les regles qu'on peut suivre.

Si vous avez un réservoir de 80 pieds, & de l'eau suffisante pour faire six jets de 9 lignes chacun, il faut prendre le quarré de 9 qui est 81, son produit par 6 donne 486, dont la racine quarrée est environ 22; ce qui fait connoistre que les six jets de 9 lignes de diamétre donnent autant qu'un seul de 22 lignes, & parce qu'un jet de 22 lignes de diamétre donne beaucoup plus que celuy d'un pouce; sçavoir, en la proportion de 484, à 144 quarrez de 22 & de 12, il faut aussi que la largeur du tuyau soit en la mesme proportion à l'égard des 7 pouces qui conviennent à la hauteur de 80 pieds. Donc, comme 12 à 22: ainsi, 7 à $12\frac{5}{6}$ à peu prés; ce qui fera voir que le grand tuyau jusques aux distributions, doit avoir 13 pouces de largeur, & chaque tuyau des six distributions 7 pouces; & en ce cas le jet ira à plus de 60 pieds, & si on donne 14 pouces de largeur au grand tuyau, le jet ira à 65 pieds, nonobstant le long chemin de la conduite. On fera les autres calculs suivant ces regles.

Dans les jets fort hauts & fort gros, il faut disposer les derniers tuyaux & leurs ajustages, à peu prés selon la figure suivante, A B C D E; car supposé que le tuyau A B C ait 7 pouces de largeur, il faudra le retressir de moitié, & donner à F D, 3, ou 4 pouces de hauteur, & faire un second rétrécissement jusques à la largeur de l'ajustage; & si son ouverture est d'un pouce de largeur, & qu'il doive jallir à 50, ou 60 pieds, il suffira que la hauteur de

l'ajustage soit de 6 lignes à angles droits pour diriger le jet, & s'il n'alloit qu'à 30 pieds, il suffiroit qu'il fust de 3, ou 4 lignes; car plus D E sera haut, plus la hauteur du jet diminuëra & plus l'ajustage sera poly, plus le jet sera beau.



Pour partager l'eau en divers jets, & sçavoir combien on en donnera à chacun, ce qui peut aussi servir à la distribution qu'on fait à plusieurs particuliers, de l'eau d'une source, il faut avoir une jauge, dont les ouvertures soient quarrées & non rondes, comme si A B, en la figure suivante, est le haut du vaisseau qui sert de jauge, & C D la hauteur de l'eau, il faudra placer les trous quarrez environ 2 lignes au-dessous de la surface C D, selon une ligne droite horisontale E N: or, si on la divise en plusieurs quarrez d'un pouce de hauteur, comme E F P H, ils donneront plus d'un pouce: car, si les circulaires donnent 14 pintes en une minute, les quarrez en donneront une quantité qui sera à 14, comme 14 à 11, laquelle proportion de 14 à 11, est à peu prés celle du quarré au cercle qui a mesme largeur; si donc un pouce rond donne 14 pintes en une minute, un pouce quarré donnera un peu moins de 18 pintes;



car 11 est à 14, comme 14 pintes à $17\frac{9}{11}$, il faudra donc diviser E F en 14 parties égales, & si E R contient 11 de ces parties, le quarré long E R S H sera à fort peu prés égal à un pouce circulaire, & il donnera un pouce, c'est à dire 14 pintes en une minnte, si l'eau du baquet qui sert de jauge demeure à la hauteur C D. On fera plusieurs figures de suite égales à E R S H sous la mesme ligne, comme R L T S, L M V T, &c. Si on veut donner undem y pouce, il faudra diviser un de ses quarrez long, comme *z r o g*, par la moitié par la ligne *X Y*, & elle donnera un demy pouce, c'est à dire 7 pintes en une minute, & en toutes les autres divisions, de mesme, en prenant le tiers, comme *i k a q*, où le quart, &c. Il y aura encore cet avantage, que si les eaux qui fournissent l'écoulement diminuënt, & qu'en coulant elles ne remplissent que le tiers, ou la moitié, ou les deux tiers de la hauteur des ouvertures de la jauge, tous les particuliers perdront à proportion, ce qu'on ne peut faire quand les trous sont ronds; & s'il y a un peu plus de frottement, à proportion, dans les petites ouvertures, que dans les grandes, cela sera recompensé, en ce que l'eau succede mieux à un petit écoulement qu'à un grand. Si on veut donner 3, ou 4 pouces, on prendra 3, ou 4 ouvertures entieres, égales chacune à E R S H, comme E M V H, pour 3 pouces.

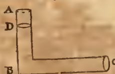
OOOooo ij

Ces regles peuvent servir à toutes les autres les autres difficultez qu'on pourra avoir touchant les jets d'eau, comme si on a un réservoir, ou une source élevée de 40 pieds au-dessus de l'ajustage qui puisse fournir 20 pouces, & qu'on la veüille toute employer en un seul jet, il faudra regarder la Table, & on trouvera qu'un ajustage de 3 lignes, ayant son réservoir à 40 pieds, donne 25 pintes $\frac{4}{7}$ en une minute : en suite on fera cette regle de trois, si 25 pintes $\frac{4}{7}$ me viennent de 9, quarré de 3, que me donneront 280 pintes, que 20 pouces donnent en une minute, on trouvera 98 $\frac{2}{7}$ pour le quotient, dont la racine quarrée est 10, à peu prés; ce qui fera connoitre que l'ajustage doit estre de 10 lignes de diametre à fort peu prés, & que ce jet qui s'élevera environ à 35 pieds, employera les 20 pouces coulant continuellement. Mais, si on se contente que le jet aille seulement le jour 12 heures de suite, on pourra laisser remplir pendant la nuit un grand réservoir qui contienne 720 muids, & on aura assez d'eau pour un jet de 14 lignes, ou pour deux d'environ 10 lignes, chacun pour 12 heures de suite.

DE CRASSITIE ET VIRIBUS TUBORUM in aqueductibus secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros.

A D. ROMER anno 1680.

COGNITISSIMUM est altiores fontes, & ampliores ductuum diametros multo fortiora requirere tuborum latera, quam aqua quæ ex depressiori loco per canalem angustum exoneratur; a nemine vero quod sciam hactenus sufficienter explicatum est qua proportione immutare convenit crassitiem metalli ad retinendam eandem tuborum firmitatem in quibuscumque altitudinibus & diametris propositis. Regulis in illum usum condendis inservient sequentes propositiones, in quibus suppono tubum continuum A B C ad angulum rectum inflexum in B. In parte A B perpendiculari indefinitæ amplitudinis, considero altitudinem incumbentis quæ; in parte vero horisontali B C indefinitæ longitudinis, considero amplitudinem tuborum.



PROPOSITIO PRIMA.

Idem tubus clausus in C ab aquis diversarum altitudinum A B, D B distenditur in ratione altitudinum A D ad D B, patet

PROPOSITIO SECUNDA.

Aqua ejusdem altitudinis in distendendis tubis diversarum diametrorum valet ut diametri tuborum.

Nam vires aquæ sunt ut superficies in quas ponderant ex eadem altitudine, sed superficies cylindricæ sunt ut diametri.

PROPOSITIO TERTIA,

(Inutilis, nisi contrarium ejus quod hic astruitur assumptum fuisset ab aliis ad concludendum falsum in hac ipsa materia.)

Cylindrus amplus eodem modo resistit disruptioni secundum suam longitudinem ac parvus, si utrobique iisdem viribus sit resistendum. Si exempli gratia, vel altitudines sint in ratione reciproca superficierum, vel supponatur in tubis contineri liquores diversæ gravitatis absolutæ in ratione ipsarum superficierum directa.

Ad

Ad hoc intelligendum imaginemur duos annulos A, B, ejusdem crassitiei, sed diversarum diametrorum, æqualibus viribus trudi deorsum, circa conum C D. Neutrum autem facilius rumpetur, si materia utriusque eadem sit & uniformis, non aliter quam suspensum pondus eadem facilitate rumpit filum longum ac breve, modo ejusdem sint crassitudinis : sed res eodem modo se habet in disruptione plurium annulorum qui cylindrum constituunt.



PROPOSITIO QUARTA.

Vires tuborum ad resistdendum disruptioni sunt in duplicata ratione crassitierum metalli.

Nam vires figulorum annulorum in quos tubus resolvitur sunt ut quadrata crassitierum suarum vel ut superficies in disruptione separandæ.

Hinc tres sequentes regulæ extruuntur.

Regula prima.

Si manente altitudine aquæ libeat mutare diametrum tubi, oportet ad retinendam eandem firmitatem mutare crassitiem metalli in subduplicata ratione diametrorum, seu ut eorum radices, per 2 & 4 propositionem.

Regula secunda.

Si immutetur altitudo, manente diametro, debet eodem modo crassities augeri ut radices altitudinum, per 1 & 4 propositionem.

Regula tertia.

Invenitur crassities metalli post immutatam & altitudinem & diametrum, si fiat : Ut productum altitudinis in diametrum unius, ad productum altitudinis in diametrum alterius ; sic quadratum crassitiei unius, ad quadratum crassitiei alterius.

Exemplum.

Tubus plumbeus diametri 16 pollicum ab incumbente aqua 50 pedum habens crassitiem $6\frac{1}{2}$ linearum, inventus est sufficientis firmitatis in experimento Versalliano, quæritur quænam assignari crassities tubo plumbeo debet, cujus diameter 10 pollicum, & altitudo aquæ 40 pedum.

Productum 16 in 50 est 800.
& 10 in 40 est 400.
Quadratum crassitiei datæ 40.

Ergo ut 800 ad 400, sic 40 ad 20, cujus radix $4\frac{1}{2}$ fere : ergo tubus hujus crassitiei in proposita altitudine & diametro, æque fortis erit ac ille quem expertus sum.

EXPERIMENTA CIRCA ALTITUDINES & amplitudines projectionis corporum gravium, instituta cum argento vivo à D. Romer.

JACTUS verticalis fuit 270 linearum, cujus observatio cum sit difficilior, confirmata est ab altitudinibus jactuum parum à vertice declinantium, veluti in gradu 5° 268 lin. in gradu 10° 262 linearum.

Hinc ex supposito impetu 270 lin. computantur altitudines & amplitudines projectionum, & conferuntur cum observatis in sequenti tabella.

Elevatio directionis.	Amplitudo computata.		Amplitudo observata.		Correspond. supra 45°.		Altitudo computata.	Altitudo observata.
Grad.	*Poll.*	*Lin.*	*Poll.*	*Lin.*	*Poll.*	*Lin.*	*Lin.*	*Lin.*
5	7	10	8	9	7	8	2	4
10	15	5	16	6	15	2	8	9
15	22	6	23	9	22	4	18	21
25	34	6	35	6	35	0	48	51
35	42	3	43	0	42	0	89	94
45	45	0	44	9			135	140
55	42	3	42	0			181	187
65	34	6	35	0			222	226
75	22	6	22	4			252	254
80	15	5	15	2			262	2[illegible]2
85	7	10	7	8			268	269
90	0	0	0	0			270	270

Nota ex observationibus deprompta.

I. Filum seu cylindrus erumpens, multo major est quam foramen, etiam quando directio ad horizontem est inclinata.

II. In jactibus obliquioribus ut 45, 50, 35 graduum, &c. filum fluxus in descensu extenditur, & separatur non quidem in penicillum; sed in latum secundum planum verticale.

III. Jactus verticalis argenti vivi vix propius accedit ad altitudinem sui fontis, quam ipsius aquæ.

Hinc in altitudine duorum pedum defecit plus quam 18 lineis; cum tamen tubus respectu foraminis fuerit amplissimus.

In collatione calculi cum observatis apparet.

I. Directiones infra 45° faciunt amplitudines majores quam correspondentes supra; cùm juxta theoriam æquali angulo distantes à 45° deberent esse ejusdem amplitudinis.

II. Directiones supra 45° magis respondent calculo.

III Melius convenient amplitudines & secum & cum calculo, si sumantur guttæ quæ omnium longissimè projiciuntur. Ego quidem annotavi omnium medias in determinatione amplitudinum.

IV. Altitudines ferè ubique sunt majores calculatis; quamvis hypothesis altitudinis maximæ sit bona.

FINIS.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Par les soins de JEAN ANISSON Directeur de ladite Imprimerie.

M. DC. XCIII.

